UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO- MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Izvod po pravcu i vektor gradijenta

Seminarski rad A M271

Student
Mirjana Erić 398/10

Mentor
dr Jelena Aleksić

Novi Sad, 2011/2012

Sadržaj

1. ***Uvod***

U ovom radu govorimo o izvodu po pravcu i vektoru gradijenta.
U prvom delu rada govorimo o izvodu po pravcu, veličini koja određuje brzinu promene funkcije u nekom pravcu.
U drugom delu rada govorimo o gradijentu skalarne funkcije i osobinama gradijenta.
U praksi je često potrebno tačkama trodimenzionalnog prostora pridružiti neku brojnu vrednost. To pridruživanje ne treba da zavisi od izbora koordinatnog sistema ili načina zadavanja (opisivanja) objekata.
Preslikavanje koje tačkama prostora pridružuje temperature u datoj tački je primer za tu vrstu preslikavanja. Tada, u svakoj tački u sobi, gradijent u toj tački pokazaće smer u kojem temperatura raste najbrže. Intenzitet gradijenta će odrediti koliko se brzo temperatura povećava u tom pravcu.
Za prethodno preslikavanje se umesto termina “skalarna funkcija prostornih tačaka” koristi termin "skalarno polje”.
Nakon toga, navedeni su razni primeri.

2. *Izvod po pravcu*

Definicija parcijalnog izvoda po x u tački (x_0, y_0) funkcije $f = f(x, y)$ je:

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

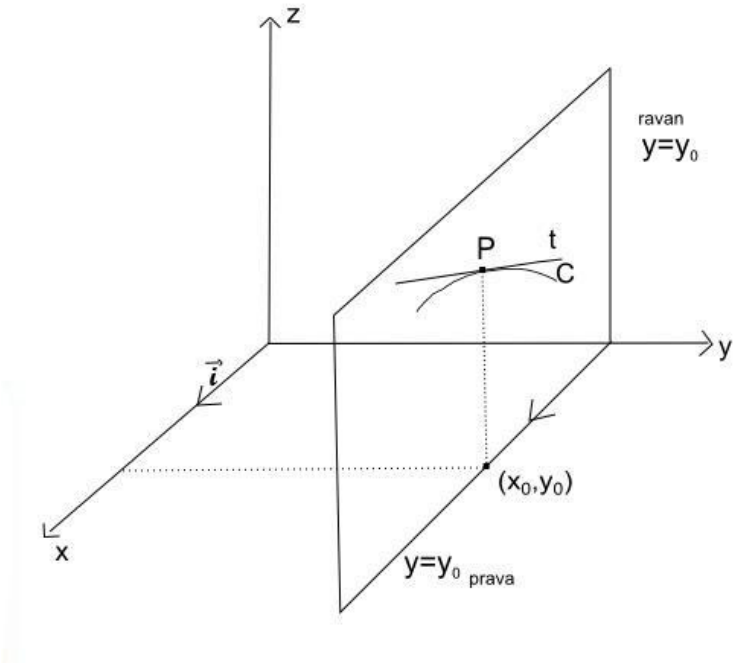
To možemo zapisati na sledeći način:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h\vec{i}) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Zbog ovog poslednjeg zapisa, parcijalni izvod po x u tački (x_0, y_0) možemo zvati i izvod po pravcu vektora $\vec{i}$ u tački (x_0, y_0).

Geometrijska interpretacija parcijalnog izvoda po x

Parcijalni izvod po x određuje nagib tangente na krivu u preseku grafika funkcije f i ravni $y = y_0$ *(Slika 1).*



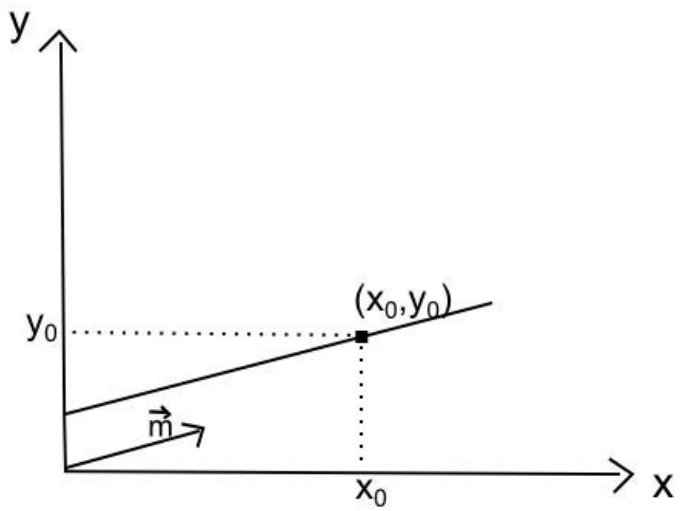
Slika 1: Geometrijska interpretacija parcijalnog izvoda po x

Ravan $y = y_0$ seče *(x,y)*-ravan po pravoj $y = y_0$ (u *(x,y)*- ravni).

Ta prava koja je paralelna vektoru $\vec{i}$, a prolazi kroz (x_0, y_0) ima parametrizaciju:

$$p: h \to (x_0, y_0) + h\vec{i}, \qquad p \parallel \vec{i}, \quad (x_0, y_0) \in p$$
$$x = x_0 + h, \quad h \in \mathbb{R}$$
$$y = y_0.$$

Ako istu ideju umesto na vektor $\vec{i}$ primenimo na proizvoljan, nenula vektor $\vec{m} = (a, b)$, dobijemo pravu u *(x,y)*-ravni paralelnu vektoru $\vec{m}$ *(Slika 2).*



Slika 2: Prava paralelna vektoru $\vec{m}$ koja sadrži tačku (x_0, y_0)

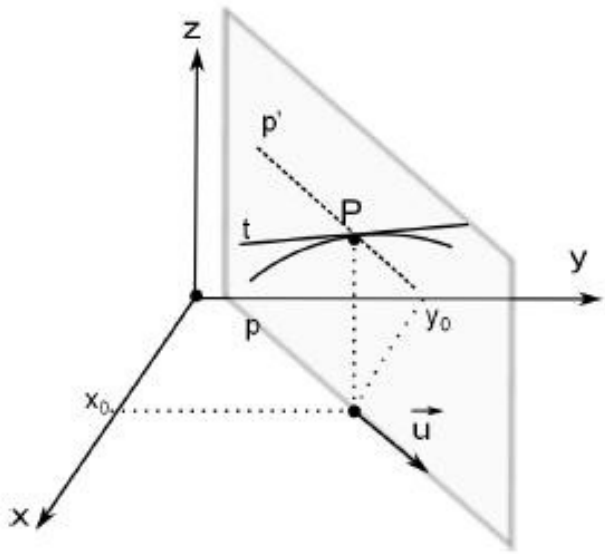
Svaki vektor je određen pravcem, smerom i intenzitetom.
Vidimo da je bitan samo pravac vektora $\vec{m}$.

Neka je $f: A \to R$ funkcija definisana na otvorenom podskupu prostora R^m. Kao što znamo, njen parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ u nekoj tački $a \in A$ (ako postoji) određuje brzinu promene te funkcije duž prave paralelne i-toj koordinatnoj osi. Uvešćemo sada veličinu koja će određivati brzinu promene te funkcije u nekom pravcu koji ne mora biti paralelan nijednoj koordinatnoj osi.

Definicija 1

Neka je $\vec{u}$ *vektor dužine 1,* $|\vec{u}| = 1$. *Tada je*

$$\partial_{\vec{u}} f(\vec{x_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + h\vec{u}) - f(\vec{x_0})}{h} \quad za \qquad f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} .$$



Slika 3: Izvod po x u pravcu vektora $\vec{u}$

Parametarski zapis prave u *(x,y)*- ravni:

$$\vec{u} = (a, b)$$

$$x = x_0 + ha, \quad h = \frac{x - x_0}{a}$$

$$y = y_0 + hb$$

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0) .$$

U $\mathbb{R}^3$ $y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$ predstavlja jednačinu ravni kroz pravu p paralelnu z osi.

Ta ravan na grafiku funkcije iseca krivu C kojoj pripada tačka $P(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Koeficijent nagiba tangente u tački P na tu krivu zove se *izvod po pravcu* vektora $\vec{u}$ u tački (x_0, y_0).

Koeficijent nagiba tangente je ustvari tangens ugla između tangente i prave u prostoru p'.

Prava p' je paralelna pravoj p i leži u ravni $z = z_0$ (*Slika 3*).

U opštem slučaju, postojanje parcijalnih izvoda funkcije f u nekoj tački $\overrightarrow{x_0}$ po svakoj od promenljivih nije dovoljno za postojanje njenog izvoda u proizvoljnom pravcu.
Naredna teorema daje dovoljan uslov za to.

Teorema 1

Ako je funkcija f diferencijabilna u tački $\overrightarrow{x_0}$ onda postoji $\partial_{\vec{u}} f(\overrightarrow{x_0})$, po svim pravcima. Pri tom je

$$\partial_{\vec{u}} f(\overrightarrow{x_0}) = \partial_x f(\overrightarrow{x_0})a + \partial_y f(\overrightarrow{x_0})b = \nabla f(\overrightarrow{x_0}) \cdot \vec{u}, \qquad \vec{u} = (a,b), \quad \sqrt{a^2+b^2} = 1.$$

Napomena

U formulaciji teoreme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Teorema važi i u opštem slučaju $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d \geq 2$.

$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$,

$\overrightarrow{x_0} = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$,

$$\partial_{\vec{u}} f(\overrightarrow{x_0}) = \nabla f(\overrightarrow{x_0}) \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}(\overrightarrow{x_0}) \cdot u_i .$$

Dokaz

Fiksirajmo x_0, y_0, a i $b \in \mathbb{R}$ i posmatrajmo funkciju jedne promenljive

$$g(h) = f((x_0, y_0) + h(a,b)).$$

Izračunajmo izvod funkcije g u tački 0,

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(a,b)) - f(x_0.y_0)}{h} = \partial_{\vec{u}} f(x_0).$$

Sa druge strane, funkciju g možemo posmatrati kao kompoziciju $g = f \circ (x, y)$, gde je

$$x = x(h) = x_0 + ha \quad , \qquad y = y(h) = y_0 + ha .$$

$$g(h) = (f \circ (x, y))(h) = f(x(h), y(h))$$

Primenimo pravilo o izvodu složene funkcije (“chain rule”)

$$\frac{dg}{dh} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} =$$

$$= f_x(x_0 + ha, y_0 + hb)a + f_y(x_0 + ha, y_0 + hb)b\ ,$$

odakle za $h = 0$ dobijamo

$$g'(0) = fx(x_0.y_0)a + fy(x_0, y_0)b\ .$$

□

Primetimo da, ako je

$\vec{u} = (a,\ b),\ \ |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, onda je

$\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta = \angle(\vec{x}^+, \vec{u})$, pa je

$$\partial_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$$

□

3. <u>*Vektor gradijenta*</u>

U prethodnom odeljku smo videli da izvod po pravcu geometrijski predstavlja nagib neke tangente, pa u skladu sa geometrijskom interpretacijom možemo reći da izvod po pravcu govori koliko se brzo funkcija menja u datoj tački po datom pravcu.

Ako su $\vec{u}$ i $\vec{v}$ proizvoljna dva različita nenula vektora i ako je

$$\partial_{\vec{u}} f(\overrightarrow{x_0}) > \partial_{\vec{v}} f(\overrightarrow{x_0}) \quad \Rightarrow \quad tg\theta_1 > tg\theta_2 \quad ,$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\theta_1 > \theta_2 \qquad \theta_1, \theta_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

nagib prve tangente je veći i kažemo da se funkcija f brže menja po pravcu vektora $\vec{u}$.

<u>Definicija 2</u>

Za proizvoljnu diferencijabilnu skalarnu funkciju $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *gradijent u tački* $\overrightarrow{x_0}$ *je vektor*

$$\nabla f(\overrightarrow{x_0}) = \left(f_{x_1}(\overrightarrow{x_0}), \ldots, f_{x_d}(\overrightarrow{x_0}) \right).$$

Dakle, gradijent preslikava skalarno polje (funkciju $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$) u vektorsko polje ($\nabla f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$).

Ako posmatramo skup D svih tačaka $\vec{x}$ u kojima postoji gradijent funkcije f, na tom skupu možemo definisati vektorsku funkciju

$$f : D \to \mathbb{R}^d .$$

Pravac vektora gradijenta u tački $\overrightarrow{x_0}$ je

$$\overrightarrow{u_0} := \frac{\nabla f(\overrightarrow{x_0})}{\left|\nabla f(\overrightarrow{x_0})\right|},$$

i to je pravac po kome se funkcija najbrže menja.

O tome govori sledeća teorema.

Teorema 2

Neka je f diferencijabilna u tački $\overrightarrow{x_0}$. Tada je

$$\max_{\{\vec{u},|\vec{u}|=1\}} \partial_{\vec{u}} f(\overrightarrow{x_0}) = \left|\nabla f(\overrightarrow{x_0})\right|$$

i maksimum se dostiže u vektoru

$$\overrightarrow{u_0} := \frac{\nabla f(\overrightarrow{x_0})}{\left|\nabla f(\overrightarrow{x_0})\right|}.$$

Dokaz

Iz

$$\partial_{\vec{u}}(f(x_0)) = \nabla f(x_0)\cdot\vec{u} = \left|\nabla f(x_0)\right|\left|\vec{u}\right| \cos\alpha = \left|\nabla f\right| \cos\alpha$$

gde je α ugao između ∇f i $\vec{u}$,

vidimo da će $\partial_{\vec{u}} f$ biti najveći za $\cos\alpha = 1$ tj. za $\alpha = 0$ (jer je $\left|\cos\alpha\right| \le 1$),

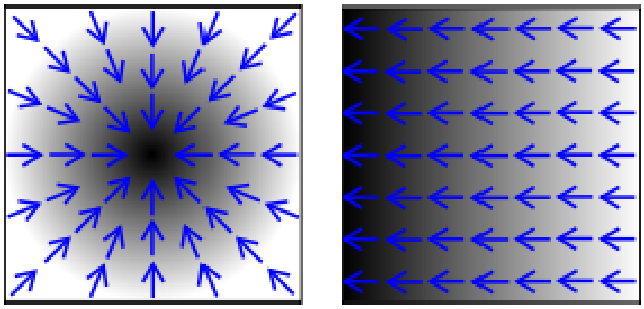
dakle kada su ∇f i $\vec{u}$ paralelni.

$$\max \partial_{\vec{u}} f(x_0) = \left|\nabla f(x_0)\right|\cdot\cos 0 = \left|\nabla f(x_0)\right|$$

□

Napomena

Gradijent se, takođe, može koristiti da se izmeri kako se skalarno polje menja u drugim smerovima (a ne samo u pravcu najveće promene) korišćenjem skalarnog proizvoda vektora. Zamislimo brdo sa najvećim nagibom od 40%. Ako put ide ravno uzbrdo, tada je najstrmiji nagib, takođe, 40%. Ako, međutim, put ide oko brda sa uglom u smeru uspona (vektor gradijenta), tada će imati manji nagib. Na primer, ako je ugao između puta u pravcu uspona, projektovan na horizontalnu ravan, 60°, tada će najstrmiji nagib, koji se proteže duž puta, biti 20%, što se dobilo iz proizvoda 40% puta kosinus od 60°.



Slika 4: Skalarno polje prikazano je crnim i belim područjem, s tim da crna odgovara njegovim većim vrednostima, a njegov odgovarajući gradijent je predstavljen plavim strelicama

3.1 Osobine gradijenta

Navodimo sledeće osobine koje pokazuju kako se može izračunati gradijent skalarnog polja koje je jednako: linearnoj kombinaciji, proizvodu i količniku skalarnih polja, kao i polja koje je dato kao funkcija (ili složena funkcija) nekog drugog polja.
Dakle ako su $u(x, y, z)$ i $v(x, y, z)$ skalarna polja onda važi:

1. $grad\, c = 0$, gde je c konstantno polje

2. $grad\ (c_1 \cdot u + c_2 \cdot v) = c_1 \cdot grad \cdot u + c_2 \cdot grad\, v$

3. $grad\ (u \cdot v) = u \cdot grad\, v + v \cdot grad\, u$

4. $grad \dfrac{u}{v} = \dfrac{v \cdot grad\, v - u \cdot grad\, v}{v^2}$

5. $grad(f(u)) = f'(u) \cdot grad\, u$

6. $grad\, F(u, v) = \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot grad\, u + \dfrac{\partial F}{\partial v} \cdot grad\, v$

Dokazi prethodnih jednakosti slede direktno iz definicje gradijenta i pravila za nalaženje izvoda.

□

Posmatrajmo, već dokazanu, jednakost

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z) = grad\ f \cdot u\,.$$

Možemo izvesti sledeće zaključke:

- Brzina promene skalarnog polja je najveća u pravcu njegovog gradijenta i tada je jednaka upravo intenzitetu gradijenta.
  Naravno, u tačkama u kojima je gradijent jednak nuli i vrednost izvoda u svim pravcima je jednaka nuli.
- Lako se zaključuje da u slučaju kada je

  $$\vec{u} = \pm \frac{grad\ f}{|grad\ f|}$$

  nejednakost

$$0 < \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y, z)$$

zadovoljena ako $grad\ f$ i $\vec{u}$ imaju isti smer. Odnosno, gradijent ima smer u kome vrednost polja raste.

- Neka je ekviskalarna površ polja $f(x, y, z)$ odredjena vrednošću polja u tački (x_0, y_0, z_0). Ako kriva $\{(x(t), y(t), z(t) \mid t \in [a,b]\}$ leži u toj ekviskalarnoj površi i prolazi kroz tačku (x_0, y_0, z_0) onda je (za svako $t \in [a,b]$)

$$f((x(t), y(t), z(t)) = u(x_0, y_0, z_0) \ ,$$

pa zbog toga

$$0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

To znači da je gradijent normalan na vektor tangente svake krive koja leži u ekviskalarnoj površi $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$ i prolazi kroz tačku (x_0, y_0, z_0). Drugim rečima, gradijent u datoj tački je normalan na tangentnu ravan (u toj tački) ekviskalarne površi koja prolazi kroz tu tačku.

3.2 Vektor gradijenta kao normala na površ

Neka je

S: $F(x, y, z) = k$

jednačina površi S (*Slika 5a*).
Uocimo krivu C koja leži na površi S i na krivoj tačku $P(x_0, y_0, z_0)$.
Neka je data parametrizacija krive C,

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad t \in \square, \qquad (x_0, y_0, z_0) = r(t_0).$$

Kako je $C \subset S$, imamo da važi

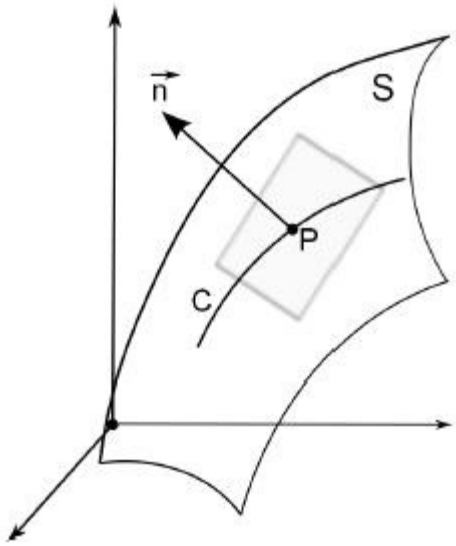
$$F(x(t), y(t), z(t)) = k, \qquad t \in \square.$$

Pod pretpostavkom da su sve funkcije diferencijabilne dobijamo da je

$$F_x((x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + F_y((x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + F_z((x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) = 0,$$

$$\nabla F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0,$$

odakle vidimo da je vektor gradijenta funkcije normalan na tangentni vektor na krivu $C \subset S$, $\vec{r}'$.

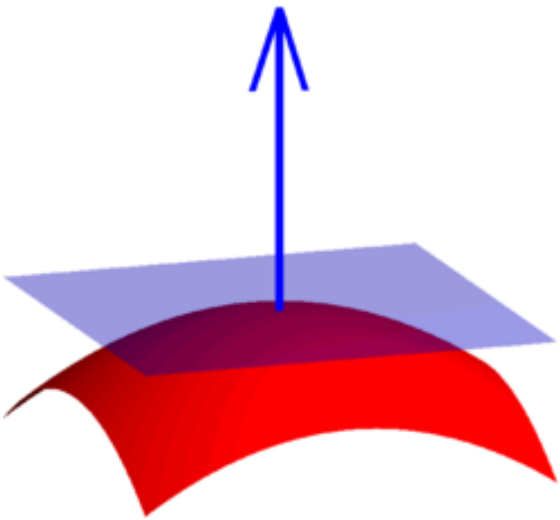


Slika 5a: Vektor gradijenta kao normala na krivu C koja leži na površi S

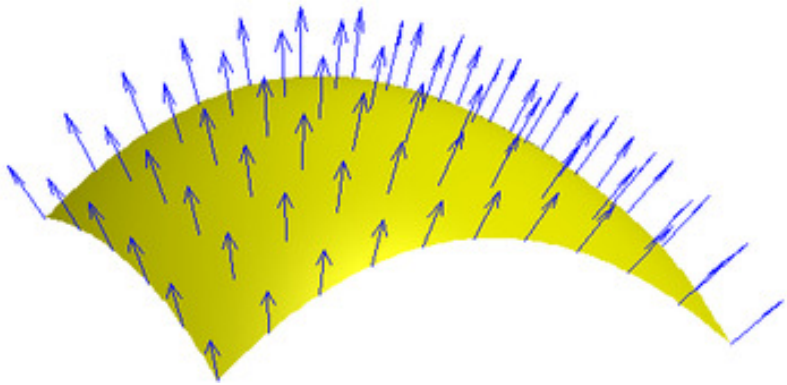
Kako je *C* bila proizvoljna kriva površi *S*, možemo da zaključimo da je vektor gradijenta normalan na svaku krivu koja leži na površi *S (slika 5a)* i prolazi kroz tačku *P*, odnosno na tangentnu ravan u tački *P (slika 5b).*

$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$ - normala u tački *P* na površ *S*

$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ - jedinična normala



Slika 5b: Vektor gradijenta kao normala na tangentnu ravan



Slika 5c: Vektor gradijenta kao normala na površ

3.3 *Gradijent u krivolinijskim koordinatama*

Dva najčešće korištena koordinatna sistema pored Dekartovog su cilindrični i sferni koordinatni sistem.

To su krivolinijski koordinatni sistemi, jer je bar jedna od koordinatnih linija (duž neke koordinatne linije menja se samo jedna od tri koordinate) kriva linija. Podsetimo da se koordinatne linije dobijaju u preseku koordinatnih površi po kojima se dve koordinate menjaju, a jedna je konstantna.

Koordinatne linije i površi u cilindričnom koordinatnom sistemu

Koordinatna linija:	se dobija u preseku koordinatnih površi:
r horizontalna prava	$\varphi = const$ vertikalna ravan $z = const$ horizontalna ravan
φ horizontalna kružnica	$r = const$ vertikalna cilindrična površ $z = const$ horizontalna ravan
z vertikalna prava	$r = const$ vertikalna cilindrična površ $\varphi = const$ vertikalna ravan

Koordinatne linije i površi u sfernom koordinatnom sistemu

Koordinatna linija:	se dobija u preseku koordinatnih površi:
r prava linija	$\varphi = const$ vertikalna ravan $\theta = const$ konusna površ
θ vertikalna kružnica	$r = const$ sferna površ $\varphi = const$ vertikalna ravan
φ horizontalna kružnica	$r = const$ sferna površ $\theta = const$ konusna površ

Tako u cilindričnom koordinatnom sistemu koordinatne linije r i z su prave, ali φ koordinatna linija predstavlja kružnicu paralelnu *(x,y)*- ravni sa centrom koji leži na z osi (*Slika 6a)*. Dok je r-linija sfernog koordinatnog sistema prava, φ i θ-linije su kružnice *(Slika 6b).*
U svakoj tački se mogu zamisliti jedinični vektori-ortovi koordinatnih linija koji imaju pravac tangente na liniju, a smer im ukazuje na smer u kome koordinata raste. Za sva tri

koordinatna sistema je zajedničko da su ortovi međusobno ortogonalni i da formiraju trijedar desne orijentacije.

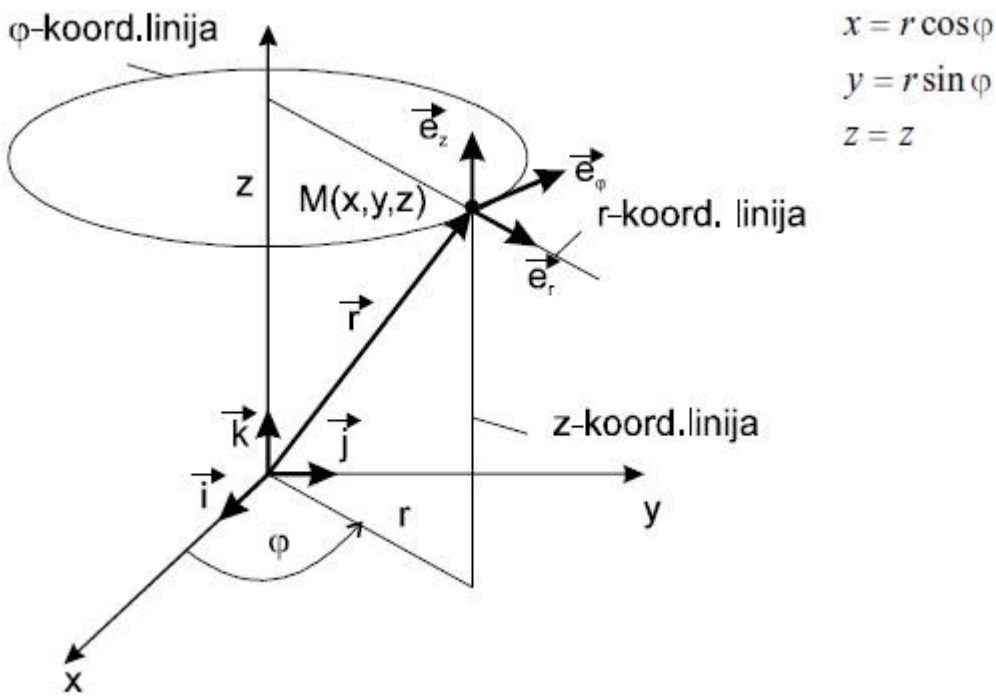
Ako jedinične vektore koordinatnih linija u cilindričnom sistemu označimo sa $\vec{e_r}$, $\vec{e_\varphi}$ i $\vec{e_z}$ *(Slika 6a)* a u sfernom sa $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}$ i $\vec{e_\varphi}$ *(Slika 6b)*, $grad\,U$ u krivolinijskim koordinatama je:

Cilindrične koordinate:

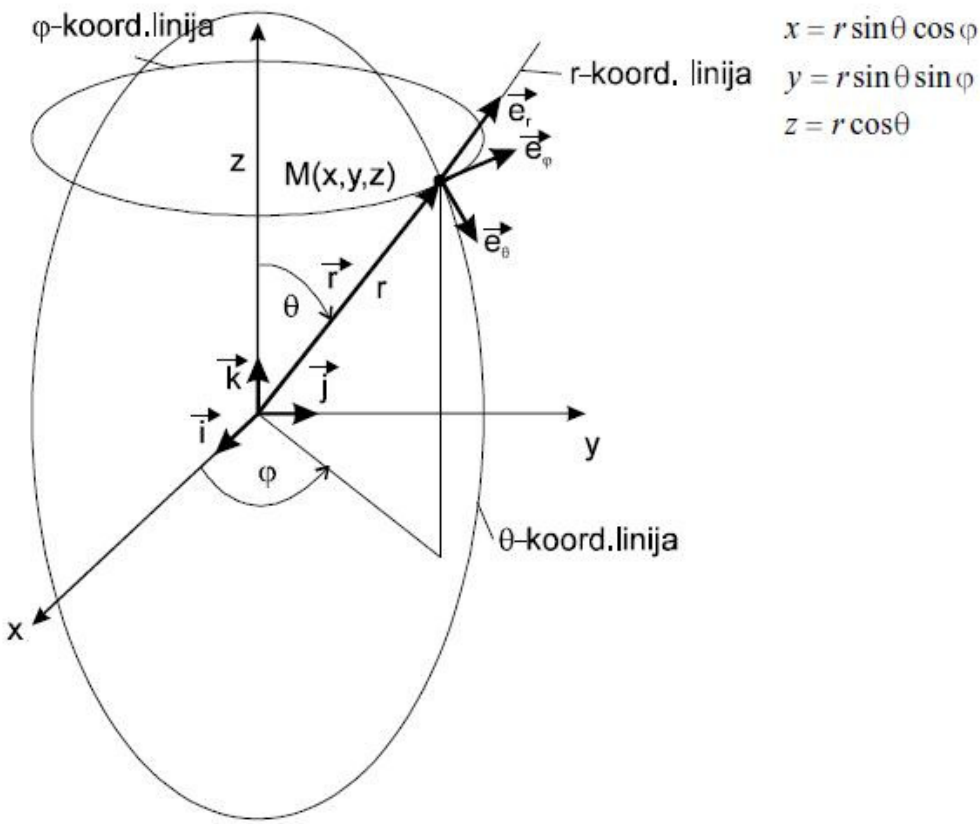
$$grad\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}\vec{e_\varphi} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e_z}$$

Sferne koordinate:

$$grad\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$$



Slika 6a: Cilindrične koordinate



Slika 6b: Sferne koordinate

4. ***Primeri***

Primer 1

Ako je $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) i$ $e_i = (0,.....,1,.....,0)$ jedinični vektor i-te ose, jasno je da je $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, tj, izvod u pravcu vektora e_i je jednostavno parcijalni izvod te funkcije u tački a po i-toj promenljivoj.

Primer 2

Neka je $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. *Pronađimo izvod u pravcu vektora* $\vec{v} = (1,1)$ *i z ose u tački* $(1,1)$.

Moramo izračunati jedinični vekor pravca, to se jednostavno postiže deljenjem vektora $\vec{v}$ njegovim intenzitetom.

$$u = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Sada pretpostavimo da smo ograničili x i y na tačke na pravoj kroz tačku $(1,1)$ u pravcu vektora $\vec{u}$.

Parametarske jednačine ove prave je lako naći.
Neka je $X(x, y)$ proizvoljna tačka na toj pravoj.
Jednačina prave je

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u},$$

ekvivalentno,

$$(x-1, y-1) = t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

tako da je parametarski zapis prave

$$x = 1 + t\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$y = 1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pogledajmo šta se dešava kada biramo tačke na površi sa vrednostima x i y sa ove prave (restrikcija funkcije f).

Prvo, dodaćemo pravu sa gore navedenim parametarskim jednacinama u *(x,y)*- ravan.

Na slici 5a je

$-2 \le x \le 2$, tako da je

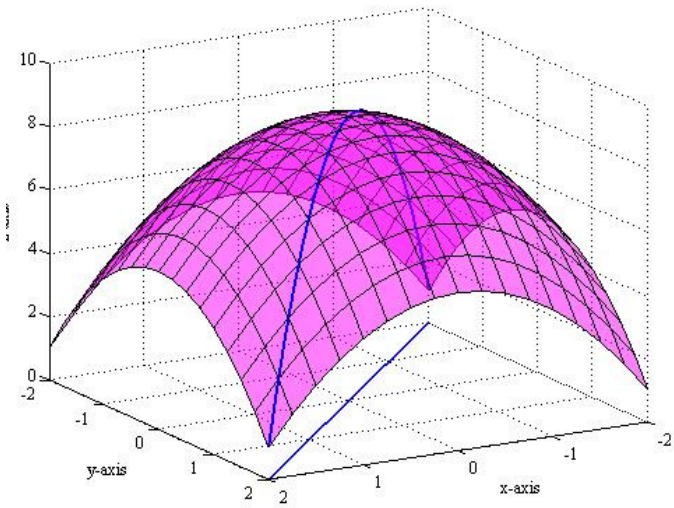
$$-2 \le 1 + t\frac{\sqrt{2}}{2} \le 2$$

koja ima rešenje

$$-\frac{6}{\sqrt{2}} \le t \le \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Sada, šta se dešava kada izračunamo tačke na površi, čije vrednosti *x* i *y* su ograničene na datu pravu?
Imaju iste vrednosti za x i y kao u prethodnom računu, a vrednosti za *z* izračunamo iz $z = 9 - x^2 - y^2$.

Tako dobijamo krivu na površi prikaznu na slici 7a.



Slika 7a: Tačke na površi za restrikciju na pravu kroz tačku $(1,1)$ u pravcu vektora $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Izgleda kao da će izvod u pravcu vektrora $\vec{u}$ u tački $(1,1)$ dati nagib tangente na krivu na površi u tački (1,1). Ali kako izračunati izvod?

$z = f(x, y)$, a x i y su funkcije od t.

Ako zamenimo izraz za x i y dobijemo z kao funkciju jedne promenljive, t.
To znači da je jedini izvod koji ima smisla $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Na osnovu pravila za izvod složene funkcije

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Izračunajmo izvod u tački (1,1):

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

Dakle, za svaku jedinicu za koju se pomeramo u pravcu jediničnog vektora $\vec{u}$ postoji pad u pravcu z-ose za $-2\sqrt{2}$.

Sada dodajmo tangentu na krivu.
Mi želimo da nacrtamo tangentu u tački $(x, y) = (1,1)$. To znači da će prava biti tangenta na površ u tački $P(1,1, f(1,1))$, ili ekvivalentno u tački $P(1,1,7)$.

Da bi našli jednačinu tangente, treba nam vektor u pravcu tangentne linije.
Imajmo na umu, da ako se pomeramo za jedinicu duž linije u *(x,y)*- ravni, pad vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ je dat sa $\frac{\partial z}{\partial t} = -2\sqrt{2}$. Dakle vektor usmeren u pravcu tangente je

$$\vec{w} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}).$$

Neka je $X(x, y, z)$ proizvoljna tačka na tangenti.
Tada je jednačina tangente data sa

$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{w} \quad ,$$

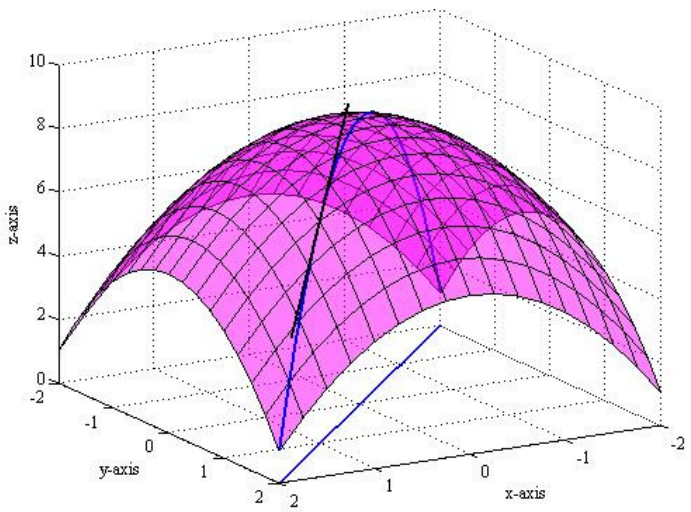
ili ekvivalentno

$$(x-1, y-1, z-7) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right)$$

Parametarske jednačine tangente su:

$$x = 1 + \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y = 1 + \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z = 7 - 2\lambda\sqrt{2}$$

Dodajmo tangentu na crtež.
Krajnji rezultat je prikazan na narednoj slici *(Slika 7b).*



Slika 7b: Tangenta na krivu na površi

Napomena
Prethodni postupak nam pomaže da bolje shvatimo šta geometrijski predstavlja izvod po pravcu. Zadatak smo mogli rešiti na jednostavniji način, koristeći teoremu 2.

$\nabla f = (-2x, -2y)$, $\nabla f(1,1) = (-2,-2)$,

$$\vec{u} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\partial_{\vec{u}} f(1,1) = (-2,-2)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

Primer 3

Analizirajmo ponašanje funkcije $f(x,y)=y^2-x^2$*, u okolini tačke* $(1,1)$.

Pošto je $\partial_x f(x,y)=-2x$ i $\partial_y f(x,y)=2y$,

važi

$\nabla f(1,1)=(-2,2)$ i

$\|\nabla f(1,1)\|_{R^2}=2\sqrt{2}$.

Vektor $\gamma_1=\nabla f(1,1)$ je pod uglom 135° u odnosu na x osu.
U pravcu tog vektora funkcija najbrže raste.
U pravcu γ_2 ortogonalnom γ_1 je $\partial_{\gamma_1} f(1,1)=0$ i na tom pravcu je $f(x,y)$ konstantna funkcija.

Primer 4

Neka je $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$*, pronaći iyvode po svim pravcima u tački (0,0).*

Ova funkcija ima izvode po svim pravcima u tački (0,0). Ako je (a,b) proizvoljan vektor u $\mathbb{R}^2$, tada je

$$\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\frac{ab^2}{a^2+h^2b^4}$$

pa je

$$\partial_{(a,b)} f(0,0)=\begin{cases}\dfrac{b^2}{a} & ,a\neq 0\\ 0 & ,a=0\end{cases}$$

Primetimo da ova funkcija iako ima izvode po svim pravcima u tački $(0,0)$ ipak nije neprekidna u toj tacki, jer je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

Primer 5

Posmatrajmo funkciju $f(x,y)=xe^y$, $\nabla f=(e^y, xe^y)$ i tačku $P_0(2,0)$,

$f(2,0)=2$, $\nabla f(2,0)=(1,2)$.

Formirajmo pravu u (x,y)-ravni kroz tačku $(2,0)$ paralelnu vektoru $(1,2)$

$h \to (2,0)+h(1,2)=(2+h,2h)$

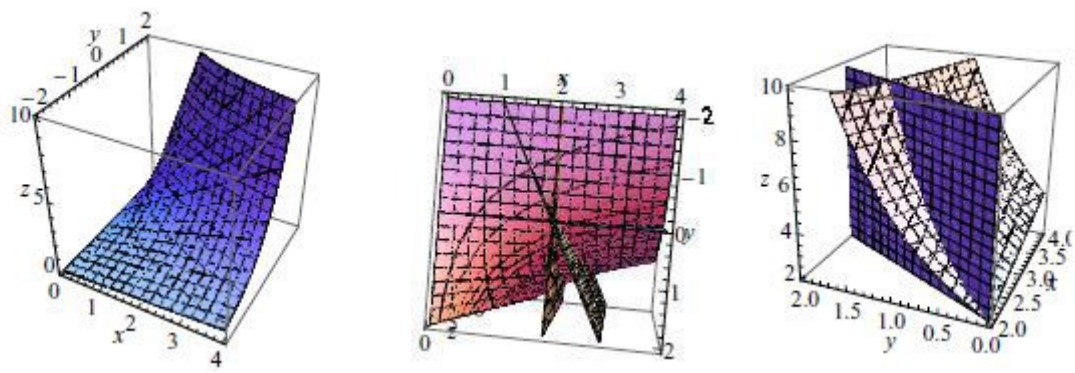
odnosno $y=2x-4$.

Kako je $|\nabla f(2,0)|=\sqrt{5}$, to je vektor pravca gradijenta

$$\vec{u_0}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Dakle,

$$\partial_{\vec{u}}(2,0)=(1,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}=|\nabla f(2,0)|.$$



Slika 8: Na prvoj slici je grafik funkcije f, na drugoj možemo uočiti presek grafika funkcije f i tri ravni $x=2$, $y=0$, $y=2x-4$, dok na trećoj možemo videti krivu u preseku grafika funkcije f i ravni $y=2x-4$. $\partial_{\vec{u}_0}f(2,0)$ je koeficijent pravca tangente na pomenutu krivu.

Primer 6

Naći jediničnu normalu na površ $x^2+y^3+z^2-xy=9$ *u tački* $(0,0,3)$.

$\nabla F=(2x-y,3y^2-x,2z)$,

$\nabla F(0,0,3) = (0,0,6) = \vec{n}$,

$|\vec{n}| = 6$,

$\vec{n_0} = \dfrac{\nabla F}{|\nabla F|} = (0,0,1)$.

$\vec{n_0} = \vec{k}$ $\Rightarrow$ tangenta □ *(x,y)*-ravni.

5. ***Zaključak***

U vektorskoj analizi, gradijent skalarnog polja je vektorsko polje koje pokazuje pravac najvećeg rasta skalarnog polja, te čiji je intenzitet najveća promena u polju.
Jako puno se koristi u fizici i inženjerstvu, posebno u opisivanju elektromagnetnih polja, gravitacionih polja i strujanja fluida.

Fundamentalna teorema matematičke analize za krivolinijske integrale, kaže da se krivolinijski integral kroz gradijentno polje (bilo koje konzervativno vektorsko polje može se izraziti kao gradijent) može izračunati izračunavanjem originalnog skalarnog polja na krajevima krive linije:

$$\phi(q) - \phi(p) = \int_L \nabla \phi d\vec{r}$$

Fundamentalna teorema implicira da su krivolinijski integrali kroz konzervativno vektorsko polje nezavisni. U fizici ova teorema je jedan od načina za definisanje "konzervativne" sile. Stavljajući φ kao potencijal, $\nabla\phi$ je konzervativna sila. Rad konzervativne sile ne zavisi od pređenog puta tela, nego samo od krajnjih tačaka, kako to gornja jednačina i pokazuje.

6. *Dodatak*

Hamiltonov nabla operator
U literaturi se gradijent najčešće zapisuje primenom takozvanog nabla operatora.
Nabla operator se zapisuje kao

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \ ,$$

odnosno

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

a primena operatora ∇ na skalarno polje $u(x, y, z)$ se definiše kao

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Tako da se gradijent polja u zapisuje kao

$$grad\, u = \nabla u \quad .$$

Prethodnom jednakošću je definisana primena operatora ∇ na skalarnu funkciju (polje).

Pojam ekviskalane površi

Definicja
Skup svih tačaka u kojima dato skalarno polje uzima istu vrednost zove se ekviskalarna površ.

Ekviskalarna površ skalarnog polja

$$0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) u(x, y, z)$$

je data jednačinom

$$u(x, y, z) = c$$

gde je c neka konstanta.

Literatura

[1] Perišić, D., Pilipović, S., Stojanović, M., “Funkcije više promenljivih, diferencijalni i integralni račun”, Edicija “Univerzitetski udžbenik”, Novi Sad, 1997.

[2] Gajić Lj., “Predavanja iz analize I”, Novi Sad, PMF, Departman za matematiku, 2006.

[3] dr Dušan Anđelović, dr Zoran Kadelburg, “Matematička analiza II”, zavod za udžbenike i nastavna sredstva. Beograd, 1991.

[4] Stewart J. “Calculus”

[5] Nevenka Adžic, Joviša Žunić, “ Višestruki integrali i teorija polja” Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1998.

[6] Materijal sa predavanja iz Analize 2, na PMF-u u Novom Sadu, kod profesorice dr Jelene Aleksić, 2011/2012.

[7] http://mathworld.wolfram.com