UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO- MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Janus Maja 131/10

Vukašin Marija 368/10

Primena diferencijalnog računa na Cobb-Douglasovu funkciju proizvoda

Mentor: prof. dr Aleksić Jelena

Novi Sad, decembar 2011.

Sadržaj

Uvod

Ovaj rad ima zadatak da objasni primenu diferencijalnog računa na Cobb-Douglasovu funkciju. Polazeći od osnovnih činjenica diferencijalnog računa i elementarnih ekonomskih saznanja o Cobb-Douglasovoj funkciji ovaj rad dobija matematičko-ekonomsku formu.

Sadržaj ovog rada možemo podeliti u tri dela :

I deo - U ovom delu govorimo o matematičkim pojmovima koji se ispituju u okviru diferencijalnog računa, o graničnoj vrednosti, neperkidnosti, parcijalnim izvodima, diferencijabilnosti, diferencijalu, izvodu po pravcu i ekstemima. Formulišemo teoreme i definicije vezane za ove pojmove.

II deo - U okviru kojeg uvodimo biografiju dvojice kako matematičara tako i ekonomista koji su otkrili funkciju proizvoda. Zatim u ovom delu dajemo istorijski nastanak ove funkcije, analiziramo primere na kojima uočavamo primenu diferencijalnog računa na ovu funkciju.

III deo - U ovom delu se ukazuje na razvoj Cobb-Douglasove funkcije, kao i o značaju ove funkcije danas. Posvećena je pažnja i suštini razvoja Cobb-Douglasove funkcije koja je upravo identifikacija stupnja tehnološkog razvoja.

I deo

1. Diferencijani račun za funkcije više promenljivih

Ovde je akcenat na funkcijama koje zavise od dve, tri i više promenljivih. One su definisane na nekom podskupu skupa R^d, $d \geq 2$, i mogu biti skalarne $f : R^d \to R$ (kodomen im je skup realnih brojeva) ili vektorske $f: R^d \to R^n$, $n \geq 2$ (kodomen im je skup vektora).

Kada se kaže diferencijalni račun funkcija više promenljivih mislimo na ispitivanje :

1. Granične vrednosti funkcija
2. Neprekidnosti
3. Parcijalnih izvoda
4. Diferencijabilnosti
5. Diferencijala
6. Izvoda po pravcu
7. Ekstrema

Naša analiza se odnosi na konkretnu funkciju dve promenljive, na Cobb-Douglasovu funkciju.
Pre samog početka analiziranja Cobb-Douglasove funkcije, potrebno je reći par reči o ovih sedam matematičkih pojmova.

1.1. Granična vrednost funkcije dve promenljive

<u>Definicija 1</u>. Neka je funkcija $f : D \subset R^2 \to R$ i neka je tačka $(a,b) \in K((a,b); \delta) \subset D$ unutrašnja tačka skupa D ($\delta > 0$). Tada je

$$l = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\in D}} f(x,y)$$

$$\leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in D)\ \ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \to |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

<u>Napomena 1.</u> *Oznaka $K((a,b); \delta)$ prestavlja krug sa centom u (a,b) poluprečnika δ.*

1.2. Neprekidnost

Za ispitivanje neprekidnosti funkcija, potrebno je poznavati gore navedenu definiciju limesa funkcije u tački. Za funkciju $f : R^2 \to R$ kažemo da je neprekidna u tački (a, b) ako i samo ako

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in R^2}} f(x, y) = f(a, b)$$

Za funkciju $f : R^2 \to R$ kažemo da je neprekidna na skupu $D \subset R^2$ ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa.

1.3. Parcijalni izvodi

Kako je Cobb-Douglasova funkcija proizvoda, funkcija dve promenljive, za ovu analizu potrebno nam je poznavanje parcijalnih izvoda funkcija dve promenljive (*x*,*y*). Polazimo od pretpostavke da je jedna od promenljivih konstanta, na primer *y*=*b* je konstanta. Tada funkciju f možemo posmatrati kao funkciju jedne promenljive,

$$g(x) \coloneqq f(x; b),$$

a *b* posmatramo kao parametar. Ako funkcija *g* ima izvod u tački *a*, što označavamo $g'(a)$, i zovemo ga *parcijalni izvod funkcije f po promenljivoj x u tački (a,b*), i koristimo sledeće oznake

$$g'(a) := f_x(a, b) = \partial_x f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \partial_1 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial 1}(a,b).$$

Zapažamo da je,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}.$$

Analogno je i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

Iz ove definicije zaključujemo da se parcijalni izvodi definišu slično kao izvod funkcije jedne promenljive.

Dalje, funkcijama f_x , f_y možemo tražiti parcijalne izvode. Na ovaj način dobijamo parcijalne izvode drugog reda. Pa, je tako parcijalni izvod po y funkcije f_x, u oznaci f_{xy}, parcijalni izvod drugog reda. Analogno definišemo i ostale parcijalne izvode drugog reda, f_{xx}, f_{yy}, f_{yx} .

<u>Teorema 1.</u> (*Kleroova teorema*) *Neka je K=K((a,b);r) otvoreni krug sa centrom u (a,b) poluprečnika r i neka je funkcija f neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda na K((a,b);r), za neko r>* 0.
Ako su funkcije f_{xy} i f_{yx} neprekidne na K, onda je

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)\,.$$

1.4. Diferencijabilnost

<u>Definicija 2</u>. Funkcija $f : R^2 \to R$ je diferencijabilna u tački (x_0, y_0) ako se može predstaviti u obliku

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(x-x_0) + \varepsilon_2(y-y_0),$$

gde su ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ kada $(x,y) \to (x_0, y_0)$.

Pored ove definicije postoji i ekvivalentna, koja se pokazala kao efikasnija pri proveri da li je funkcija diferencijabilna

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

<u>Teorema 2</u>. (*Dovoljan uslov za diferencijabilnost u tački) Ako parcijalni izvodi funkcije f postoje na nekom krugu K*($(x_0, y_0);\delta$) *i neprekidni su u* (x_0, y_0), *onda je funkcija f diferencijabilna u tački* (x_0, y_0).

1.5. Diferencijal

Pojam diferencijala vezujemo za tačku. Neka je data funkcija dve promenljive, *z=f* (*x,y*), diferencijal u tački (x_0, y_0) računamo na sledeći način

$$dz = z_x(x_0, y_0)dx + z_y(x_0, y_0)dy \qquad (1)$$

dz je funkcija priraštaja *dx i dy*.

dz zovemo još i *totalni diferencijal f-je z = f* (*x,y*) u tački (x_0, y_0) koji odgovara priraštaju $(\Delta x, \Delta y)$.

Diferencirajmo ponovo jednačinu (1) *:*

$$d^2z=(z_{xx}\,dx+z_{yx}\,dy)dx+(z_{xy}\,dx+z_{yy}\,dy)dy \qquad (2)$$

Ukoliko je funkcija $z \in C^2(\mathbb{R}^2)$, na osnovu Kleroove teoreme sledi da su mešoviti parcijalni izvodi jednaki , $z_{xy} = z_{yx}$, te jednačina (2) dobija oblik

$$d^2z=z_{xx}\,(dx)^2+2z_{xy}\,dxdy+z_{yy}\,(dy)^2\ .$$

1.6. Izvod po pravcu

Definicija 3. *Neka je $\vec{u}$ jedinični vektor. Izvod funkcije f po pravcu vektora $\vec{u}$ u tački* $(x_{0,}y_0)$ *definišemo*

$$\partial_{\vec{u}}f\,(x_{0,}y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left((x_{0,}y_0)+h\vec{u}\right)-f\,(x_{0,}y_0)}{h}\ .$$

Izvod po pravcu geometrijski predstavlja nagib neke tangente, pa u skladu sa geometrijskom interpretacijom možemo reći da izvod po pravcu govori koliko brzo se funkcija menja u datoj tački po datom pravcu. Konkretno, ako su $\vec{u}$ i $\vec{v}$ proizvoljna dva različita nenula vektora (pravca), za koje važi da je $\partial_{\vec{u}}f(x_{0,}y_0) > \partial_{\vec{v}}f\left(x_{0,}y_0\right)$, nagib prve tangente je veći, što implicira da da se funkcija brže menja po pravcu $\vec{u}$.

Teorema 3. *Ako je skalarna funkcija f diferencijabilna u* $(x_{0,}y_0)$*, onda ona ima izvode po svim pravcima $\vec{u}$=(a,b), $\sqrt{a^2+b^2}$=1, i pri tome je*

$$\partial_{\vec{u}}f\,(x_{0,}y_0) = a\cdot\partial_x f\,(x_{0,}y_0) + b\cdot\partial_y f\,(x_{0,}y_0) = \nabla f\,(x_{0,}y_0)\cdot\vec{u}.$$

1.7. Ekstremi

Relaciju poretka " $\leq$ " imamo samo na skupu realnih brojeva. Uopšte na skupu $\mathbb{R}^d$,d ≥ 2, nemamo definisanu ovakvu relaciju. Tačke $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, možemo eventualno porediti njihovim rastojanjima od koordinatnog početka, odnosno možemo porediti dužine vektora $\vec{x}$, a tada vršimo poređenje vrednosti funkcije $f(\vec{x})=|\vec{x}|$, što je skalarna funkcija, pa koristimo " $\leq$ " definisanost na $\mathbb{R}$.

1.7.1. Lokalni ekstremi

Lokalni ekstremi su ekstremi koje tražimo u unutrašnjim tačkama domena skalarne funkcije. Skalarna funkcija može imati više lokalnih minimuma i maksimuma. Najmanji lokalni minimum naziva se globalni minimum, a najveći lokalni maksimum naziva se globalni maksimum.

Definicija 4. *Neka je $f: \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $(x_{0,}y_0)$ tačka iz unutrašnjosti skupa D.*

- *Ako je za neko $r > 0$, $f(x_{0,}y_0) \leq f(x,y)$, $(x,y) \in K((x_{0,}y_0);r)$, onda je tačka $(x_{0,}y_0)$ tačka lokalnog minimum, a $f(x_{0,}y_0) = f_{min}$ je lokalni minimum funkcije f.*

- *Ako je za neko $r > 0$, $f(x_{0,}y_0) \geq f(x,y)$, $(x,y) \in K((x_{0,}y_0);r)$, onda je tačka $(x_{0,}y_0)$ tačka lokalnog maksimuma, a $f(x_{0,}y_0) = f_{max}$ je lokalni maksimum funkcije f.*

Teorema 4. *Ako postoje $f_x(a,b)$ i $f_y(a,b)$ i tačka (a,b) je tačka lokalnog minimum ili maksimuma, onda su*

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0.$$

Posledica 1. Ako je funkcija $f: K((a,b);r) \to R, r > 0$, diferencijabilna u tački (a,b), i tačka (a,b) je tačka lokalnog ekstrema, onda je tangentna ravan na grafik funkcije u tački $P(a,b,f(a,b))$ paralelna $(x,y)-$ ravni.

Definicija 5. Stacionarne tačke skalarne funkcije f su one tačke u kojima gradijent funkcije f ne postoji ili je jednak nuli.

Napomena 2. Teorema 4 je potreban uslov da tačka bude tačka ekstrema, ali nije dovoljan uslov. Ova napomena ukazuje na to da postoje stacionarne tačke u kojima funkcija nema ekstrem.

Metoda pronalaženja ekstrema podrazumeva sledeće. Prvo posmatramo tačke u kojima gradijent ne postoji. Takve tačke ispitujemo po definiciji, poredimo vrednost $z_0 = f(x_{0,}y_0)$ i vrednosti $f(x,y)$, za (x,y) iz neke okoline tačke $(x_{0,}y_0)$. Za skalarne funkcije to znači da gledamo da li je grafik iznad ili ispod ravni $z = z_0$, na osnovu čega zaključujemo da li se radi o maksmimumu ili minimum funkcije, ili $(x_{0,}y_0)$ nije tačka ekstrema .

Zatim posmatramo tačke u kojima je $\nabla f\ (x_{0,}y_0) = \vec{0}$. Prirodu ovih tačaka osim po definiciji ispitujemo na osnovu raznih metoda, pa i preko znaka drugog diferencijala u tim tačkama,

$$(d^2 f(x_{0,}y_0))(dx, dy) = f_{xx}(x_{0,}y_0)(dx)^2 + 2 \cdot f_{xy}(x_{0,}y_0)dx \cdot dy + f_{yy}(x_{0,}y_0)(dy)^2,$$

kao što se da zaključiti ovde je reč o polinomu drugog stepena po dx, dy .
Napomenimo samo da je $f \in C^2(R^2)$, pa važi Kleroova teorema.

- ✓ Ako je $d^2 f(x_{0,}y_0) > 0$ funkcija f ima lokalni minimum.
- ✓ Ako je $d^2 f(x_{0,}y_0) < 0$ funkcija f ima lokalni maksimum.
- ✓ Ako je $d^2 f(x_{0,}y_0)$ menja znak, funkcija na svakoj okolini tačke $(x_{0,}y_0)$ ima vrednost i veće i manje od z_0 pa u tački $(x_{0,}y_0)$ nema ekstrem.
- ✓ Ako je $d^2 f(x_{0,}y_0) = 0$ nemamo informacije o tački $(x_{0,}y_0)$, pa je analiziramo drugim metodama (ili po definiciji ili idemo na diferencijale višeg reda).

1.7.2. Ekstremi na rubu

Osim ekstrema u unutrašnjim tačkama domena, funkcija može imati i ekstreme na rubu, uslovne ekstreme. Naime, pojam uslovnih ekstrema uvodimo kako bismo ispitali tačke na rubu domena. To nam omogućava da na svakom zatvorenom i ograničenom skupu nađemo najveći maksimum, medju svim maksimumima na rubu domena, i najmanji mimimum medju svim minimumima na rubu domena.
Za pronalaženje tačaka uslovnih ekstrema koristimo metod Lagranžovih množitelja. Pomoću ove metode nalazimo ekstreme funkcije *f* na skupu

$$\{\vec{x} |\ g(\vec{x}) = k\} \cap D_f\ ,$$

Pri čemu je g neprekidna i diferencijabilna. Treba napomenuti da uslova može biti i više od jednog, ali ovaj broj je uvek manji ili jednak broju promenljivih.

II deo

2. Biografija Pol Daglasa i Čarls Koba

Pol Daglas (1892-1976) je magistrirao i doktorirao na Kolumbija Univerzitetu. Imao je uspešnu profesorsku karijeru na više univerziteta u Americi, ali i političku jer je bio uticajni član senata SAD. Bez obzira na njegovu uspešnu karijeru u mnogim oblastima, najviše je poznat kao koautor Cobb-Douglaosve proizvodne funkcije. Na osnovu ove studije on je utvrdio relativno učešće kapitala i rada u stvaranju industrijskog proizvoda, koja se značajno podudaraju sa učešćima nadnica i profita u industrijskom dohotku. U početku je ovo bio iznenađujući rezultat, ali je on kasnije potvđen za mnoge zemlje i za različite vremenske periode. Tek je 1950-tih sa razvojem teorije ekonomskog rasta, Cobb-Douglasova proizvodna funkcija postala je jedinstven izraz proizvodnog procesa ekonomije kao celine. Cobb-Douglasova funkcija je u dugom vremenskom periodu pružala dobar materijal za naučni rad mnogih ekonomista.

Slika1. Pol Daglas

Čarls Kob (1875-1949), američki matematičar i ekonomista, koji je objavio mnogo radova iz ovih oblasti, najpoznatiji je upravo po razvoju Cobb-Douglasove formule u ekonomiji, u Čikagu, 1928 godine. Bio je redovan profesor na Amherst College.

3. *Istorijat nastanka funkcije proizvoda*

Čarls Kob i Pol Daglas su 1928. godine objavili studiju "Teorija proizvodnje" u kojoj prikazuju rast Američke privrede u periodu 1899-1922. godine. U toj studiji oni posmatraju proizvodnju kao veličinu koja predstavlja odnos određene količine rada i količine kapitala. Proizvodna funkcija kao opis veza izmedju određene količine rada i količine kapitala u statičkoj analizi izraz je nepromenjene tehnologije proizvodnje. Efekti tehničkog progresa ispoljavaju se u vremenu, a proticanje vremena dovodi do pomeranja funkcije u desno. Iako postoje mnogi drugi faktori koji utiču na parametar proizvodne funkcije, njihov model se pokazao kao izetno precizan. Međutim, iako je bila na izgled precizna većina kritičara je imala stav da je ova funkcija bazirana na oskudnim podacima. Obeshrabren kritikama, Pol Daglas vršio je dalja posmatranja i objavljivao rezultate, sve dok se nije razboleo. Tek dve decenije kasnije njegova proizvodna funkcija dostigla je široku upotrebu.

Pol Daglas se raspitivao kod svog prijatelja, matematičara Čarlsa Koba, da li postoji neka posebna funkcija koja opisuje odnos određene količine rada i količine kapitala.
Tako je nastala originalna Coob-Douglasova funkcija proizvodnje definisana na sledeći način :

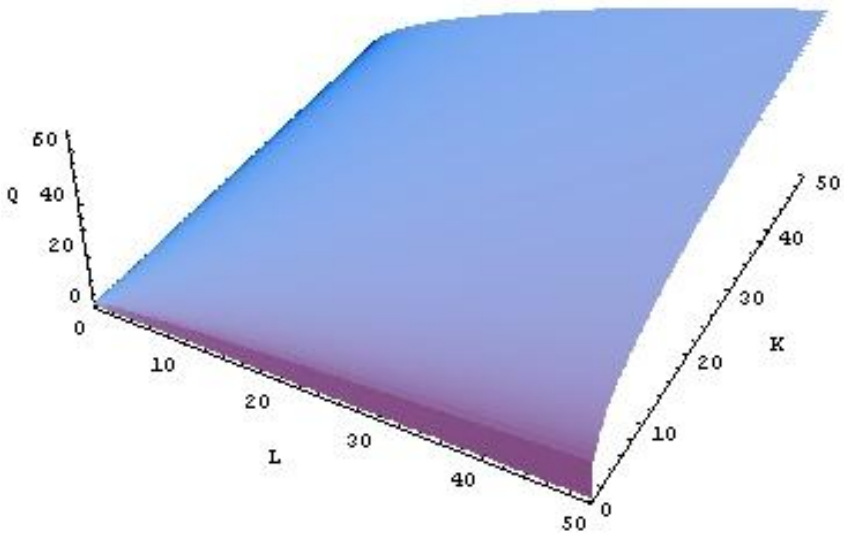
$$\boxed{P(L,K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}}$$

Gde je:

P - Vrednost svih dobara proizvedenih u jednoj godini (*"total production "*);
L - Ukupan broj radnih sati svih osoba koje su radile (*"labor "*);
K - Vrednost uloženog kapitala (*"capital "*);
b - Parametar koji odražava tehnološki nivo proizvodnje (najčešće b = 1,01);
α- Mera približne procentualne promene produktivnosti P pri jednoprocentualnoj promeni kapitala K ($\alpha \in (0,1)$, najčešće $\alpha = 0{,}75$);
β- Mera promene produktivnosti P pri jednoprocentnoj promeni rada L i konstantnoj vrednosti kapitala K .

Napomena 3.

- Ako je $\alpha + \beta = 1$ reč je o striktnoj Cobb-Douglasovoj funkciji. Pri porastu L i K za 20% i P se povećava za 20%;
- Ako je $\alpha + \beta < 1$, P opada;
- Ako je $\alpha + \beta > 1$, P raste.



Slika2. Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje

4. Funkcija proizvoda $P(L,K) = b\cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$

Domen funkcije $P(L,K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$ je

$$D_P=\{(L,K):\ L\geq 0,\ K\geq 0\},$$

$$\text{tj. } D_P=\overline{R_+^{\,2}}=[0,\infty) \text{ x } [0,\infty).$$

Uočimo da je Cobb-Douglasova funkcija proizvoda ustvari proizvod dve stepene funkcije. Kako su stepene funkcije elementarne funkcije, one su neprekidne na svom domenu i Cobb-Douglasova funkcija proizvoda je neprekidna funkcija na svom domenu.
Međutim kako ova funkcija ima i sve parcijalne izvode i kako su oni neprekidni, što zaključujemo iz istog (parcijalni izvodi su ponovo funkcije dobijene kao proizvod dve stepene funkcije), kažemo da je proizvodna funkcija glatka.
Funkcija je glatka ako postoje svi parcijalni izvodi i svi su neprekidni .

Potražimo sada prvi parcijalni izvod:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = b\cdot K^{\beta}\cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} = \alpha \cdot \frac{b\cdot K^{\beta}\cdot L^{\alpha}}{L}$$

$$\text{tj. } \frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \cdot \frac{P}{L}\ .$$

$\frac{\partial P}{\partial L}$ predstavlja graničnu (marginalnu) produktivnost faktora rada (L), on ukazuje na promenu proizvodnje u odnosu na promenu faktora rada (L);

dok,

$$\frac{\partial P}{\partial K} = b \cdot L^{\alpha} \cdot \beta \cdot K^{\beta-1} = \beta \cdot \frac{b \cdot L^{\alpha}}{K^{1-\beta}} = \beta \cdot \frac{b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}}{K^{1-\beta} \cdot K^{\beta}}$$

$$\text{tj.} \quad \frac{\partial P}{\partial K} = \beta \cdot \frac{P}{K} \quad .$$

$\frac{\partial P}{\partial K}$ predstavlja graničnu (marginalnu) produktivnost faktora kapitala (K) , on ukazuje na promenu proizvodnje u odnosu na promenu faktora kapitala (K).

<u>Napomena 4.</u>

Primetimo:

- Ukoliko je barem jedan činioc jednak nuli, bilo da je rad jednak nuli, ili kapital jednak nuli, imamo deljenje nulom što nije definisano. Međutim, ako $L \to 0$ ili $K \to 0$ i proizvodnja $P \to 0$ što je sasvim prirodno, pa u tim slučajevima ni ne definišemo parcijalne izvode ;

- Ako je u pitanju striktna Cobb-Douglasova funkcija I broj radnih sati i uloženi kapital povećamo m -puta :

$$P(m \cdot L, m \cdot K) = b \cdot (m \cdot L)^{\alpha} \cdot (m \cdot K)^{\beta} = b \cdot m \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} = m \cdot P(L, K)$$

  i proizvodnja će se povećati m – puta;

- Kako je proizvodnja po jedinici rada jednaka $\frac{P}{L}$, pretpostavka da je marginalna produktivnost faktora rada proporcionalna količini proizvodnje po jedinici rada nam daje da je

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \cdot \frac{P}{L}$$

  za neku konstantu α.

Ako nam je K konstantno (K=K_0), ova parcijalno-diferencijalna jednačina postaje obična diferencijalna jednačina

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \cdot \frac{P}{L}$$

Ova diferencijalna jednačina može da bude rešena ako jednačinu $\frac{dP}{P} = \alpha \cdot \frac{dL}{L}$ integralimo sa obe strane,

$$\int \frac{1}{P} dP = \alpha \cdot \int \frac{1}{L} dL$$

$$ln(P) = \alpha \cdot \ln(cL)$$

$$\ln(P) = \ln(c_1 \cdot L^{\alpha})$$

I konačno,

$$P(L, K_0) = C_1(K_0) \cdot L^{\alpha} \qquad (1)$$

gde je $C_1(K_0)$ konstanta integracije koja zavisi od K_0.

Slično, pretpostavka da je marginalna produktivnost kapitala proporcionalna količini proizvodnje po jedinici kapitala nam daje

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \cdot \frac{P}{K}$$

Ako je L konstantno ($L = L_0$), ova diferencijalna jednačina može biti rešena tako da dobijemo

$$P(L_0, K) = C_2(L_0) \cdot K^{\beta} \qquad (2)$$

gde je $C_2(L_0)$ konstanta integracije koja zavisi od L_0.

I konačno kombinujući (1) i (2)

$$P(L, K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

gde smo rekli da je b konstanta nezavisna od L i K.

5. *Ekstremne vrednosti Cobb-Douglasove funkcije*

Kako Cobb-Douglasova funkcija prestavlja vrednost svih dobara proizvedenih u jednoj godini prirodno je govoriti o maksimalnoj vrednosti ove funkcije.
Pokazaćemo kada se, za koje vrednosti rada i kapitala dostiže maksimalna produktivnost.
Pođimo od funkcije proizvoda $P(L,K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$, zatim definišimo

- m - cena 1 sata rada
- n - jedinični kapital .

Ukupan budžet, u oznaci p, jednak *je* $p = m{\cdot}L + n{\cdot}K$. Odavde vidimo da nam je rad jednak $L = \frac{p-n\cdot K}{m}$, a kapital $K = \frac{p-m\cdot L}{n}$. Kada ovako definisano L zamenimo u Cobb-Douglasovu funkciju ona postaje $P = \frac{b}{m^{\alpha}} \cdot (p - n \cdot K)^{\alpha} \cdot K^{\beta}$, funkcija jedne promenljive. Potražimo sada njen izvod i izjednačimo ga sa nulom kako bismo odredili vrednost parametra K za koju je ova funkcija maksimalna.

Dakle, u pitanju je izvod proizvoda

$$P' = \frac{b}{m^{\alpha}} \cdot \left(\alpha \cdot (p - n \cdot K)^{\alpha-1} \cdot (-n) \cdot K^{\beta} + (p - n \cdot K)^{\alpha} \cdot \beta \cdot K^{\beta-1}\right)$$

$$\frac{b}{m^{\alpha}} \cdot \left(\alpha \cdot (p - n \cdot K)^{\alpha-1} \cdot (-n) \cdot K^{\beta} + (p - n \cdot K)^{\alpha} \cdot \beta \cdot K^{\beta-1}\right) = 0$$

Sada,

$$\frac{b}{m^{\alpha}} \cdot (p - n \cdot K)^{\alpha-1} \cdot K^{\beta-1} \cdot (\alpha \cdot (-n) \cdot K + (p - n \cdot K) \cdot \beta) = 0$$

tj.

$$\frac{b}{m^{\alpha}} = 0$$
$$\vee$$
$$(p - n \cdot K)^{\alpha-1} = 0$$
$$\vee$$
$$K^{\beta-1} = 0$$
$$\vee$$
$$K \cdot (\beta + \alpha)n - \beta \cdot p = 0$$

Kako su $b, m, n, p, K, L > 0$ u našoj analizi, jer slučaj kada nam je budžet, rad ili kapital jednak nuli ne razmatramo. Sledi da je tražena vrednost je $K = \frac{\beta \cdot p}{(\beta+\alpha)n}$, a tada je rad jednak $L = \frac{\alpha \cdot p}{m \cdot (\alpha+\beta)}$. Primetimo, ako je reč o stiktnoj Cobb-Douglasovoj funkciji tada je kapital jednak $K = \frac{\beta \cdot p}{n}$, a rad $L = \frac{\alpha \cdot p}{m}$.
Pa je tražena maksimalna vrednost produktivnosti

$$P_{max} = \mathrm{P}\left(\frac{\alpha \cdot p}{m}, \frac{(1-\alpha) \cdot p}{n}\right) = b \cdot \left(\frac{\alpha \cdot p}{m}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{(1-\alpha) \cdot p}{n}\right)^{1-\alpha}$$

6. *Primeri*

Primer 1.

U tabeli su prikazani podaci Američke ekonomije tokom perioda 1899-1922. godine. Koristeći te podatke koji su objavljeni od strane vlade, Pol i Čarls su uzeli 1899 godinu za polaznu, a P, L i K za tu godinu su imali vrednost 100.

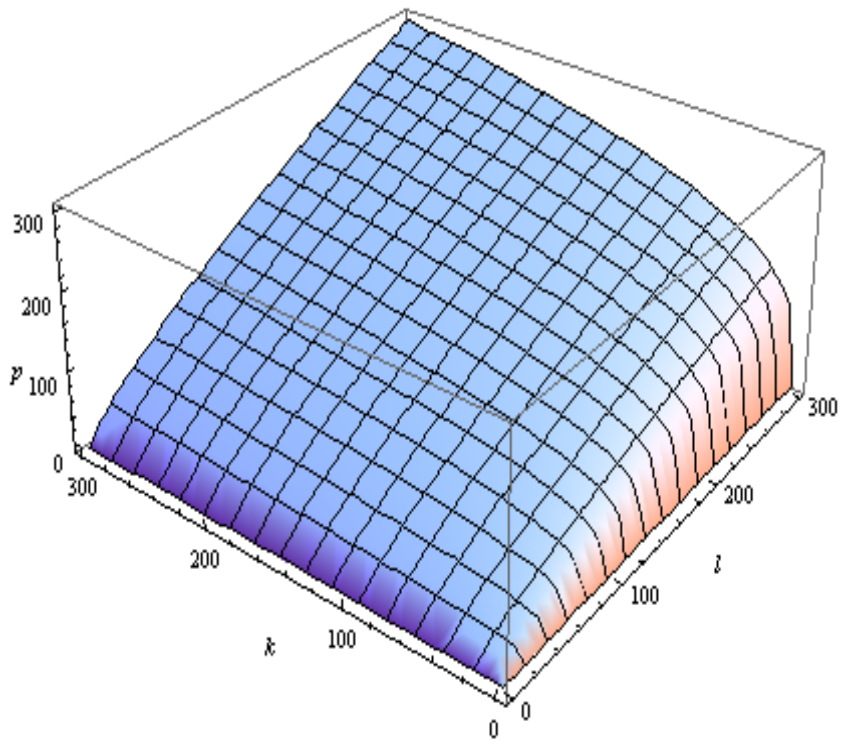
Godina	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Ako koristimo model dat jednačinom $P(L,K)=1{,}01\cdot L^{0{,}75}\cdot K^{0.25}$ da bi smo izračunali proizvodnju u godinama 1910 i 1920 dobijamo vrednosti

$$P(147,208)=1{,}01\cdot(147)^{0{,}75}\cdot(208)^{0.25}\approx 161{,}9$$

$$P(194,407)=1{,}01\cdot(194)^{0{,}75}\cdot(407)^{0.25}\approx 235{,}8$$

koje su približne pravim vrednostima, datim u tabeli, 159 i 231.



Slika 3. Grafik funkcije koji odgovara vrednostima datim u tabeli

Primer 2.

Pokazati da se Cobb-Douglasova funkcija može predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{ln\frac{P}{K}=ln\,b+\alpha\cdot ln\frac{L}{K}}$$

Rešenje:

Logaritmujući obe strane Coob-Douglasove funkcije ($P=b\cdot L^{\alpha}\cdot K^{1-\alpha}$) dobijamo izraz

$$ln\,P=ln(b\cdot L^{\alpha}\cdot K^{1-\alpha})$$

Primenimo osobinu logaritma proizvoda i prethodni izraz dobija oblik

$$ln\,P=ln\,b+lnL^{\alpha}+lnK^{1-\alpha}$$

Zatim,

$$ln\,P=ln\,b+\alpha\cdot lnL+(1-\alpha)\cdot lnK$$

Sredjen izraz postaje

$$ln\,P-ln\,K=ln\,b+\alpha\cdot(ln\,L-ln\,K)$$

Koristeći se osobinama za razliku dva logaritma dobijamo

$$\boldsymbol{ln\frac{P}{K}=ln\,b+\alpha\cdot ln\frac{L}{K}}$$

Što je i bilo potrebno pokazati.

Primer 3.

Pokazati da se Coob-Douglasova funkcija proizvoda $P(L,K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$ zadovoljava jednačinu

$$\boxed{\mathbf{L} \cdot \frac{\partial P}{\partial L} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial K} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{P}}$$

gde je $1 - \alpha = \beta$.

Rešenje:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = b \cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta}$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = b \cdot L^{\alpha} \cdot \beta \cdot K^{\beta-1}$$

Pa je

$$L \cdot \frac{\partial P}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial P}{\partial K} =$$

$$L \cdot b \cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta} + K \cdot b \cdot L^{\alpha} \cdot \beta \cdot K^{\beta-1} =$$

$$\alpha \cdot b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} + \beta \cdot b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} ,$$

kako je $P = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$ prethodna jednačina jednaka je

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{P} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{P}$$

Što je i trebalo pokazati.

III deo

7. Zaključak

Coob-Douglasova funkcija ima veliki značaj na međunarodnom nivou. Taj značaj se najbolje ogleda na primeru poređenja dve zemlje različitog stupnja privredno-tehnološkog razvoja. Posmatrajmo Ameriku i Indiju. Ameriku kao državu gde je tehnologija na visokom nivou, a s druge strane posmatramo Indiju kao državu gde je još uvek zastupljena manufakturna proizvodnja. Analizirajući ovaj primer uočavamo da ovaj (manufaktura) način proizvodnje znatno usporava produktivnost u Indiji, dok se porast produktivnosti (koja se računa na osnovu Coob-Douglasove funkcije $P=b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$) ogleda u zemljama sa razvijenom tehnologijom.

Suština Cobb-Douglasove funkcije je indetifikacija stupnja tehnološkog razvoja (prosperiteta) kao esencijalnog faktora koja ima odsudan značaj na nivo proizvodnje.

8. *Literatura*

1. Stewart, J., *Calculus*, Sixth Edition, Thomson Higher Education, Belmont, California, 2008.
2. www.docentes.fe.unl.pt/~jamador/Macro/cobb-douglas.
3. Bjelić, B., *Principi ekonomije*, IGT, Novi Sad, 2004.
4. www.ekof.bg.ac.rs/nastava/osnovi_makro_ekonomije/knjige/m-jak/leksikon/.
5. www.mywebspace.wisc.edu/pistone/web/sp09wk2.
6. Informacije sa predavanje iz Analize 2 kod profesorice dr Aleksić Jelene.