♣♢♡♠

- konačna verzija -

MEROZNAČNA I APROKSIMATIVNA REŠENJA ZAKONA ODRŽANJA

seminarski rad
na drugoj godini
postdiplomskih studija iz matematičke analize
PMF Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku

student: Jelena Aleksić

Komisija za odbranu rada:
1. Prof. Stevan Pilipović
2. Prof. Marko Nedeljkov

Novi Sad, februar 2005.

Sadržaj

"The inspiration for the study of discontinuous solutions comes from the equations of gas dynamics. However, the restriction to scalar *equations with* one *space variable does not cover any realistic models. We shall come closer to the equations of gas dynamics ..., but the situation is far from completely understood."*

Lars Hörmander, u "Lecturs on nonlinear hyperbolic PDE's"

1. Uvod

1.1. **Održiv i neodrživ oblik sistema PDJ.** Radeći sa nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama, nailazimo na dva oblika jednačina, koji su na prvi pogled slični, ali suštinski veoma različiti. Ta različitost odražava se na koncepte rešenja koji se mogu primeniti na jedan, odnosno drugi oblik.

Sistem u *održivom* obliku je

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

gde je f glatka vektorska funkcija, a sistem u *neodrživom* obliku je

$$u_t + g(u)u_x = 0, \tag{2}$$

gde je g glatka matrična funkcija. Tačnije, sistem je u neodrživom obliku sve dok $g(u)$ nije gradijent neke funkcije $f(u)$, što često nije slučaj kada vektorska funkcija $u = (u_1, ..., u_n)$ ima više od jedne komponente, $n \geq 2$.

U prvom seminarskom radu smo videli da u opštem slučaju, Caushyev problem za jednačinu u održivom obliku nema globalno klasično rešenje, čak i ako su početni uslovi glatki. Ako su početni uslovi ograničene funkcije, globalno slabo rešenje se može često konstruisati. Slabo rešenje za održive sisteme konstruiše se u prostoru $C([0, \infty); \mathcal{D}'(\mathbb{R})) \cap$

$L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$, jer prvo možemo formirati nelinearnu funkciju $f(u(x,t))$ kao element iz $L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ i onda diferencirati kao distribuciju. U neodrživom obliku to nije moguće, u najmanju ruku za prekidna rešenja, jer član $g(u)u_x$ uključuje problem množenja distribucija. Ipak u procesu rešavanja neodrživih sistema, korisno je prvo testirati šta se dešava u održivom sistemu kako bismo znali šta da očekujemo u neodrživom. O slabim rešenjima održivih sistema gotovo da se sve zna, [w],[sm]. Rezultati o lokalnim klasičnim rešenjima neodrživih sistema mogu se naći u [k]. Koncept uopštenih rešenja primenjiv je u oba slučaja, ali struktura diferencijalne algebre i činjenica da jednakost implicira asociranost, tj. da je ideal $\mathcal{N}$ (pravi) podskup prostora distribucionih nula-nizova, onemogućuju postojanje prekidnih rešenja, tačnije udarnih talasa. Neodržive sisteme možemo posmatrati u tri oblika:

(a) u algebrama uopštenih funkcija sa jednakosti;

(b) u algebrama uopštenih funkcija gde asociranost zamenjuje jednakost;

(c) u prostoru mere, sa Vol'pert-ovom definicijom superpozicije funkcija.

U prvom slučaju nemamo udarne talase i zato prelazimo na asociranost. Treći koncept sadrži drugi prilaz problemu. Naime, ako je $v \in L^\infty \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^2)$, lokalno integrabilna funkcija čiji su prvi izvodi mere, a h neprekidna funkcija, koristimo $\bar{h}(v)$, Vol'pert-ovu usrednjenu (averaged) verziju superpozicije funkcija h i v koja je jednaka standardnoj superpoziciji funkcija, skoro svuda (u smislu Lebesque-ove mere), tj. $\bar{h}(v(x,t)) = h(v(x,t))$, s.s., ali $\bar{h}(v)$ je merljiva i lokalno integrabilna u odnosu na mere $\partial_x w$ i $\partial_t w$, za sve $w \in BV_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Tako rešavamo problem množenja $h(v)\partial_x w$, naime prelazimo na $\bar{h}(v)\partial_x w$ što je proizvod mera. Dobijamo da je $u \in L^\infty \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap C([0,\infty);\mathcal{D}(\mathbb{R}'))$ rešenje jednačine

$$\partial_t u + \bar{g}(u)\partial_x u = 0, \tag{3}$$

u smislu mera.

1.2. **Usrednjena superpozicija.** Originalna Vol'pert-ova ideja da definiše usrednjenu superpoziciju je sledeća. Neka je μ mera na Borelovom skupovima E u $\mathbb{R}^n$, i $f(x), x \in \mathbb{R}^n$ integrabilna funkcija u odnosu na μ. Tada je proizvod $\lambda := f\mu$ mera definisana na svakom Borelovom skupu E u $\mathbb{R}^n$ na sledeći način:

$$\lambda(E) := \int_E f(x)\, d\mu(x). \tag{4}$$

Ova definicija odgovara uobičajenom množenju funkcija. Naime, svakoj integrabilnoj funkciji $g(x)$ možemo dodeliti meru

$$\mu(E) := \int_E g(x)\,dx.$$

Tada (4) dobija značenje

$$\lambda(E) := \int_E f(x)g(x)\,dx,$$

i u potpunosti se slaže sa uobičajenim množenjem funkcija. Dalje, neka je $f(x)$ neprekidna funkcija i $u(x) = (u_1(x), ..., u_p(x))$ vektorska funkcija definisana na $G \subset \mathbb{R}^n$. Neka je $f(u(x))$ uobičajena superpozicija. Za x kažemo da je *regularna tačka* od $u(x)$ i *a definicioni vektor*, ako postoji

$$u_a(x) := \lim_{y\to x,\, y\in\Pi_a(x)} u(y),$$

gde je $\Pi_a(x) = \{y : (y - x, a) \geq 0\}$. U tom slučaju možemo definisati usrednjenu superpoziciju kao

$$\begin{aligned}\bar{f}(u(x)) &= \int_0^1 f(u_a(x)t + u_{-a}(x)(1-t))\,dt \\ &= \int_0^1 f\Big(\big(\lim_{y\to x,\, y\in\Pi_a(x)} u(y)\big)t + \big(\lim_{y\to x,\, y\in\Pi_{-a}(x)} u(y)\big)(1-t)\Big)\,dt.\end{aligned}$$

Više o ovoj teoriji može se naći u [vh]. Za naš rad, potrebna nam je Vol'pert-ova usrednjena superpozicija u dva slučaja:

1. Ako je v neprekidna funkcija, onda se usrednjena superpozicija svodi na uobičajenu superpoziciju funkcija, tj. $\bar{h}(v) = h(v)$, a proizvod $\bar{h}(v)\partial_x w$ je proizvod mere i neprekidne funkcije.
2. Ako su v, w funkcije skoka, tj.

$$v(x,t) = v_l + (v_r - v_l)H(x - ct),$$
$$w(x,t) = w_l + (w_r - w_l)H(x - ct),$$

tada je proizvod

$$\bar{h}(v)\partial_x w = \int_0^1 h(v_l + \alpha(v_r - v_l))\,d\alpha \;\cdot\; (w_r - w_l)\delta(x - ct).$$

1.3. **Koncepti rešenja.** Dosadašnja priča navodi da posmatramo dva koncepta rešenja: koncept meroznačnih rešenja, za koji je najzaslužniji R.DiPerna[1] , i koncept aproksimativnih rešenja u algebrama uopštenih funkcija J.F.Colombeau-a. Ova dva koncepta su ekvivalentna u smislu

[1]Ipak moramo pored DiPerne navesti i još neka imena kao što su Tartar, Ball, Murat...

da svako rešenje, ograničeno na određeni način, u smislu jednog od dva koncepta, indukuje rešenje u drugom konceptu. Kako smo u prvom seminarskom radu proučili aproksimativna rešenja, cilj ovog seminarskog rada je proučavanje mv-rešenja i uspostavljanje relacija između ova dva koncepta rešenja.

Neka je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Posmatrajmo skalarni zakon održanja

$$div\, f(u) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0, \tag{5}$$

gde je $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ glatka funkcija i $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Takođe posmatrajmo i perturbovanu jednačinu (5),

$$div\, f(u) = \varepsilon L(u), \tag{6}$$

gde je L linearan parcijalni diferencijalni operator sa glatkim koeficijentima i $\varepsilon > 0$. Jednačina (5) biće hiperbolični zakon održanja, a (6) njegova parabolična aproksimacija. Za njihova rešenja zahtevaćemo da budu ograničena u odgovarajućem konceptu.

Meroznačna (kraće mv-) rešenja koristiće za rešavanje problema konvergencije u problemu (6). Najvažnije osobine su sledeće:

(i) Ako je $u \in L^\infty(\Omega)$ slabo rešenje jednačine (5), tada je familija Dirac-ovih mera $\{\delta_{u(x)}\}_{x\in\Omega}$ meroznačno rešenje.

(ii) Ako je $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ograničen niz rešenja jednačine (6), tada je asocirana Young-ova mera mv-rešenje.

Uopštena rešenja su rešenja u diferencijalnim algebrama koje sadrže distribucije i kao podalgebru imaju algebru glatkih funkcija. Mi ćemo raditi sa verzijom $\mathcal{G}_s(\Omega)$ čiji elementi su klase ekvivalencije nizova glatkih funkcija na Ω. Kako su predstavnici elemenata iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$ nizovi glatkih funkcija, u $\mathcal{G}_s(\Omega)$ jednačina (5) može da se interpretira kao

$$\sum_{j=1}^{n} f_j'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \tag{7}$$

Svi izvodi i operacije su u smislu $\mathcal{G}_s(\Omega)$. $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ koje zadovoljava jednačinu (7) zvaćemo *jako rešenje.* Napomenimo još da ovaj koncept funkcioniše i za neodržive sisteme. Ipak, ovaj koncept ima i svojih mana. Naime, ova stroga formulacija ne dozvoljava prekidna rešenja. Razlog tome je što različite održive forme od (7) mogu biti ekvivalentne u $\mathcal{G}_s(\Omega)$, a mogu implicirati različite uslove skoka (uslove na

liniji prekida). Iz tih razloga se koristi asociranost, $\approx$, umesto jednakosti. Naime, dva elementa u, v iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$ su asocirani ako i samo ako razlika nizova njihovih predstavnika $u_\varepsilon - v_\varepsilon$ konvergira slabo ka nuli. To je nova relacija ekvivalencije, grublja od one koja definiše faktor algebru $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Dve distribucije su asocirane u $\mathcal{G}_s(\Omega)$ ako i samo ako su jednake.

$u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ koje zadovoljava jednačinu (7) u kojoj je jednakost zamenjena asociranošću, zvaćemo *aproksimativno rešenje,* tj. $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ je aproksimativno rešenje ako zadovoljava

$$\sum_{j=1}^{n} f_j'(u)\frac{\partial u}{\partial x_j} \approx 0. \tag{8}$$

Svako jako rešenje je aproksimativno. Ako je $u \in L^\infty$ slabo rešenje jednačine (5), kao element iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$, u je aproksimativno rešenje. Ako niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ koji je predstavnik nekog $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, zadovoljava (6), onda je u aproksimativno rešenje.

J.F.Colombeau i M.Oberguggenberger pokazali su ekvivalenciju ova dva koncepta rešenja u sledećem smislu:

(1) Ako je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ aproksimativno rešenje, u određenom smislu, tada je Young-ova mera koja se dobija iz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ predstavnika od u, mv-rešenje za (5).

(2)Ako je μ mv-rešenje za (5), tada se može naći niz glatkih funkcija, koji ima μ kao Young-ovu meru, a koji je predstavnik uopštene funkcije $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, tako da je u aproksimativno rešenje.

Napomenimo da, u ovom kontekstu, do sada nisu posmatrani početni problemi zakona održanja, kao ni pitanje jedinstvenosti. Takođe poboljšanje gore pomenutih rezultata može se odvijati u smeru zamene L^∞-ograničenja, L^p-ograničenjima, uz pojačanje uslova rasta funkcije f.

1.4. **Pregled rada.** Sada ćemo ukratko opisati sadržaj ovog seminarskog rada.

Potsetimo se, pojam *zakon održanja* govori da je brzina promene totalne količine supstance sadržane u nekom fiksiranom domenu G jednaka njenom fluksu na rubu domena G. Ako gustinu te supstance označimo sa u, fluks sa f, zakon održanja je jednačina

$$\frac{d}{dt}\int_G u dx = -\int_{\partial G} f \cdot n dS, \tag{9}$$

gde je n spoljašnja normala na G, a dS element površine ∂G. Kada primenimo teoremu o divergenciji na desnu stranu jednačine (9) i diferenciramo pod integralom sa leve strane, dobijamo

$$\int_G u_t dx = -\int_G div f dx,$$

odnosno,

$$\int_G (u_t + div f) dx = 0.$$

Ako su svi parcijalni izvodi od u i f neprekidni, dobijamo zakon održanja u divergentnom obliku

$$u_t + div f = 0.$$

Zakon održanja i njegove regularizacije

Sistem u *održivom* obliku je

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{10}$$

gde je f glatka vektorska funkcija. Najčešće pretpostavljamo da je sistem hiperboličan, tj. da ∇f ima n različitih realnih karakterističnih korena. U kontekstu o kom ćemo pričati, takođe je moguće posmatrati i Caushy-jev problem za sistem mešivitog tipa (sistem koji menja tip iz hiperboličnog u eliptični).

Parabolična regularizacija (difuzioni proces) sitema (10) je

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}. \tag{11}$$

Regularizacija trećeg reda (disperzioni proces) sitema (10) je

$$u_t + f(u)_x = \delta u_{xxx}. \tag{12}$$

Napomenimo da sa desne strane jednakosti mogu da se nađu i opštiji operatori sa više parametara.

Obeležimo sa $u(x,t)$, $u(x,t;\varepsilon)$, $u(x,t;\delta)$ redom rešenja od (10), (11), (12).

Zašto uvodimo meroznačna rešenja?

Cilj nam je rešiti problem singularnih limesa rešenja regularizacija zakona održanja, odnosno odgovoriti na sledeća pitanja:

1. Kada i kako nizovi rešenja $u(x,t;\varepsilon)$, $u(x,t;\delta)$ (ili bar neki njihov podniz) konvergiraju, kada parametar ε, odnosno δ, teži ka nuli.
2. Da li dobijeni limes rešava jednačinu (10), tj. da li je $\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t;\varepsilon) = u(x,t)$, odnosno $\lim_{\delta\to 0} u(x,t;\delta) = u(x,t)$, u određenoj topologiji.

Primeri

Ovaj problem javlja se već u skalarnim jednačinama.

1. Burger-ova jednačina, nula-difuzioni limes

U ovom primeru $u(x,t;\varepsilon)$ su rešenja parabolične jednačine

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = \varepsilon u_{xx},$$

gde je $\varepsilon > 0$ tzv. difuzioni parametar. Kada on teži nuli, rešenja $u(x,t;\varepsilon)$ konvergiraju ka $u(x,t)$, rešenju hiperbolične jednačine

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0.$$

Postojanje tzv. nula-difuzionig limesa dobija se klasičnom teorijom kompaktnosti ili novijom teorijom kompenzovane kompaktnosti. Ovaj problem je rešen za sve skalarne jednačine u jednoj prostornoj dimenziji.

2. KdV jednačina, nula-disperzioni limes

U ovom primeru $u(x,t;\delta)$ su rešenja jednačine

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = \delta u_{xxx},$$

gde je $\delta > 0$ tzv. disperzioni parametar. Kada $\delta \to 0$, pojavljuju se oscijacije (skokovi), te rešenja $u(x,t;\delta)$ neće konvergirati ka rešenju hiperbolične jednačine $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$. Lax i Levermore su pokazali da rešenja $u(x,t;\delta)$ konvergiraju jako ka $u(x,t)$, do trenutka kada se pojave udarni talasi (šokovi). U prisustvu udarnih talasa, konvergencija

postoji samo u slaboj topologiji i limes je rešenje malo modifikovane jednačine [ll].

Kako se uvode mv-rešenja?

Posmatramo preslikavanje

$$(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ \mapsto \nu_{(x,t)} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

gde je $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ prostor probabilističkih mera. Ovakvo preslikavanje zove se uopšteno ili meroznačno rešenje ako jednačina

$$\overline{u}_t + \overline{f}_x = 0 \tag{13}$$

važi u smislu distribucija. Tada kažemo da očekivana vrednost vektorskog polja (u, f) ima divergenciju nula. Oznaka $\overline{g}$, za $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ je takođe očekivana vrednost, tj.

$$\overline{g} = \overline{g}(x,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda) d\nu_{(x,t)},$$

što je kompozicija neprekidne funkcije i mere, odn. distribucija. Stoga jednačina (13) znači da za sve test funkcije $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$,

$$0 = \left\langle \overline{u}_t + \overline{f}_x, \phi \right\rangle = -\left\langle \int_{\mathbb{R}^n} \lambda d\nu_{(x,t)}, \phi_t \right\rangle - \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda) d\nu_{(x,t)}, \phi_{xx} \right\rangle = 0.$$

Kako se u ovom kontekstu interpretiraju klasična distributivna rešenja?

Klasična distributivna rešenja $u(x,t)$ sistema (10) identifikuju se sa preslikavanjem koje slika (x,t) u tzv. Dirac-ovu meru u $u(x,t)$, tj.

$$(x,t) \mapsto \delta_{u(x,t)}.$$

Ova interpretacija ima smisla, jer je u tom slučaju

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda \, d\delta_{u(x,t)} = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda \delta_{u(x,t)} \, d\lambda = u(x,t)$$

odnosno,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda) \, d\delta_{u(x,t)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda) \delta_{u(x,t)} \, d\lambda = f(u(x,t)).$$

Da li postoji takvo rešenje?

Teorema 1. [Young] Za svaki L^∞-ograničen niz funkcija u_l, postoji u_k, podniz niza u_l i familija probabilističkih mera

$$\nu_y \in Prob(\mathbb{R}^n), \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad supp\, \nu_y \subset L(O;r),$$

(sa $L(O;r)$ ćemo obeležiti loptu sa centrom u 0 poluprečmika r) tako da za sve funkcije $g \in C(\mathbb{R}^n)$ granična vrednost

$$w^* - \lim_{k\to\infty} g(u_k(y))$$

postoji, i jednaka je očekivanoj vrednosti funkcije g,

$$w^* - \lim_{k\to\infty} g(u_k(y)) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\, d\nu_y =: \bar{g}(y)\,,$$

za skoro sve $y \in \mathbb{R}^n$.

Dakle, za svaku tačku $y \in \mathbb{R}^n$, imamo probabilističku meru ν_y na $\mathbb{R}^n$, koja opisuje konvergenciju niza $u_k(y)$.

Iz teoreme dobijamo da ako je aproksimacioni proces za sistem (10) stabilan u L^∞, imamo uopšteno rešenje.

Ova teorema dokazana je na str. 24.

Problem klasifikacije rešenja

Kada dobijemo rešenja, nastaje problem odabiranja fizički relevantnih rešenja. Stoga i u ovom konceptu, imamo uslov dopustivosti. Među klasičnim distributivnim rešenjima birali smo one koji zadovoljavaju entropijske uslove. Potsetimo se, funkciju $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, klase $\mathcal{C}^1$, zovemo entropijom sistema (10) sa odgovarajućim entropijskim fluksom $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ako važi

$$D\eta(u)Df(u) = Dq(u),$$

gde D označava totalni izvod, a distributivno rešenje je dopustivo ako važi

$$(\eta(u))_t + (q(u))_x \leq 0,$$

u smislu distribucija, za sve konveksne entropijske parove (η, q). Entropijski par je konveksan, ako je entropija konveksna funkcija.

Ovde je taj uslov za nijansu komplikovaniji, naime ako uopšteno rešenje dopušta sve konveksne entropijske parove, ono mora biti Dirac-ova mera. Preciznije, neka je (η, q) entropijski par sistema (10). Ako

$$\overline{\eta}_t + \overline{q}_x \leq 0 \tag{14}$$

važi za sve konveksne entropijske parove, tada ćemo pokazati da je

$$\nu_{(x,t)} = \delta_{u(x,t)}.$$

Za skalarni zakon održanja, proizvoljnu funkciju možemo uzeti za entropiju i zatim naći adekvatan fluks. Tako da ako rešavamo skalarni problem, nejednakost (14) treba da važi za sve konveksne funkcije η. Za sisteme od dve jednačine postoji široka klasa konveksnih entropija, dovoljno jaka da redukuje Young-ovu meru na Dirac-ovu meru. Za sisteme od tri ili više jednačina, entropija retko postoji, uglavnom za jednačine mehanike kontinuma, tako da nam, u tom slučaju, treba alternativna formulacija.

Uopštena verzija Lax-ove entropijske nejednakosti (14) važi za sve slabe limese difuzionog procesa (11). Ako je $u(x, t; \varepsilon)$ uniformno ograničen u L^∞ niz rešenja sistema (11), tada se lako može proveriti da (14) važi za sve konveksne entropije, jer je $\nu_{(x,t)}$ Young-ova mera asocirana sa nekim podnizom niza $u(x, t; \varepsilon)$. Ali, treba dalje pokazati da je ν Dirac-ova mera i da ona odgovara nula-difuzionom limesu. Rezultati o egzistenciji i jedinstvenosti završavaju poglavlje o meroznačnim rešenjima.

Treće poglavlje počinje kratkim pregledom teorije Colombeau-ovih specijalnih uopštenih funkcija, u kojima dobijamo koncept aproksimativnih rešenja. Poglavlje, kao i ceo rad, završavamo izučavanjem ekvivalencije koncepta aproksimativnih i meroznačnih rešenja.

* * * * * *

Napomenimo još da smo sa $\square$ obeležavali kraj dokaza, a sa $\Diamond$ kraj primera.

"Weak convergence is teribly behaved with respect to nonlinearities and yet such weak convergence is apparently the best we can achive."

2. Meroznačna rešenja

2.1. **Slaba i jaka konvergencija.** Jedna od najvećih teškoća u rešavanju nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina leži u sledećem problemu: Kada dobijemo niz aproksimacija rešenja, potrebno nam je mnogo apriornih ocena da bismo obezbedili konvergenciju tog niza, ili nekog njegovog podniza, ka rešenju.

2.1.1. *Slaba i slaba* konvergencija na Banahovom prostoru i njegovom dualu.* Pre no što počnemo pisati o tipovima konvergencija, potsetimo se klasičnih rezultata funkcionalne analize o slaboj konvergenciji. Na Banahovom prostoru X, čiji je dual X', slabu topologiju $\sigma(X, X')$ definišemo preko familije seminormi $\{p_{x'} : x' \in X'\}$ date sa $p_{x'}(x) = |(x, x')|$. Ako je dual X' separabilan (ima prebrojiv gust skup), onda je ova topologija metrizabilna na ograničenim skupovima u X. Slaba konvergencija niza x_n ka x znači

$$(x_n, x') \to (x, x'), \quad \forall x' \in X'.$$

Na dualu X' definišemo slabu* topologiju $\sigma(X', X)$ preko familije seminormi $\{q_x : x \in X\}$ date sa $q_x(x') = |(x', x)|$. Ako je X separabilan, onda je ova topologija metrizabilna na ograničenim skupovima u X' i slaba* konvergencija niza x'_n ka x' znači

$$(x, x'_n) \to (x, x'), \quad \forall x \in X.$$

Jedinična lopta u X' je slabo* kompaktna u ovoj topologiji.

2.1.2. *Prostori $L^p(\Omega)$, $\mathcal{M}(\Omega)$, $\mathcal{M}_b(\Omega)$, $\mathcal{C}_b(\Omega)$.* Mi ćemo posmatrati prostore $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{M}(\Omega)$, prostor Radon-ovih mera, gde je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ snabdeven Lebesque-ovom merom. Dual prostora $L^p(\Omega)$ je izometričen prostoru $L^q(\Omega)$, $1/p+1/q = 1$. Iz ograničenog

niza f_n u $L^p(\Omega)$ možemo izdvojiti podniz f_m koji slabo (slabo*) konvergira ka nekom f, ako je $1 < p < \infty$ ($p = \infty$), tj.

$$\int_\Omega f_m g\, dx \to \int_\Omega f g\, dx, \quad \forall g \in L^q(\Omega).$$

Prostor $L^1(\Omega)$ se može izometrički potopiti u $\mathcal{M}_b(\Omega)$, prostor konačnih mera, koji je dual prostora $\mathcal{C}_b(\Omega)$, prostora neprekidnih ograničenih funkcija sa supremum normom. Iz ograničenog niza f_n u $L^1(\Omega)$ možemo izdvojiti podniz f_m koji slabo* konvergira ka meri μ, tj.

$$\int_\Omega f_m g\, dx \to \langle \mu, g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{C}_b(\Omega).$$

Prostor mera $\mathcal{M}(\Omega)$ nije Banahov, ali za svaki kompaktni $K \subset\subset \Omega$, ako sa $X_K = \mathcal{C}^0_K(\Omega)$ obeležimo prostor neprekidnih funkcija sa nosačem u K i supremum normom, tada je $\mathcal{M}(\Omega)$ podprostor X'_K i možemo koristiti slabu* topologiju na X'_K. Tada iz niza ograničenog u svim X'_K izdvajamo podniz koji je slabo* konvergentan u X'_K, za prebrojivo mnogo kompaktnih skupova čija je unija Ω.

Na prostoru $\mathcal{M}(\Omega)$ slaba konvergencija definiše se na sledeći način:

$$\mu_k \rightharpoonup \mu \iff \big(\forall g \in \mathcal{C}_b(\Omega)\big) \int_\Omega g\, d\mu_k \to \int_\Omega g\, d\mu,\ k \to \infty.$$

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2. *Ako $\mu_k \rightharpoonup \mu$ slabo u $\mathcal{M}(\Omega)$ onda je*

$$\limsup \mu_k(K) \le \mu(K)$$

za sve kompaktne skupove $K \subset\subset \Omega$, i

$$\mu(V) \le \liminf \mu_k(V)$$

za sve otvorene skupove $V \subset \Omega$.

Pod pretpostavkom da je niz aproksimativnih rešenja $\{u_\varepsilon\}$ uniformno (po ε) ograničen u L^∞ imamo ekvivalenciju sledećih konvergencija.

1. Ekvivalentne slabe konvergencije su:
   -slaba* konvergencija u L^∞,
   -slaba konvergencija u L^p, $1 < p < \infty$,
   -konvergencija u smislu distribucija.

U ovom slučaju, pričaćemo o *slaboj konvergenciji*, tj. lokalnoj konvergenciji ocena

$$u = w - \lim u_\varepsilon \iff \int_K u(y)\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_K u_\varepsilon(y) dy,$$

za sve $K \subset\subset \Omega$. Jedan od načina da obezbedimo egzistenciju podniza koji konvergira u odgovarajućoj slaboj topologiji je da dokažemo da za niz $\{u_\varepsilon\}$ važi tzv. lokalna L^p-kontrola

$$\int_k |\{u_\varepsilon\}|^p \, dy \leq const(K), \ K \subset\subset \Omega,$$

koja se lako dobija iz principa maksimuma. Napomenimo još da je u gore pomenutim topologijama jedinična lopta kompaktna, tako da su one dovoljno slabe da obezbede kompaktnost, ali isuviše slabe ba garantuju neprekidnost nelinearne funkcije.

2. Ekvivalentne jake konvergencije su:
   -konvergencija u jakoj topologiji prostora L^1_{loc},
   -konvergencija u jakoj topologiji prostora L^p_{loc}, $1 < p < \infty$.

U ovom slučaju, pričaćemo o *jakoj konvergenciji*, tj. konvergenciji po normi

$$u = s - \lim u_\varepsilon \iff \int_K |u(y) - u_\varepsilon(y)| \, dy = 0,$$

za sve $K \subset\subset \Omega$.

Ako je niz $\{u_\varepsilon\}$ konvergentan u jakoj topologiji i ako je funkcija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ neprekidna, tada važi

$$g(s - \lim u_\varepsilon) = s - \lim g(u_\varepsilon),$$

što omogućava da jaki limes aproksimativnih rešenja bude ponovo rešenje.

S druge strane, ako niz $\{u_\varepsilon\}$ konvergira u slaboj topologiji, u opštem slučaju, ako nemamo dodatne pretpostavke, imamo

$$g(w - \lim u_\varepsilon) \neq w - \lim g(u_\varepsilon),$$

(v. primere 1, 2 i 3). Stoga je veoma bitno naći pretpostavke pod kojima ćemo iz slabe konvergencije, dobiti jaku. Preciznije, u teoriji zakona održanja pojavljuje se sledeći problem: Za dat slabo konvergentni niz aproksimativnih rešenje, videti pod kojim uslovima će taj niz imati jako konvergentan podniz. Specifičan problem je odrediti uslove pod kojima se jaka konvergencija može dobiti iz slabe ako nemamo uniformne ocene izvoda. Naime, ako dokažemo ili pretpostavimo, da su izvodi od u_ε uniformno ograničeni, iz slabe konvergencije odmah dobijamo jaku. Npr. ako u_ε slabo konvergira ka u i ako su gradijenti uniformno ograničeni u L^p_{loc},

$$\int_K |\nabla u_\varepsilon|^p \, dy \leq const.,$$

onda u_ε jako konvergira ka u. Uopšte, slaba konvergencija i kompaktnost u strogoj topologiji, impliciraju jaku konvergenciju.

Za dobijanje jake iz slabe konvergencije koristi se Young-ova mera i Tartar-Murat-ova teorema o kompenzovanoj (nadoknađenoj) kompaktnosti.

Primer 1. *Daćemo primere koji pokazuju zašto, ako je* $f = w^* - lim f_n$, *ne mora da važi i da je* $\Phi(f) = w^* - lim\Phi(f_n)$. *Krenućemo od jednostavnijeg primera koji je dat u* [e2]. *Mi ćemo ga dopuniti dokazima konvergencija koje su samo pomenute u predhodno citirsnoj knjizi.*

Dakle, neka su dati brojevi $a < b$ *i* $0 < \lambda < 1$, *za koje važi*

$$\Phi(\lambda a + (1-\lambda)b) \neq \lambda\Phi(a) + (1-\lambda)\Phi(b),$$

i neka je $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. *Formirajmo funkcije* f_k *na sledeći način:*

$$f_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} a, & \frac{j}{k} \leq x \leq \frac{j+\lambda}{k},\ j = 0, ..., k-1 \\ b, & inače \end{array} \right\}.$$

Pokažimo da $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f \equiv \lambda a + (1-\lambda)b$, *u* L^∞. *Neka je* g *proizvoljna funkcija u* $L^1(\Omega)$. *To znači da je* $\int_\Omega |g(x)|\,dx \leq M$, *za neko* $M > 0$, *i za svaki* $K \subset \Omega$, $\int_K |g(x)|\,dx \leq m(K)M_K, M_K > 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f_k g\,dx \right| \leq & |a| \left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+\lambda}{k}} g(x)\,dx \right| + |b| \left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j+\lambda}{k}}^{\frac{j+1}{k}} g(x)\,dx \right| \\ \leq & |a|\, M_1 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda}{k} + |b|\, M_2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1-\lambda}{k} \\ \leq & M_3\,(a\lambda + b(1-\lambda)), \end{aligned}$$

gde su $M_j,\ j = 1,2,3$ *pozitivne konstante date sa*

$$M_1 = \max\left\{ M_{\alpha_j} \ :\ \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+\lambda}{k}} |g(x)|\,dx \leq m\left(\left[\frac{j}{k}, \frac{j+\lambda}{k}\right]\right) M_{\alpha_j},\ j = 0, ..., k-1, \right\}$$

$$M_2 = \max\left\{ M_{\beta_j} \ :\ \int_{\frac{j+\lambda}{k}}^{\frac{j+1}{k}} |g(x)|\,dx \leq m\left(\left[\frac{j+\lambda}{k}, \frac{j+1}{k}\right]\right) M_{\beta_j},\ j = 0, ..., k-1 \right\}$$

i

$$M_3 = \max\left\{M_1,\ M_2\right\}.$$

Sada posmatrajmo kompoziciju $\Phi(f_k)$. *Ona se slično ponaša kao* f_k. *Naime*

$$\Phi(f_k)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \Phi(a), & \frac{j}{k} \leq x \leq \frac{j+\lambda}{k},\ j = 0, ..., k-1 \\ \Phi(b), & inače \end{array} \right\},$$

i slično pokažemo da $\Phi(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\Phi} \equiv \lambda\Phi(a) + (1-\lambda)\Phi(b) \neq \Phi(f)$. $\Diamond$

Sledeći primer je malo komplikovaniji, ali će nam trebati kasnije kada budemo eksplicitno konstruisali Young-ovu meru.

Definicija 1. *Niz indukovan skaliranjem periodične funkcije* v *je niz funkcija konstruisanih na sledeći način:*

$$u_k(x) \equiv v(kx).$$

Poznat je sledeći rezultat.

Lema 1. *Ako je* v *periodična funkcija sa periodom* p*, onda niz indukovan skaliranjem funkcije* v *slabo* konvergira u* L^∞ *ka konstanti*

$$\frac{1}{p}\int_0^p v(s)\,ds.$$

Dokaz.[2] Dokaz ćemo izvesti u tri koraka. Prvo ćemo pokazati da ako za test funkciju $\psi \in L^1$ izaberemo karakterističnu funkciju intervala $[0,p]$, dobijamo jednakost

$$\left\langle v(kt)\,,\,\psi(t)\right\rangle = \left\langle \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\,,\,\psi(t)\right\rangle. \tag{15}$$

Neka je ψ karakteristična funkcija intervala $[0,p]$, tj. $\psi(x) = \chi_{[0,p]}(x),\ x \in \mathbb{R}$. Tada važi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} v(kt)\psi(t)\,dt &= \int_0^p v(kt)\,dt = \int_0^{kp} v(x)\,\frac{dx}{k}\\
&= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\int_0^p v(x)\,dx = \frac{1}{k}k\int_0^p v(x)\,dx\\
&= \int_0^p v(x)\,dx = \frac{1}{p}\underbrace{\int_0^p \psi(t)\,dt}_{p}\int_0^p v(x)\,dx\\
&= \frac{1}{p}\int_{+\infty}^{-\infty}\left(\int_0^p v(x)\,dx\right)\psi(t)\,dt\\
&= \left\langle \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\,,\,\psi(t)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{16}$$

U drugom koraku, za test funkcije biramo karakteristične funkcije intervala oblika $[0,b]$, gde je b proizvoljan pozitivan broj, i pokazujemo

[2]Kako nismo mogli naći dokaz ove leme u literaturi, iznosimo naš dokaz i verujemo da postoji i jednostavniji način da se ova lema pokaže.

sledeću konvergenciju:

$$\left\langle v(kt)\,,\,\psi(t)\right\rangle \longrightarrow \left\langle \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\,,\,\psi(t)\right\rangle,\ k\to\infty. \tag{17}$$

Neka je ψ karakteristična funkcija intervala $[0,b]$, tj. $\psi(x)=\chi_{[0,b]}(x),\ x\in\mathbb{R}$. Tada važi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(kt)\psi(t)\,dt=\int_0^b v(kt)\,dt=\int_0^{kb} v(x)\,\frac{dx}{k}. \tag{18}$$

Za fiksirano k (b i p su pozitivne konstante), postoji jedinstven prirodan broj r takav da je

$$rp\le kb<(r+1)p. \tag{19}$$

Sada nastavljamo niz jednakosti (18):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} v(kt)\psi(t)\,dt=&\int_0^b v(kt)\,dt=\int_0^{kb} v(x)\,\frac{dx}{k}\\ =&\frac{1}{k}\int_0^p v(x)\,dx+...+\frac{1}{k}\int_{(r-1)p}^{rp} v(x)\,dx+\frac{1}{k}\int_{rp}^{kb} v(x)\,dx\\ =&\frac{r}{k}\int_0^p v(x)\,dx+\frac{1}{k}\int_{rp}^{kb} v(x)\,dx\\ =&\frac{r}{k}\int_0^p v(x)\,dx+\mathcal{O}(1\backslash k).\end{aligned} \tag{20}$$

Kako je

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\,,\,\psi(t)\right\rangle =&\frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,dt}_{b}\\ =&\frac{b}{p}\int_0^p v(x)\,dx,\end{aligned} \tag{21}$$

ostaje nam još da pokažemo da (20) konvergira ka desnoj strani jednakosti (21), kad $k\to\infty$, odnosno da pokažemo da $\frac{r}{k}\to\frac{b}{p}$, kad $k\to\infty$. Mi znamo da r zavisi od k i zbog toga ćemo pisati $r=r(k)$. Takođe znamo da smo $r(k)$ dobili kao jedinstveni prirodan broj koji zadovoljava (19), odakle dobijamo da je

$$\frac{b}{p}\ge\frac{r(k)}{k}>\frac{b}{p}-\frac{1}{k}.$$

Tako smo niz $\frac{r(k)}{k}$ uklještili između dva niza koja konvergiraju ka $\frac{b}{p}$, što kompletira dokaz konvergencije (17).

I za karakterističnu funkciju proizvoljnog intervala $[a, b]$, $a < b$, dobijamo istu granicu. Ako interval $[a, b]$ sadrži nulu onda ga podelimo na dva intervala $[a, 0]$ i $[0, b]$. Za interval $[a, 0]$ tvrđenje dobijamo isto kao za $[0, b]$, jer se radi o periodičnoj funkciji. Stoga smo pokazali da tvrđenje leme važi za sve karakteristične funkcije. Za kompletan dokaz leme potrebno je još samo iskoristiti činjenicu da su karakteristične funkcije guste u L^1. $\square$

Primer 2. *Posmatramo niz funkcija $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indukovan skaliranjem periodične funkcije $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kao što smo videli, imamo*

$$u_k(x) \equiv v(kx), \quad w^* - \lim u_k = \frac{1}{p}\int_0^p v(s)\,ds.$$

Ako je g proizvoljna neprekidna funkcija, niz $g(u_k)$ takođe možemo posmatrati kao niz indukovan skaliranjem periodične funkcije $g \circ v$, pa imamo

$$\begin{aligned} w^* - \lim g(u_k) =& \frac{1}{p}\int_0^p g(v(s))\,ds \\ \neq& g\left(\frac{1}{p}\int_0^p v(s)\,ds\right) \\ =& g(w^* - \lim u_k). \end{aligned}$$

$\Diamond$

Dosadašnji primeri odnosili su se na funkcije definisane na $\mathbb{R}$. Oni se mogu uopštiti i na $\mathbb{R}^n$.

Primer 3. *Neka su $y_1, \dots, y_n$ nezavisni vektori u $\mathbb{R}^n$ i neka je*

$$Y = \{\sum_{i=1}^n \theta_i y_i : \ 0 \le \theta_i \le 1\}.$$

Dalje, neka je $F(x, y)$ neprekidna ograničena funkcija na $\Omega \times \mathbb{R}^n$, za koju važi

$$F(x, y + y_j) = F(x, y), \quad j = 1, \dots, n.$$

Tada, kad $n \to \infty$ niz $f_n(x) = F(x, nx)$ konvergira slabo u L^∞ ka*

$$f(x) = \frac{1}{m(Y)}\int_Y F(x, y)\,dy.$$

Ipak, slabi (slabi) limesi nizova f_n i $\Phi(f_n)$ nisu nezavisni. Kao i u prethodnom primeru, ako niz f_n konvergira slabo* u $L^\infty(\Omega)$ ka f i $\Phi(f_n)$ konvergira ka h, onda (ako je Φ konveksna), važi $h(x) \ge \Phi(f(x))$, s.s.*

$\Diamond$

2.2. **Young-ova mera.** Počnimo od niza funkcija $u_l : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ koji konvergira u slaboj* topologiji na L^∞

$$w^* - \lim_{l\to\infty} u_l = u.$$

Takav niz je uniformno ograničen u L^∞ nekim brojem $r > 0$,

$$\|u_l\|_\infty \leq r,$$

i na svakom ograničenom Borel-ovom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ važi

$$\lim_{l\to\infty} \int_\Omega u_l(y)\, dy = \int_\Omega u(y)\, dy.$$

O slaboj* konvergenciji kompozicije neprekidne realnoznačne funkcije $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i ovakvog niza govori Young-ova teorema. Ona rešava problem nekompatibilnosti slabe konvergencije i nelinearne kompozicije.

Teorema 3. *Za svaki niz $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$-ograničenih funkcija $\{u_l\}$, postoji $\{u_k\}$, podniz niza $\{u_l\}$ i familija Borelovih probabilističkih mera*

$$\nu_x \in Prob(\mathbb{R}^m), \quad x \in \Omega, \quad supp\, \nu_x \subset B(0; r),$$

(sa $B(0; r)$ ćemo obeležiti loptu sa centrom u 0 poluprečnika r) tako da za sve $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ granična vrednost

$$w^* - \lim_{k\to\infty} F(u_k(y))$$

postoji, i jednaka je očekivanoj vrednosti funkcije F,

$$w^* - \lim_{k\to\infty} F(u_k(x)) = \int_{\mathbb{R}^m} F(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) =: \overline{F}(x)\,,$$

za skoro sve $x \in \Omega$.

Za dokaz ove teoreme trebaće nam teorija mera oscilacija (measures of oscillation), tzv. prorezane mere (slicing measures) i Radon-Nikodinova teorema. Mere oscilacija rešavaju problem kada imamo slabu konvergenciju, ali ne znamo da li imamo konvergenciju skoro svuda (s.s.). Za sada pretpostavljamo da se problem koncentracije ne pojavljuje (recimo da imamo tako dobre ocene). Tehničke teškoće zasnivaju se na mogućim ekstremno divljim, ali ograničenim oscilacijama koje se mogu pojaviti u slabo konvergentnom nizu. Plan je naći mere koje opisuju graničnu strukturu takvih oscilacija.

Potsetimo se da je probabilistička mera $m \in Prob(\Omega)$, konačna nenegativna Radon-ova mera na Ω koja zadovoljava uslov $m(\Omega) = 1$. Radonove mere su lokalno konačne, spoljno regularne ($m(A) = inf\{m(V) : A \subset V,\ V\, je\, otvoren\}$) mere za koje važi da za sve V

otvorene podskupove od Ω, $m(V) = sup\{m(K) : K \subset\subset V\}$. Tretiramo ih, ustvari, kao neprekidne linearne funkcionele na prostoru neprekidnih funkcija. Sve osobine ovakvih mera koje nam budu trebale, naglasićemo u adekvatnim momentima, a čitaocima koji žele da nauče više o Radon-ovim i probabilističkim merama preporučujemo [ps, s1].

Napomenimo još da se Young-ova teorema može proširiti na niz koji konvergira u slaboj* topologiji prostora L^p. U tom slučaju, rast funkcije g treba da bude ne veći od rasta bilo kog polinoma stepena p, da bismo dobili konvergenciju kompozicije.

Iz teoreme imamo, stavljajući $F(t) = t$, da i niz u_k konvergira u slaboj* topologiji, tj. da je

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda \, d\nu_x, \; x \in \Omega.$$

Definicija 2. *Familija mera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, definisanih u teoremi 3 zove se Young-ova mera. Prostor Young-ovih mera obeležavamo sa $\mathcal{Y}(\Omega)$.*[3]

Sada ćemo ići polako ka dokazu Young-ove teoreme. U daljem tekstu Ω će označavati otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$, a μ konačnu, nenegativnu, Radonovu meru na $\mathbb{R}^{n+m}$, $m, n \geq 1$. Sa σ ćemo obeležiti kanoničku projekciju mere μ na $\mathbb{R}^n$, tj. $\sigma(E) \equiv \mu(E \times \mathbb{R}^m)$, za sve Borelove skupove $E \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 4. *Za σ-s.s. $x \in \mathbb{R}^n$ postoji Radonova probabilistička mera ν_x na $\mathbb{R}^m$, tako da*

(ı) *preslikavanje $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\nu_x(y)$ je σ-merljivo*

(ıı) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\nu_x(y) \right) d\sigma(x),$

za sve ograničene, neprekidne funkcije f.

Dokaz teoreme 4: Podelićemo dokaz na tri dela.

[3]Neki autori ovakve mere obeležavaju sa $\mathcal{Y}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$, aludirajući da su to Young-ove mere na $\mathbb{R}^m$ indukovane L^∞-ograničenim nizom, dok pod Young-ovim merama, u oznaci $\mathcal{Y}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ podrazumevaju širu klasu familija Radonovih probabilističkih mera. Naime, Young-ovu meru definišu kao slabo merljivo preslikavanje $\Omega \to \mathrm{rca}(\mathbb{R}^m)$. Tako definisan skip Young-ovih mera je konveksan podskup prostora $L^\infty_w(\Omega;\mathrm{rca}(\mathbb{R}^m))$, gde w označava "slabo merljiva", koji je dual prostora $L^1(\Omega;C_0(\mathbb{R}^m))$.

1. Neka je $\{f_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ prebrojiv, gust podskup skupa ograničenih neprekidnih funkcija. Njemu pridružujemo Radonove mere

$$\gamma^k(E) = \int_{E\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y), \quad k = 1, 2, ...$$

definisane na $\mathbb{R}^n$, tj. za sve Borelove skupove $E \subset \mathbb{R}^n$. Jasno je da je $\gamma^k \ll \sigma$. Dalje, za σ-s.s. $x \in \mathbb{R}^n$ postoji limes

$$\begin{aligned} D_\sigma\gamma^k(x) &\equiv \lim_{r\to 0} \frac{\gamma^k(B(x,r))}{\sigma(B(x,r))} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{\int_{B(x,r)\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y)}{\int_{B(x,r)\times\mathbb{R}^m} d\mu(x,y)}, \quad k = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{22}$$

preslikavanja $x \mapsto D_\sigma\gamma^k(x),\ k = 1, 2, ...$ su ograničena, σ-merljiva i za svaki Borelov skup $E \subset \mathbb{R}^n$ važi

$$\int_{E\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y) = \gamma^k(E) = \int_E D_\sigma\gamma^k(x)\, d\sigma(x), \quad k = 1, 2, ... \tag{23}$$

Ovde smo koristili teoriju simetričnih izvoda [fed].

2. Sada fiksirajmo funkciju $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ i izaberimo podniz $\{f_{k_j}\}_{j\geq 1} \subset \{f_k\}_{k\geq 1}$ koji konvergira ka f, uniformno na $\mathbb{R}^m$. Kako f_k uniformno konvergira ka f, izvodi $D_\sigma\gamma^{k_j}(x)$ će biti uniformno ograničeni, pa će za σ-s.s. $x \in \mathbb{R}^n$ postojati limes

$$\begin{aligned} \Gamma_x(f) &\equiv \lim_{j\to\infty} D_\sigma\gamma^{k_j}(x) \\ &= \lim_{j\to\infty} \lim_{r\to 0} \frac{\int_{B(x,r)\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y)}{\int_{B(x,r)\times\mathbb{R}^m} d\mu(x,y)}, \quad k = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{24}$$

i neće zavisiti od izbora podniza koji aproksimira f. Ako fiksiramo x dobijemo preslikavanje $\big[\, f \mapsto \Gamma_x(f)\,\big] \in \big(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)\big)'$, ograničenu linearnu funkcionelu na $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$. Stoga postoji Radonova mera ν_x na $\mathbb{R}^m$ za koju važi

$$\Gamma_x(f) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\nu_x(y), \quad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m).$$

S druge strane, ako fiksiramo $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$, dobijamo ograničeno, σ-merljivo preslikavanje $\big[\, x \mapsto \Gamma_x(f)\,\big]$, pa iz (23) imamo

$$\begin{aligned} \int_{E\times\mathbb{R}^m} f(y)\, d\mu(x,y) &= \int_E \lim_{j\to\infty} D_\sigma\gamma^{k_j}(x)\, d\sigma(x) = \int_E \Gamma_x(f)\, d\sigma(x) \\ &= \int_E \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\nu_x(y) \right) d\sigma(x) \end{aligned} \tag{25}$$

za sve $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ i E (Borelov) $\subset \mathbb{R}^n$.

3. Ako sada postupak aproksimacije nizom funkcija opisan u drugom delu dokaza primenimo na funkciju $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$, iz (25) dobijamo

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} g(x)f(y)\,d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,d\nu_x(y)\Big)\,d\sigma(x), \tag{26}$$

za neprekidne, ograničene funkcije f, g. Ako stavimo $f \equiv 1$ u (26), dobijamo da je $\nu_x(\mathbb{R}^m) = 1$, σ-s.s. Dakle, dobili smo tvrđenje u specijalnom slučaju, kada se neprekidna i organičena funkcija na $\mathbb{R}^{n+m}$ može napisati u obliku $g(x)f(y)$. Ali svaka neprekidna i organičena funkcija na $\mathbb{R}^{n+m}$ može se lokalno uniformno aproksimirati konačnim sumama oblika $\sum_{i=1}^N g^i(x)f^i(y)$ za neprekidne i organičene $g^i,\ f^i,\ i = 1, ..., N$, što kompletira naš dokaz. $\square$

Dokaz teoreme 3: I ovaj dokaz podelićemo na tri dela.

1. Definišimo meru

$$\mu_k(E) \equiv \int_\Omega \chi_E(x, f_k(x))\,dx, \quad k = 1, 2, ...$$

za svaki Borelov skup $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Kako je

$$\sup_k \mu_k(\Omega \times \mathbb{R}^m) = L^n(\Omega) < \infty,$$

postoji podniz $\{\mu_{k_j}\}_{j\geq 1} \subset \{\mu_k\}_{k\geq 1}$ koji slabo konvergira ka nenegativnoj meri μ, tj. postoji $\mu \in \mathcal{M}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$, tako da $\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu$, u $\mathcal{M}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$. (Ovde smo sa $\rightharpoonup$ obeležili slabu konvergenciju, a L^n označava Lebesque-ovu meru dimenzije n.)

2. Dalje tvrdimo da je projekcija od μ na $\mathbb{R}^n$ $n-$dimenzionalna Lebesque-ova mera restrikovana na Ω. Obeležićemo projekciju sa σ. Dakle tvrdimo

$$\sigma = L^n \lceil \Omega.$$

Iz teoreme 2 imamo da za otvoren skup $V \subset \Omega$ važi

$$\sigma(V) = \mu(V \times \mathbb{R}^m) \leq \liminf \mu_{k_j}(V \times \mathbb{R}^m) = L^n(V).$$

Stoga je $\sigma \leq L^n \lceil \Omega$. S druge strane, neka je $K \subset\subset \Omega$. Kako je $\{f_{k_j}\}_j$ ograničen u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$, postoji $R > 0$ tako da su nosači mera μ_{k_j} i μ sadržani u $\Omega \times B(0, R)$. Tako dobijamo da je

$$\begin{aligned}\sigma(K) =& \mu(K \times \mathbb{R}^m) = \mu(K \times B(0, R)) \\ &\geq \limsup \mu_{k_j}(K \times B(0, R)) = L^n(K),\end{aligned}$$

odakle imamo da je $\sigma \geq L^n \lceil \Omega$, tj. $\sigma = L^n \lceil \Omega$.

3. Iz teoreme 4 zaključujemo da postoji za σ-s.s. $x \in \Omega$ Borelova probabilistička mera ν_x tako da

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,d\mu(x,y) = \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\nu_x(y) \right) d\sigma(x),$$

za neprekidne, ograničene funkcije f. Stavimo $f(x,y) = \xi(x)F(y)$, gde su $\xi \in \mathcal{C}_b(\Omega)$, $F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \xi(x)F(f_{k_j}(x))\,dx &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,d\mu_{k_j}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,d\mu(x,y) \\
&= \int_\Omega \xi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(y)\,d\nu_x(y) \right) dx \\
&= \int_\Omega \xi(x)\overline{F}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Napomenimo još da smo dokaz izveli za ograničenu neprekidnu funkciju F. Slično dobijamo tvrđenje i za $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$, jer možemo, ako je potrebno, redefinisati F za velike vrednosti $|y|$ da ima kompaktan nosač. $\square$

Videli smo, dakle, da uniformno ograničen niz L^∞ funkcija indukuje Young-ovu meru. Važi i obratno, tj. ako je data familija probabilističkih mera $(\mu_x)_{x\in\Omega}$, definisana za s.s. $x \in \Omega$, koja zavisi u slabo merljivom smislu od x i $supp\,\mu_x \subset [-M, M]$. Tada postoji niz funkcija $(u_k)_k \subset L^\infty$, čije norme su ograničene sa M, takav da je $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ Young-ova mera indukovana nizom $(u_k)_k$.

Primer 4. *Konstruisaćemo eksplicitno Young-ovu meru u jednom primeru. Koristićemo primer 2, tj. nastavićemo diskusiju započetu u tom primeru. Tamo smo posmatrali niz funkcija $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indukovan skaliranjem periodične funkcije $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kao što smo videli,*

$$u_k(x) \equiv v(kx), \quad w^* - \lim u_k = \frac{1}{p}\int_0^p v(s)\,ds,$$

a za proizvoljnu neprekidnu funkciju g, važi

$$w^* - \lim g(u_k) = \frac{1}{p}\int_0^p g(v(s))\,ds.$$

Tako dobijamo nenegativnu ograničenu linearnu funkcionelu koja deluje na neprekidne funkcije g i može se predstaviti kao probabilistička mera ν:

$$\frac{1}{p}\int_0^p g(v(s))\,ds = \langle\, \nu\,,\, g(\lambda)\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\,d\nu.$$

Napomena. Ako je niz u_k indukovan skaliranjem periodične funkcije v, njemu asocirana Young-ova mera ne zavisi od x i data je slikom normalizovane Lebesque-ove mere kompozicije funcije v_* i karakterisične funkcije χ_p intervala $[0,p]$:

$$\nu_x = \nu = v_*\big(\frac{\chi_p\, ds}{p}\big).$$

Ovde smo sa v_* označili takozvanu "push forvard" transformaciju funkcije v. Ona je povezana sa tzv. "pull back" transformacijom. Naime ako imamo neko preslikavanje v iz prostora X u Y, onda se "pull back" definiše na sledeći način: $v^* : \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X)$, $(v^*f)(x) = f(v(x))$, za $f \in \mathcal{C}(Y)$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\langle\, v^*f(x)\,,\, \phi(x)\,\rangle =& \langle\, f(v(x))\,,\, \phi(x)\,\rangle\\ =& \Big\langle\, f(y)\,,\, \phi(v^{-1}y)\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^{-1}\Big\rangle\\ =& \langle\, f(y)\,,\, (v_*\phi)(y)\,\rangle\end{aligned}$$

Tako dobijamo preslikavanje $v_* : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, $\quad (v_*\phi)(y) = \phi(v^{-1}(y))J^{-1}$, gde smo sa J obeležili Jakobijan $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Kada ovaj račun primenimo na primer dobijemo

$$\frac{1}{p}\int_0^p g(v(s))\, ds = \langle\, g(\lambda)\,, d\nu\,\rangle = \int g(\lambda) d\nu,$$

$$\Big\langle\, v^*g\,,\, \frac{\chi_p}{p}\, ds\,\Big\rangle = \langle\, g(\lambda)\,,\, d\nu\,\rangle,$$

$$\Big\langle\, g\,,\, v_*(\frac{\chi_p}{p}\, ds)\,\Big\rangle = \langle\, g\,,\, d\nu\,\rangle.$$

$\Diamond$

Sada smo zainteresovani za jaku konvergenciju niza $(u_k)_k$. Naime, iz uniformne ograničenosti niza $(u_k)_k$ u $L^\infty(\Omega)$ imamo da ako niz konvergira u strogoj topologiji na $L^p_{loc}(\Omega)$ za neko $p:\ 1 \le p < \infty$, onda on konvergira u strogoj topologiji na $L^q_{loc}(\Omega)$ za sve $q:\ 1 \le q < \infty$, tj. važi

$$\lim_{l\to\infty}\int_K |u_k(y) - u(y)|^q\, dy = 0\ ,$$

za sve $K \subset\subset \mathbb{R}^m$ i za sve $q:\ 1 \le q < \infty$. Ako je to slučaj reći ćemo da niz u_l *jako konvergira.*

Posledica 1. *Niz u_k jako konvergira ka u ako i samo ako je Young-ova mera u skoro svim tačkama y jednaka Dirac-ovoj meri u $u(y)$, tj.*

$$\nu_y = \delta_{u(y)} \quad ,\ \textit{za skoro sve } y. \tag{27}$$

Dokaz posledice 1. Neka važi (27). Da bismo pokazali jaku konvergenciju dovoljno je pokazati da za neko $p:\ 1 \leq p < \infty$ niz konvergira u strogoj topologiji na L^p_{loc}. Mi ćemo pokazati za $p = 2$. Iz teoreme 3 imamo da je

$$w^* - \lim\, g(u_k) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\, d\nu_y = \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\, d\delta_{u(y)} = g(u),$$

tj.,

$$w^* - \lim\, g(u_k) = g(u). \tag{28}$$

Izaberimo funkciju g koja je strogo konveksna. To znači da je

$$Qg(\lambda, \lambda_0) := g(\lambda) - g(\lambda_0) - \nabla g(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) \geq c|\lambda - \lambda_0|^2. \tag{29}$$

Kako je $w^* - \lim\, u_k = u$, imamo da je $\lim_{k\to\infty} \int_K (u_k - u)\, dy = 0$, odakle je $\lim_{k\to\infty} \int_K \nabla g(u)(u_k - u)\, dy = 0$, što uz (28) daje da je

$$\lim_{k\to\infty} \int_K Qg(u_k, u)\, dy = 0, \tag{30}$$

za sve $K \subset\subset \Omega$. Iz (29) imamo da je

$$|u_k - u|^2 \leq c_1 Qg(u_k, u),$$

odakle uz (30) imamo da je

$$\lim_{l\to\infty} \int_K |u_k(y) - u(y)|^2\, dy = 0\ ,$$

tj., da niz u_k konvergira u strogoj topologiji na $L^2_{loc}(\Omega)$.

Za dokaz drugog smera trebaće nam *Jensen-ova nejednakost*:

Lema 2 (Jensen-ova nejednakost)**.** *Neka je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathcal{M}$ na skupu Ω, takva da je $\mu(\Omega) = 1$. Ako je $f \in L^1(\mu)$ realna funkcija za koju važi $a < f(x) < b$, za sve $x \in \Omega$ i ako je ϕ konveksna na (a, b), onda je*

$$\phi\Big(\int_\Omega f\, d\mu\Big) \leq \int_\Omega (\phi \circ f)\, d\mu.$$

Jednakost dobijamo ako i samo ako je μ Dirac-ova mera.

Dokaz Jensen-ove nejednakosti može se naći npr. u [ru].

Pokažimo sada drugi smer tvrđenja. Ako u_k jako konvergira onda (28) važi za sve g. Kako je

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda\, d\nu_y \equiv \langle \nu_y, \lambda \rangle,$$

imamo

$$\langle \nu_y, g(\lambda)\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\, d\nu_y \;=\; w^* \;-\; \lim g(u_k)$$
$$= g(u) = g(\langle \nu_y, \lambda\rangle),$$

za sve g i skoro sve y, odnosno,

$$\langle \nu_y, g(\lambda)\rangle = g(\langle \nu_y, \lambda\rangle), \tag{31}$$

za sve g i skoro sve y.

Ako je g strogo konveksna funkcija i ν_y probabilistička mera, onda nam Jensen-ova nejednakost daje

$$\langle \nu_y, g(\lambda)\rangle \geq g(\langle \nu_y, \lambda\rangle),$$

a jednakost važi ako i samo ako je ν_y Dirac-ova masa, što smo i želeli da pokažemo. $\square$

2.3. **Meroznačna rešenja - definicija.** Posmatraćemo sistem zakona održanja

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{32}$$

kao i dve njegove regularizacije, paraboličnu drugog reda

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_x^2 u, \tag{33}$$

i regularizaciju trećeg reda

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_x^3 u. \tag{34}$$

Naravno, regularizacija sistema (32) može da se sprovede na razne načine, tj. sa desne strane jednakosti u jednačinama (33, 34), može da se nađe proizvoljni linearni parcijalni diferencijalni operator, najčešće sa konstantnim koeficijentima.

U prvom seminarskom radu, [sem1], posmatrali smo slaba rešenja zakona održanja. Ovde ćemo se pozvati na delove koji nam trebaju. Potsetimo se, (klasično) slabo rešenje definisali smo na tri načina i pokazali da su te tri definicije ekvivalentne. Ovde ćemo se pozvati na sledeću:

Definicija 3. *Klasično slabo rešenje je merljiva funkcija*

$$u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^n$$

koja zadovoljava (32) u smislu distribucija na $\mathbb{R}^2_+$*, tj. ako za sve test funkcije* $\phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ *važi*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t u + \phi_x f(u))\, dx\, dt = 0. \tag{35}$$

Podrazumeva se da su u i $f(u)$ lokalno integrabilne. Što se tiče hiperboličnosti sistema (32), za definiciju meroznačnih rešenja je svejedno da li je sistem strogo hiperboličan (matrica $f'(u)$ ima n različitih realnih karakterističnih korena) ili nestrogo hiperboličan (matrica $f'(u)$ ima pun skup karakterističnih korena). Definicija koja sledi je originalna, prva definicija meroznačnih rešenja, čiji je tvorac DiPerna, [dp].

Definicija 4. *Merljiva funkcija*

$$\nu : y \in \mathbb{R}^2_+ \to \nu_y \in Prob(\mathbb{R}^n)$$

je meroznačno rešenje sistema (32) ako

$$\partial_t \langle \nu_y, \lambda \rangle + \partial_x \langle \nu_y, f(\lambda) \rangle = 0 \tag{36}$$

važi u smislu distribucija na $\mathbb{R}^2_+$*, što je ekvivalentno sa*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_t \langle \nu_y, \lambda \rangle + \phi_x \langle \nu_y, f(\lambda) \rangle)\, dx\, dt = 0$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$.

Pod merljivošću funkcije ν podrazumevamo tzv. slabu* merljivost tačaka ν_y iz njenog kodomena, što znači da za sve neprekidne g, realnoznačna funkcija

$$y \mapsto \langle \nu_y, f(\lambda) \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda)\, d\nu_y$$

je merljiva. Mi ćemo posmatrati ona meroznačna rešenja čiji se kodomen sastoji od probabilističkih mera čiji nosači leže u fiksiranom kompaktnom podskupu od $\mathbb{R}^n$. Na taj način izbegavamo diskusiju o rastu funkcije f. Zbog toga se u literaturi može naći i sledeća definicija meroznačnih rešenja, [cmo].

Definicija 5. *Familija probabilističkih mera* $(\nu_y)_{y\in\Omega}$ *na* $\mathbb{R}^n$*, definisana za skoro sve* $y \in \Omega$ *je meroznačno rešenje sistema (32) ako*

(*ı*) $supp\, \nu_y \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$ *za fiksirani kompaktni skup* K,

(*ıı*) *za sve* $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, *preslikavanje* $y \to \int g\, d\nu_y$ *je merljivo,*

(*ıı*) $\partial_t \langle \nu_y, \lambda \rangle + \partial_x \langle \nu_y, f(\lambda) \rangle = 0$ *važi u smislu distribucija na* $\mathbb{R}^2_+$.

Sada ćemo posmatrati regularizacije sistema (32). Cilj nam je da iz niza rešenja u_ε regularizovanog sistema, izvučemo meroznačno rešenje od (32).

Teorema 5. *Neka je u_ε niz rešenja održivog sistema*

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon L_x u, \tag{37}$$

gde je L diferencijalni operator sa konstantnim koeficijentima. Ako je niz u_ε uniformno ograničen u L^∞ onda postoji meroznačno rešenje ν sistema (32) koje dobijamo kao Young-ovu meru iz nekog podniza u_{ε_j} niza u_ε.

Tada kažemo da svaki proces sa singularnom perturbacijom koji je stabilan u L^∞, generiše jedno meroznačno rešenje neperturbovanog sistema (32).

Dokaz teoreme 5. Kako je u_ε slabo rešenje od (37) imamo da u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+)$ važi

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_x f(u_\varepsilon) = \varepsilon L_x(u_\varepsilon). \tag{38}$$

Iz Young-ove teoreme imamo da postoji podniz u_{ε_j} niza u_ε i familija probabilističkih mera ν tako da je

$$w^* - lim\, f(u_{\varepsilon_j}) = \langle \nu_y, f(\lambda)\rangle. \tag{39}$$

Pokažimo da je ν meroznačno rešenje.

Young-ova mera je merljiva u smislu slabe* merljivosti tačaka ν_y. Stoga treba još pokazati da je

$$\partial_t\langle \nu_y, \lambda\rangle + \partial_x\langle \nu_y, f(\lambda)\rangle = 0, \tag{40}$$

u smislu distribucija na $\mathbb{R}^2_+$. Ako iskoristimo jednakost (39) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\partial_t\langle \nu_y, \lambda\rangle + \partial_x\langle \nu_y, f(\lambda)\rangle = \\
&= -\iint_{\mathbb{R}^2_+} \Big(\phi_t(x,t)\underbrace{\langle \nu_y, \lambda\rangle}_{\lim u_{\varepsilon_j}} + \phi_x(x,t)\underbrace{\langle \nu_y, f(\lambda)\rangle}_{\lim f(u_{\varepsilon_j})}\Big)\,dx\,dt \\
&= -\lim_{j\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^2_+} \Big(\phi_t(x,t)u_{\varepsilon_j} + \phi_x(x,t)f(u_{\varepsilon_j})\Big)\,dx\,dt \\
&= -\lim_{\varepsilon_j\to 0}\langle\, \partial_t u_\varepsilon + \partial_x f(u_{\varepsilon_j})\,, \phi\,\rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon_j\to 0}\langle\, \varepsilon_j L_x(u_{\varepsilon_j})\,, \phi\,\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{41}$$

U pretposlednjoj jednakosti smo iskoristili (38), čime smo pokazali (40), što kompletira dokaz da je Young-ova mera dobijena iz podniza u_{ε_j}, meroznačno rešenje sistema (32). $\square$

2.4. **Parabolična aproksimacija.** Više pažnje posvetićemo jednačini (33). Posmatraćemo Young-ovu meru koja se dobija iz podniza njenih rešenja. Takođe ćemo posmatrati entropijske uslove o kojima smo pisali u prvom seminarskom radu, [sem1], koji nam trebaju za meroznačna rešenja.

Lax-ova entropijska nejednakost je klasična entropijska nejednakost za prekidna rešenja hiperboličnog sistema od n zakona održanja

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{42}$$

Par funkcija (η, q), $\eta, q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvaćemo *entropijski par* za (42), ako sva $\mathcal{C}^1-$rešenja $u = u(x,t)$ sistema (42) zadovoljavaju dodatni zakon održanja oblika

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0. \tag{43}$$

Poslednji izraz, (43), predstavlja divergenciju entropijskoj polja, odnosno kaže da je divergencija entropijskoj polja jednaka nuli. Funkcija η zove se entropija, a q entropijski fluks.

Egzistencija entropijskog para bazira se na egzistenciji rešenja sistema

$$\nabla\eta(u)\nabla f(u) = \nabla q(u), \tag{44}$$

koji se sastoji od n jednačina po dve promenljive η i q. Uslov (44) zove se *uslov kompatibilnosti* i može se izvesti iz kvazilinearnih oblika zakona održanja (42) i (43), za $\mathcal{C}^1-$rešenja,

$$\partial_t u + \nabla f(u)\partial_x u = 0 \tag{45}$$

i

$$\nabla\eta(u)\partial_t u + \nabla q(u)\partial_x u = 0, \tag{46}$$

tako što iz (45) izrazimo $\partial_t u$ i uvrstimo u (46). Dobijamo jednačinu

$$\Big[-\nabla\eta(u)\nabla f(u) + \nabla q(u)) \Big] \partial_x u = 0.$$

U slučaju jednog (skalarnog) zakona održanja, uslov (44) ima puno rešenja. Na primer, svaka Lipschitz-ova funkcija $\eta(u)$ može poslužiti kao entropija, preko koje onda definišemo entropijski fluks

$$q(u) = \int \eta'(s) f'(s)\, ds.$$

Ako imamo dva (par) zakona održanja, uslov kompatibilnosti postaje hiperbolični sistem od dve jednačine po dve promenljive, čiji karakteristični oblik možemo dobiti ako pomnožimo skalarno (44) desnim karakterističnim vektorom r_j, Jakobijana od f:

$$\nabla f(u) r_j(u) = \lambda_j(u) r_j(u)$$

$$(\nabla\eta\nabla f - \nabla q)\cdot r_j = 0, \quad j = 1, 2$$

$$(\lambda_j \nabla\eta - \nabla q)\cdot r_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

U slučaju sistema od više od dva zakona održanja, uslov kompatibilnosti retko ima rešenje. Ipak, mnoge klase zakona održanja, imaju entropijski par kao posledicu simetrične strukture matrice zakona održanja, i u tom slučaju entropija je strogo konveksna funkcija, [l1, sem1]. Stoga ćemo posmatrati sisteme zakona održanja koji imaju strogo konveksan entropijski par, tj. entropijski par (η, q) gde je η strogo konveksna funkcija.

Za takve zakone održanja, u skalarnom slučaju svaka strogo konveksna funkcija η može služiti kao entropija, dok je za par zakona održanja, u opštem slučaju, Lax[l1] konstruisao strogo konveksni entropijski par. U prvom seminarskom radu (lema 1, str.19) pokazali smo da, pod pretpostavkom da je entropija konveksna, $u(x,t)$ koje se dobija kao limes rešenja sistema (33), je slabo (distributivno) rešenje sistema (42) i zadovoljava nejednakost

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) \leq 0. \tag{47}$$

Uslov (47) zove se *Lax-ova entropijska nejednakost*, i služi da iz klase slabih rešenja izdvoji fizički relevantna rešenja. Preciznije, $L^\infty-$rešenje u, sistema (42) je *dopustivo* ako svi konveksni entropijski parovi zadovoljavaju (47) u smislu distribucija na $\mathbb{R}^2_+$, tj. ako važi

$$\int\int (\phi_t \eta(u) + \phi_x q(u))\, dx\, dt \geq 0,$$

za sve test funkcije $\phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, pod uslovom da je η konveksna, tj. $\nabla^2\eta > 0$.

Ovaj uslov se dalje, prirodno proširuje i na meroznačna rešenja. Pokazaćemo da Young-ova mera koja se dobija iz niza rešenja paraboličnog sistema (33), kao meroznačno rešenje, zadovoljava entropijske uslove. Isti rezultat za slaba rešenja, sada postaje posledica sledeće teoreme.

Teorema 6. *Neka je ν Young-ova mera dobijena iz niza rešenja paraboličnog sistema (33), koji je uniformno ograničen u L^∞. Tada je ν meroznačno rešenje sistema (42) koje zadovoljava uslov*

$$\partial_t \langle \nu_y, \eta(\lambda)\rangle + \partial_x \langle \nu_y, q(\lambda)\rangle \leq 0 \tag{48}$$

u smislu distribucija na $\mathbb{R}^2_+$, za sve konveksne entropijske parove (η, q).

Dokaz. Iz uslova kompatibilnosti (44) imamo da je

$$\partial_t \eta(u_\varepsilon) + \partial_x q(u_\varepsilon) = \nabla\eta(u_\varepsilon)\Big(\partial_t u_\varepsilon + \nabla f(u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon\Big),$$

a iz jednačine (33) imamo da je to dalje jednako sa

$$\varepsilon \nabla\eta(u_\varepsilon)\partial_{xx} u_\varepsilon,$$

što možemo zapisati kao

$$\varepsilon\partial_{xx}\eta(u_\varepsilon) - \varepsilon\nabla^2\eta(u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon, \partial_x u_\varepsilon).$$

Primetimo da je $\varepsilon\nabla^2\eta(u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon, \partial_x u_\varepsilon) \geq 0$, što nam daje sledeći račun

$$\begin{aligned} \partial_t\eta(u_\varepsilon) + \partial_x q(u_\varepsilon) &= \nabla\eta(u_\varepsilon)(\partial_t u_\varepsilon + \nabla f(u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon) \\ &= \varepsilon\nabla\eta(u_\varepsilon)\partial_x^2 u_\varepsilon \\ &= \varepsilon\partial_{xx}\eta(u_\varepsilon) - \varepsilon\nabla^2\eta(u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon, \partial_x u_\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon\partial_{xx}\eta(u_\varepsilon). \end{aligned} \tag{49}$$

Sada posmatramo granični proces kada $\varepsilon \to 0$. Koristimo činjenice da je

$$w^* - lim\, \eta(u_{\varepsilon_j}) = \langle \nu_y, \eta(\lambda)\rangle, \quad w^* - lim\, q(u_{\varepsilon_j}) = \langle \nu_y, q(\lambda)\rangle.$$

Uz primedbu da desna strana nejednakosti (49) teži ka nuli u distributivnom smislu, dobijamo da važi (48). □

Definicija 6. *Sa $\mathcal{M}$ ćemo obeležiti klasu meroznačnih rešenja sistema (42), a sa $\mathcal{A}$ ona meroznačna rešenja koja zadovoljavaju uslov (48) za sve konveksne entropijske parove (η, q). Zvaćemo ih dopustiva meroznačna rešenja.*

2.5. **Skalarni zakon održanja.** Sada ćemo pretpostaviti da je u (42) funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tj. posmatraćemo skalarni zakon održanja

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{50}$$

Bez uticaja na opštost, pretpostavićemo da je f rastuća. Za dokaz jedinstvenosti Dirac-ovih rešenja unutar klase $\mathcal{A}$, koristićemo specijalnu klasu entropijskih parova

$$\eta(\lambda, k) = |\lambda - k| \quad q(\lambda, k) = |f(\lambda) - f(k)|, \tag{51}$$

indeksiranu sa $k \in \mathbb{R}$. Ova klasa uslova je jako bitna u teoriji slabih rešenja zakona održanja, jer je dovoljno definisati uslov dopustivosti koristeći samo tu klasu. Naime, Lax[l1] je primetio da zatvaranje skupa svih konveksnih kombinacija funkcija $a\lambda + b$ i $|\lambda - k|$ daje klasu svih konveksnih funkcija. Stoga se često u literaturi može naći sledeći kriterijum.

Definicija 7. *L^∞-rešenje jednačine (50) je dopustivo ako*

$$\partial_t \eta(u(x,t),k) + \partial_x q(u(x,t),k) \leq 0, \tag{52}$$

važi, u distributivnom smislu, za sve k, gde su η i q dati sa (51) .

Takođe je poznat rezultat, [l1], da ako su slaba L^∞-rešenja u_1 i u_2 dopustiva, odnosno ako zadovoljavaju uslov

$$\partial_t \eta(u_j) + \partial_x q(u_j) \leq 0, \quad j = 1, 2 \tag{53}$$

za sve entropijske parove, onda je operator rešenja L^1-kontrakcija, u smislu da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(x,0) - u_2(x,0)|\, dx. \tag{54}$$

Ova osobina, kao i jedinstvenost Dirac-ovih rešenja u $\mathcal{A}$, o čemu ćemo pisati kasnije, posledica su tzv. *osobine simetrije.* Naime,

$$|\lambda - k|,\ |f(\lambda) - f(k)|$$

je konveksni entropijski par po λ za sve k, a isto tako može da se posmatra kao konveksni entropijski par po k za sve λ.

2.5.1. *Usrednjeni princip kontrakcije za skalarnu jednačinu.* Neka je ν meroznačno rešenje sistema (50) u klasi $\mathcal{A}$, što znači da

$$\partial_t \langle \nu_y, \eta(\lambda) \rangle + \partial_x \langle \nu_y, q(\lambda) \rangle \leq 0 \tag{55}$$

u smislu distribucija na $\mathbb{R}^2_+$, za sve konveksne entropijske parove (η, q). Dalje, neka je w jedinstveno dopustivo L^∞-rešenje sistema (50) sa početnim uslovom w_0. Formalno, nejednakost kontrakcije je

$$E \equiv \partial_t \langle\, \nu_y,\ \eta(\lambda, w(y))\, \rangle + \partial_x \langle\, \nu_y,\ q(\lambda, w(y))\, \rangle \leq 0. \tag{56}$$

Za sada ćemo samo formalno diferencirati nejednakost (56) koristeći pravilo o proizvodu. Zapisaćemo E kao sumu $E_1 + E_2$,

$$E_1 = \langle\, \partial_t \nu_y,\ \eta(\lambda, w)\, \rangle + \langle\, \partial_x \nu_y,\ q(\lambda, w)\, \rangle$$
$$E_2 = \langle\, \nu_y,\ \partial_t \eta(\lambda, w) + \partial_x q(\lambda, w)\, \rangle.$$

Kako je $w = w(y)$ dopustivo, a (η, q) konveksni entropijski par po k, za sve λ, imamo

$$\partial_t \eta(\lambda, w(y)) + \partial_x q(\lambda, w(y)) \leq 0. \tag{57}$$

Kako je ν dopustivo, a (η, q) konveksni entropijski par po λ, za sve k, imamo

$$\partial_t \langle\, \nu_y,\, \eta(\lambda, k)\,\rangle + \partial_x \langle\, \nu_y,\, q(\lambda, k)\,\rangle \leq 0. \tag{58}$$

U nejednakost (58) možemo da diferenciramo, tj. da izvodom prođemo pod integral, pa dobijamo

$$\partial_t \int \eta(\lambda, k)\, d\nu_y + \partial_x \int q(\lambda, k)\, d\nu_y = \int \eta(\lambda, k)\, d(\partial_t \nu_y) + \int q(\lambda, k)\, d(\partial_x \nu_y),$$

pa imamo

$$\langle\, \partial_t \nu_y,\, \eta(\lambda, k)\,\rangle + \langle\, \partial_x \nu_y,\, q(\lambda, k)\,\rangle \leq 0, \text{ za sve } k. \tag{59}$$

Ako fiksiramo y, i zamenimo k sa $w(y)$ u (59), dobijamo $E_1 \leq 0$, a ako fiksiramo y i integralimo po λ, iz (57) imamo da je $E_2 \leq 0$. Kao posledicu, kad integralimo E po x, dobijamo da je

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\, \nu_y,\, |\, \lambda - w(x,t)|\,\rangle\, dx \leq 0.$$

Integral u gornjoj nejednakosti zove se *usrednjena devijacija za ν, koja potiče od Dirac-ovog rešenja koncentrisanog u $w(y)$*. Stoga kažemo da je usrednjena devijacija za ν, koja potiče od Dirac-ovog rešenja koncentrisanog u $w(y)$, nerastuća po vremenu.

Posledica ovog računa biće da ako je ν na početku Dirac-ova mera koncentrisana u $w_0(x)$, onda je

$$\nu_y = \delta_{w(y)}.$$

Sledeća teorema opravdava dosadašnji račun. Samo ćemo je formulisati i dati nekoliko primedbi. Precizan, kompletan i jasan dokaz može se naći u [dp], gde zauzima tri sitno kucane stranice, 242-244. Kasnije će nam trebati njene posledice za jedinstvenost Dirac-ovih rešenja.

Teorema 7. *Neka je $w_0 \in L^\infty$ i w jedinstveno dopustivo $L^\infty-$rešenje problema*

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) =& 0\,; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ u(x,0) =& w_0(x). \end{aligned} \tag{60}$$

Ako je ν dopustivo mv-rešenje problema (50), takvo da je $\operatorname{supp} \nu_y \subset [a,b]$, gde je $[a,b]$ fiksiran, zatvoren interval, tada

$$E \leq 0,$$

važi u smislu distribucija na $\mathbb{R}^2_+$.

Primedba 1. *Uslov teoreme o uniformnoj ograničenosti nosača je samo tehnički pogodna, ali nije esencijalna. Klasa mv-rešenja iz $\mathcal{A}$ koja imaju uniformno ograničen nosač je neprazna, što je posledica Young-ove teoreme (teorema 3) i teoreme o egzistenciji (teorema 5).*

Primedba 2. *Nejednakost (56) može biti izražena u jeziku tenzorskog proizvoda $\nu \otimes \sigma$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, gde je σ Dirac-ovo rešenje asocirano sa w:*

$$\partial_t \langle \nu \otimes \sigma, |\lambda - \mu| \rangle + \partial_x \langle \nu \otimes \sigma, |f(\lambda) - f(\mu)| \rangle \leq 0, \tag{61}$$

$$\sigma_y = \delta_{w(y)}.$$

Koristićemo uobičajenu notaciju

$$\langle \nu \otimes \sigma, h(\lambda, \mu) \rangle = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(\lambda, \mu)\, d\nu(\mu)\, d\sigma(\mu),$$

za očekivanu vrednost od h.

Primedba 3. *Nejednakost (61) može da se uopšti za opšti oblik zakona održanja*

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j} f_j(u) = 0,$$

na nejednakost

$$\partial_t \langle \nu \otimes \sigma, |\lambda - \mu| \rangle + \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j} \langle \nu \otimes \sigma, |f(\lambda) - f(\mu)| \rangle \leq 0.$$

2.5.2. *Jedinstvenost Dirac-ovih rešenja skalarne jednačine.* Cilj nam je da dođemo do posledice teoreme 7 koja kaže da je dopustivo rešenje Dirac-ovo, ako je početni uslov tačkasta masa. Pretpostavićemo, zbog jednostavnijeg računa, da je početni uslov $w_0(x) \in L^1 \cap L^\infty$ i da ν zadovoljava

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \nu_y, |\lambda| \rangle\, dx \leq const. \tag{62}$$

U tom slučaju, uz pomoć (62) i standardne L^1-granice stabilnosti,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w(x,t)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |w_0(x)|\, dx, \tag{63}$$

lako zaključujemo da je

$$V(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \nu_y, |\lambda| \rangle\, dx$$

dobro definisana L^∞ funkcija. Iz nejednakosti (56) lako sledi da je $V(t_2) \leq V(t_1)$, za s.s. $t_1 < t_2$, tj. da je V jednaka s.s. nekoj nerastućoj

svuda definisanoj funkciji od t. Ako uvedemo još jedan granični uslov, npr.

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\,\nu_y,\,|\,\lambda - w_0(x)|\,\rangle\,dx = 0, \tag{64}$$

dobijamo garanciju da je ν Dirac-ovo rešenje. U teoremi koja sledi imaćemo malo slabiji uslov.

Teorema 8. *Neka je $w_0 \in L^\infty \cap L^1$ i ν dopustivo mv-rešenje od (50), takvo da je $\operatorname{supp}\nu_y \subset [a,b]$, gde je $[a,b]$ fiksiran, zatvoren interval. Tada je ν Dirac-ovo rešenje ako važe uslovi (62) i*

$$\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\,\nu_y,\,|\,\lambda - w_0(x)|\,\rangle\,dx\,dt = 0.$$

Dokaz. Iz (63) imamo da je

$$\lim_{t\to 0}\int|\,w(x,t) - w_0(x)|\,dx = 0,$$

a potom i

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\,\nu_y,\,|\,\lambda - w_0(x)|\,\rangle\,dx\,dt = \\ &= \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T V(s)\,ds = V(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\langle\,\nu_{(x,0)},\,|\lambda|\,\rangle\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle\,\delta_{w_0(x)},\,|\lambda|\,\rangle\,dx.\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $V \overset{\text{s.s.}}{=} 0$, jer je s.s. jednaka ograničenoj nenegativnoj nerastućoj funkciji. $\square$

2.5.3. *Egzistencija mv-rešenja sa Dirac-ovim početnim uslovom.* Nije teško dobiti egzistenciju mv-rešenja sa uniformnim nosačem problema (50), koje zadovoljava L^1-granični uslov (62) i početni uslov (64). Treba samo primetiti da Young-ova mera ν asocirana sa nizom u_ε rešenja parabolične jednačine

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon\partial_{xx}u, \tag{65}$$

sa početnim uslovom $w_0 \in L^1\cap L^\infty$ ima sve željene osobine. Ograničenje (62) sledi iz L^1-principa maksimuma za skalarnu jednačinu (65) i w^*-konvergencije niza rešenja u_ε :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|w_\varepsilon(x,t)|\,dx \le \int_{-\infty}^{+\infty}|w_0(x)|\,dx,$$

$$w^* - \lim_{\varepsilon\to 0}|\,w_\varepsilon| = \langle\,\nu_y,\,|\,\lambda\,|\,\rangle.$$

Početni uslov (64) može se dobiti na sličan način iz

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle\, \nu_y,\, |\,\lambda - w_0(x)|^2\,\rangle\, dx = 0, \tag{66}$$

kao posledica uslova dopustivosti i Jensen-ove nejednakosti. Granični uslov (66) implicira da mere $\nu_{(x,t)}$ w^*-konvergiraju ka Dirac-ovoj meri u $w_0(x)$, za s.s. x, i stoga važi (64). Dokaz jednakosti (66) može se naći u [dp], u delu o minimalnim rešenjima.

2.5.4. *Konvergencija metoda viskoznosti za skalarnu jednačinu.* Kao posledicu teoreme 8 dobijamo novi dokaz konvergencije metoda viskoznosti, primenjenog na Caushy-ev problem za skalarni zakon održanja, koristeći uniformnu kontrolu samo za amplitude viskoznih rešenja u_ε.

Teorema 9. *Svaki niz u_ε rešenja Caushy-evog problema*

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= \varepsilon\, \partial_{xx} u \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{67}$$

sa početnim uslovom $u_0 \in L^1 \cup L^\infty$, ima podniz koji konvergira u jakoj topologiji prostora $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$, ka jedinstvenom dopustivom rešenju problema (65) sa početnim uslovom u_0.

Dokaz. Iz niza u_ε možemo izdvojiti podniz i Young-ovu meru ν (v. teoremu 3), koja služi kao jedno dopustivo mv-rešenje hiperbolične jednačine

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \tag{68}$$

koje zadovoljava usrednjeno L^1-ograničenje, tj. uslov (62), i početni uslov (64). Iz teoreme 8 zaključujemo da je ν Dirac-ovo rešenje, a iz posledice 1 da je konvergencija jaka. $\square$

Primedba 4. *Ako je ν jedinstvena, onda imamo konvergenciju cele familije u_ε.*

Sada imamo dovoljno materijala da poredimo ovaj koncept sa konceptom aproksimativnih rešenja.

3. Aproksimativna rešenja zakona održanja i ekvivalencija sa konceptom meroznačnih rešenja

3.1. $\mathcal{G}_s(\Omega)$-osnovni pojmovi.

3.1.1. *Konstrukcija algebre* $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Posmatrajmo nizove glatkih funkcija $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in (\mathcal{C}^\infty(\Omega))^{(0,\infty)}$, Ω (otvoren) $\subset \mathbb{R}^n$. Takav niz zvaćemo *umeren (moderate)* ako on zadovoljava uslov

$$\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \exists N > 0 \text{ tako da je}$$
$$\|\partial^\alpha u_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N})\ , \varepsilon \to 0.$$

Skup umerenih nizova glatkih funkcija obeležavaćemo sa $\mathcal{E}_{M,s}[\Omega]$. Niz iz $\mathcal{E}_{M,s}[\Omega]$ zvaćemo *nula-niz (null, negligible)* ako on zadovoljava uslov

$$\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall M > 0 \text{ važi}$$
$$\|\partial^\alpha u_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M})\ , \varepsilon \to 0.$$

Nula-nizove obeležavaćemo sa $\mathcal{N}_s(\Omega)$. $\mathcal{E}_{M,s}[\Omega]$ je algebra sa parcijalnim izvodima u kojoj su operacije definisane po komponentama, tj. članovima nizova. $\mathcal{N}_s(\Omega)$ je ideal algebre $\mathcal{E}_{M,s}[\Omega]$, zatvoren u odnosu na parcijalne izvode. U [gkos, str.11] možete naći dokaz da je umereni niz nula-niz ako i samo ako zadovoljava uslov

$$\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall M > 0 \text{ važi}$$
$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M})\ , \varepsilon \to 0.$$

Dakle, niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ je nula-niz ako

$$\varepsilon^{-M} u_\varepsilon \in L^\infty_{loc}(\Omega), \quad \text{za sve } M > 0.$$

Algebru *specijalnih uopštenih funkcija* definisaćemo kao faktor algebru

$$\mathcal{G}_s(\Omega) = \mathcal{E}_{M,s}[\Omega]/\mathcal{N}_s(\Omega).$$

Navešćemo neke osobine algebre $\mathcal{G}_s(\Omega)$ koje su nam potrebne za rešavanje zakona održanja. Njene elemente (klase ekvivalencije) obeležavaćemo sa $u = [(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}] = [(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}]_{\mathcal{N}}$. Više i detaljnije o algebri $\mathcal{G}_s(\Omega)$ možete naći u [gkos].

Sadržaj ovog poglavlja, uz potrebne definicije i tvrđenja iz predhodnog, izložen je na seminaru grupe za analizu, Departman za matematiku, PMF, Novi Sad, 10.1.2005.

3.1.2. *Potapanje* $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ *u* $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Prostor distribucija sa kompaktnim nosačem, $\mathcal{E}'(\Omega)$, može se potopiti u $\mathcal{G}_s(\Omega)$ na sledeći način. Fiksirajmo brzo opadajuću glatku funkciju ρ na $\mathbb{R}^n$, takvu da je

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1 \quad \text{i}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \rho(x)dx = 0, \qquad \text{za sve } \alpha \in \mathbb{R}^n_0,\ |\alpha| \geq 1$$

i neka je

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \geq 0.$$

Ovakvu funkciju nazivamo *molifajer.* Dato $w \in \mathcal{E}'(\Omega)$ možemo dodefinisati van Ω nulom, a zatim definisati preslikavanje

$$\iota(w) = [(w * \rho_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}].$$

Preslikavanje ι je linearno, injektivno i očuvava parcijalne izvode. Štaviše, za $v, w \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \equiv \mathcal{D}(\Omega)$, glatke funkcije sa kompaktnim nosačem, važi

$$\iota(vw) = \iota(v)\,\iota(w).$$

Stoga je $\mathcal{D}(\Omega)$ podalgebra algebre $\mathcal{G}_s(\Omega)$. To sledi iz činjenice da za $v \in \mathcal{D}(\Omega), (v*\rho_\varepsilon - v)_{\varepsilon>0} \in \mathcal{N}_s(\Omega)$, što se lako može pokazati korišćenjem Taylor-ovog razvoja i strukture molifajera ρ. Istim ovim preslikavanjem, možemo potopiti i $L^\infty(\Omega)$. Preslikavanje ι može se proširiti i na potapanje prostora distribucija $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{G}_s(\Omega)$ koje se poklapa sa datim preslikavanjem na $\mathcal{E}'(\Omega)$, kao i na $L^\infty(\Omega)$. Dokaz ovoga je mnogo složeniji i koristi činjenice da su $\mathcal{D}'(\Omega)$ i $\mathcal{G}_s(\Omega)$ snopovi. Može se naći u [gkos, str. 16-25]. Za dato $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i relativno kompaktan otvoren skup $\omega \subset \Omega$, biramo $\Psi_\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Psi_\omega \equiv 1$ na ω. Neka je $\iota_\omega(u) = [((\Psi_\omega u) * \rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}]$. Familija $(\iota_\omega(u))_{\omega\subset\Omega}$ elemenata algebre $\mathcal{G}_s(\Omega)$ je koherentna (različiti elementi se poklapaju na presecima), pa postoji jedinstveni elemenat iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$ čija restrikcija na sve ω se poklapa sa $\iota_\omega(u)$. Taj elemenat definiše $\iota(u) \in \mathcal{G}_s(\Omega)$. Preslikavanje ι je linearno, injektivno, očuvava parcijalne izvode i za $v, w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \equiv \mathcal{E}(\Omega)$, glatke funkcije na Ω, važi $\iota(vw) = \iota(v)\,\iota(w)$, pa je $\mathcal{E}(\Omega)$ podalgebra algebre $\mathcal{G}_s(\Omega)$.

3.1.3. *Kompozicija, jednakost i asociranost u* $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Da bi kompozicija funkcije f i $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ bila dobro definisana, dovoljno je da f bude glatka, polinomijalno ograničena funkcija sa polinomijalno ograničenim izvodima. To znači da, ako je f glatka, polinomijalno ograničena funkcija sa polinomijalno ograničenim izvodima, i $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, onda je kompozicija $f(u) \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, i definisana je preko predstavnika $f(u) = [(f(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}]$. Takođe ako je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ dat preko dva različita

predstavnika, tj. $u = [(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}] = [(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}]$, što znači da je $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in \mathcal{N}_s(\Omega)$, onda je i $(f(u_\varepsilon) - f(v_\varepsilon))_{\varepsilon>0} \in \mathcal{N}_s(\Omega)$.

Ovde smo videli da jednakost dva elementa $u, v \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ znači da $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_s(\Omega)$, tj. da za sve $M > 0$, $\varepsilon^{-M}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, odnosno, u skladu sa definicijom nula-nizova,

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x) - \partial^\alpha v_\varepsilon(x)| \le c\varepsilon^M, \ \varepsilon \to 0,$$

za sve K, α, M. Osim jednakosti, na $\mathcal{G}_s(\Omega)$ imamo definisanu i relaciju asociranosti. Naime, za dva elementa u, v iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$ kažemo da su asocirani, $u \approx v$, ako za njihove predstavnike $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ i $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ važi

$$u_\varepsilon - v_\varepsilon \to 0 \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ kad } \varepsilon \to 0,$$

tj. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\langle u_\varepsilon - v_\varepsilon, \phi\rangle \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (u_\varepsilon - v_\varepsilon)\phi\, dx = 0$, za sve $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Dve distribucije su asocirane ako i samo ako su jednake, tj. za $g, h \in \mathcal{D}'(\Omega)$ važi

$$\begin{aligned} h = g \iff & \iota(g) \approx \iota(h) \\ \iff & \int_\Omega (h * \rho_\varepsilon - g * \rho\varepsilon)\phi\, dx \to 0, \ \varepsilon \to 0 \\ \iff & \frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega\int_\Omega \Big(h(x-y) - g(x-y)\Big)\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi(y)\, dx\, dy \to 0, \ \varepsilon \to 0, \end{aligned}$$

što znači da $\iint (h-g)\rho\phi\, dx\, dy$ ide brže u nulu od ε^n.

Ako je $g \in L^\infty(\Omega)$, jedan od predstavnika za $\iota(g)$ je $(g*\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\ge 0}$. Znamo da je $g*\rho_\varepsilon$ ograničena nezavisno od ε, i da $g*\rho_\varepsilon \to g$ u $L^1_{loc}(\Omega)$. Odavde sledi da za $g, h \in L^\infty(\Omega)$,

$$\iota(gh) \approx \iota(g)\,\iota(h).$$

Stoga koncept asociranosti ne služi samo da bismo definisali aproksimativna rešenja (rešenja problema (72)), nego i da proširi koncept množenja sa klasičnog proizvoda funkcija na uopštene funkcije. Više detalja o ovoj temi možete naći u [b, c0, clr]. Bitno je i da je asocijacija saglasna sa izvodima, kao i sa množenjem $\mathcal{C}^\infty$-funkcijom, tj. za $u, v \in \mathcal{G}_s(\Omega), g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ iz $u \approx v$ sledi

$$\partial^\alpha u \approx \partial^\alpha v$$

i

$$\iota(g)u \approx \iota(g)v.$$

3.1.4. *Zakoni održanja u $\mathcal{G}_s(\Omega)$-uopštena i aproksimativna rešenja.* Posmatraćemo sada zakon održanja

$$div\, f(u) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0, \tag{69}$$

gde je $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ glatka funkcija i $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Takođe ćemo posmatrati i njegovu paraboličnu aproksimaciju

$$div\, f(u) = \varepsilon L(u), \tag{70}$$

gde je L linearan parcijalni diferencijalni operator sa glatkim koeficijentima i $\varepsilon > 0$. Kako su predstavnici elemenata iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$ nizovi glatkih funkcija, u $\mathcal{G}_s(\Omega)$ jednačina (69) može da se interpretira kao

$$\sum_{j=1}^{n} f_j'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \tag{71}$$

$u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, rešenje od (71), zvaćemo *(jako) uopšteno rešenje.* Primetimo da ovaj koncept možemo koristiti i za rešavanje neodrživih jednačina, [b, cclr, clr]. Ipak, ovako formulisana jednačina ne dozvoljava prekidna rešenja, jer različiti održivi oblici od (71) mogu biti ekvivalentni u $\mathcal{G}_s(\Omega)$, a davati različite uslove na prekidima (skokovima). Zbog toga ćemo posmatrati jednačinu

$$\sum_{j=1}^{n} f_j'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \approx 0. \tag{72}$$

Rešenje ove jednačine, $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, zvaćemo *aproksimativno rešenje.*

U daljem radu, za funkciju f pretpostavićemo da je

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \text{ glatka funkcija najviše polinomijalnog rasta} \\ &\qquad\qquad \text{čiji su izvodi takođe najviše polinomijalnog rasta.} \end{aligned} \tag{73}$$

Ova pretpostavka nam treba da bismo imali dobro definisanu kompoziciju funkcije i uopštene funkcije.

Primedba 5. (*ı*) *Pod pretpostavkom (73), svako jako rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ je aproksimativno rešenje. Da bismo to videli podsetimo se definicija ovih pojmova i šta one zapravo znače. Ako je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ jako rešenje, to znači da je $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0$ u $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Dalje, ako je $u = [(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}]$, onda je*

$$div\, f(u) = \left[\left(\frac{\partial f_1(u_\varepsilon)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n(u_\varepsilon)}{\partial x_n} \right)_\varepsilon \right] = 0,$$

što znači da

$$\left(\frac{\partial f_1(u_\varepsilon)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n(u_\varepsilon)}{\partial x_n}\right)_\varepsilon \in \mathcal{N}_s(\Omega),$$

tj.

$$\sup_{x\in K}\left|\partial^\alpha\left(\frac{\partial f_1(u_\varepsilon)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n(u_\varepsilon)}{\partial x_n}\right)\right| \leq c\varepsilon^M,\ \varepsilon \to 0$$

za sve K, M, α. *Sa druge strane,* $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ *je aproksimativno rešenje ako*

$$\frac{\partial f_1(u_\varepsilon)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n(u_\varepsilon)}{\partial x_n} \to 0 \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega),\ \text{kad } \varepsilon \to 0.$$

Sada je jasno da jednakost u $\mathcal{G}_s(\Omega)$ *implicira asociranost.*

(*ii*) *Ako je* $v \in L^\infty(\Omega)$ *slabo rešenje od (69) (što znači da je* $\operatorname{div} f(v) = 0$ *u* $\mathcal{D}'(\Omega)$*), onda je* $u = \iota(v) = [(v * \rho_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ *aproksimativno rešenje. Naime, kako* $v * \rho_\varepsilon \to v$ *u* L^1_{loc}*, onda i* $f(v * \rho_\varepsilon) \to f(v)$*. Stoga* $\operatorname{div} f(v * \rho_\varepsilon) \to 0$*, što znači da je* $\operatorname{div} f(u) \approx 0$. $\square$

U mnogim slučajima, jednačina (70) ima klasično rešenje u_ε za sve $\varepsilon > 0$, i tada gotovo uvek važi princip maksimuma, pa stoga imamo da je niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ograničeni podskup od $L^\infty(\Omega)$. Sada ćemo pokazati kako se iz takvog niza konstruiše aproksimativno rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$.

Definicija 8. *Za* $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ *reći ćemo da je ograničenog tipa, ako ima predstavnika* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}[\Omega]$*, koji je ograničeni niz u* $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 10. *Neka* f *zadovoljava (73). Ako postoji niz* $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^\infty(\Omega)$*, ograničen u* $L^\infty(\Omega)$*, tako da* $\operatorname{div} f(v_\varepsilon) \to 0$ *u* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *kad* $\varepsilon \to 0$*, tada postoji aproksimativno rešenje* $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ *jednačine* $\operatorname{div} f(u) \approx 0$*, i* u *je ograničenog tipa.*

Dokaz: U slučaju da je $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ niz umerenih glatkih funkcija, tj. $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}[\Omega]$, možemo uzeti klasu tog niza za traženo rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$. U opštem slučaju, prvo ćemo uglačati niz $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, a onda izvesti zavisnost od ε na sledeći način. Neka je $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\phi \subset \Omega$, čiji je integral jednak jedan i neka je $\phi_\delta(x) = \delta^{-n}\phi(\frac{x}{\delta})$. Za fiksirano $\varepsilon > 0$, imamo da $v_\varepsilon * \phi_\delta \to v_\varepsilon$ u $L^1_{loc}(\Omega)$ kad $\delta \to 0$, i da je $v_\varepsilon * \phi_\delta$ ograničena nezavisno od δ u $L^\infty(\Omega)$, a od ranije imamo da je ograničena nezavisno i od ε. Neka je, dalje, $(K_m)_{m\geq 1}$ niz kompaktnih podskupova od Ω koji pokriva Ω. Možemo naći strogo opadajući niz pozitivnih brojeva $(\delta_m)_{m\geq 1}$, koji konvergira ka nuli, takav da je

$$\|v_{1/m} * \phi_\delta - v_{1/m}\|_{L^1(K_m)} \leq \frac{1}{m}, \qquad \text{za } 0 < \delta \leq \delta_m.$$

Definišimo jednu rastuću, po delovima konstantnu funkciju $\eta : (0, \infty) \to (0, 1]$

$$\eta(\varepsilon) = \frac{1}{m}, \quad \text{za } \delta_m < \varepsilon \leq \delta_m, \quad m \geq 1,$$
$$\eta(\varepsilon) = 1, \quad \text{za } \varepsilon \geq \delta_1,$$

i preko nje traženi niz

$$u_\varepsilon = v_{\eta(\varepsilon)} * \phi_\varepsilon, \text{ za } \varepsilon \in (0, \infty).$$

Primetimo da je svaka funkcija u_ε glatka, da familija $(v_{\eta(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ ima istu L^∞-granicu kao i $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ i da je $\partial^\alpha u_\varepsilon = v_{\eta(\varepsilon)} * \varepsilon^{-|\alpha|}(\partial^\alpha \phi)_\varepsilon$. Odatle imamo da je $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ umeren niz glatkih funkcija. Neka je u njegova klasa u $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Jasno, u je ograničenog tipa. Po definiciji, imamo da je

$$\|u_\varepsilon - v_{\eta(\varepsilon)}\|_{L^1(K_m)} \leq \frac{1}{m}, \quad \text{za } \delta_{m+1} < \varepsilon \leq \delta_m,$$

odakle imamo da $u_\varepsilon - v_{\eta(\varepsilon)} \to 0$ u $L^1_{loc}(\Omega)$. Štaviše, obe familije su ograničene u $L^\infty(\Omega)$. Stoga imamo da

$$f(u_\varepsilon) - f(v_{\eta(\varepsilon)}) = (u_\varepsilon - v_{\eta(\varepsilon)}) \int_0^1 \nabla f\big(\tau u_\varepsilon + (1-\tau) v_{\eta(\varepsilon)}\big)\, d\tau,$$

takođe konvergira ka nuli u $L^1_{loc}(\Omega)$, a odatle i

$$div\, f(u_\varepsilon) - div\, f(v_{\eta(\varepsilon)}) \to 0, \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{74}$$

Uslov teoreme je da $div\, f(v_\varepsilon) \to 0$, a kako je $v_{\eta(\varepsilon)}$ podniz niza v_ε to isto važi i za $v_{\eta(\varepsilon)}$. Stoga iz (74) dobijamo da $div\, f(u_\varepsilon) \to 0$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$, što znači da je $div f(u) \approx 0$. $\square$

U prethodnom poglavlju smo videli da slična tvrđenja važe i za meroznačna rešenja zakona održanja, stoga je bilo prirodno pretpostaviti da postoji izvesni vid ekvivalencije između ova dva koncepta.

3.2. **Ekvivalencija aproksimativnih i meroznačnih rešenja.**

Teorema 11. *a) Neka je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ uopštena funkcija ograničenog tipa, koja zadovoljava $div\, f(u) \approx 0$. Tada svaka Young-ova mera $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ konstruisana iz podniza svakog predstavnika od u je mv-rešenje sistema $div\, f(u) = 0$.*

b) Ako je $u \approx i(v)$, za neko $v \in L^\infty(\Omega)$, tada je $v(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda)$ za skoro sve $x \in \Omega$.

Dokaz. a) Neka je $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ ograničenog tipa, tj. $||u_\varepsilon||_{L^\infty} < M$, za neko $M > 0$ i za sve ε. Tada, na osnovu Young-ove teoreme (teorema 2, poglavlja Young-ova mera) imamo da postoji podniz $(u_{\varepsilon_k})_k$ i familija mera $(\mu_x)_x$, $supp\, \mu_x \subset [-M, M]$ na $\mathbb{R}$, definisanih za skoro sve $x \in \Omega$, tako da za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ imamo slabu* konvergenciju $g(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow \bar{g}$, $g(x) \equiv \int g\, d\mu_x$, u $L^\infty(\Omega)$. Specijalno, za naše funkcije f_j, imamo da

$$w^* - \lim_{k\to\infty} f_j(u_{\varepsilon_k}) = \bar{f}_j, \quad \text{u } L^\infty(\Omega).$$

Ali kako je u aproksimativno rešenje, znamo da važi

$$div f(u_{\varepsilon_k}) \to 0, \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Tako dobijamo da je

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\int f_j\, d\mu_x\right] = 0, \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega),$$

što kompletira dokaz da je Young-ova mera $(\mu_x)_{x\in\mathbb{R}}$ konstruisana iz podniza svakog predstavnika od u, mv-rešenje sistema $div\, f(u) = 0$.

b) Specijalno, iz Young-ove teoreme imamo da $u_{\varepsilon_k} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\mu_x(\lambda)$, odakle imamo da, ako je neko $v \in L^\infty(\Omega), i(v) \approx u$, tada je $v(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda)$, *s.s.* $\square$

Primedba 6. *Čak i ako je $i(v) \approx u$ za neko $v \in L^\infty(\Omega)$, može da se dogodi da različiti podnizovi proizvode različite Young-ove mere. To je povezano sa činjenicom da $g(u)$, u opštem slučaju, nije asocirano sa $g(i(v))$. U ovom smislu, $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ može da se posmatra kao predstavnik familije Young-ovih mera. Problem jedinstvenosti diskutovaćemo na kraju ovog poglavlja.*

Teorema 12. *a) Neka je $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ mv-rešenje sistema $div\, f(u) = 0$. Tada postoji niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}[\Omega]$, čija klasa u je ograničenog tipa i zadovoljava $div\, f(u) \approx 0$.*

b) Štaviše, ovaj niz indukuje jedinstvenu Young-ovu meru koja je jednaka sa $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ za skoro sve $x \in \Omega$, i $i(v) \approx u$, gde je $v(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda)$.

Dokaz. a) Neka je $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ mv-rešenje sistema $div\, f(u) = 0$. Tada na osnovu diskusije iz poglavlja Yung-ova mera (v. str. 25) imamo da postoji uniformno ograničeni niz $(v_k)_k \subset L^\infty(\Omega)$ koji indukuje $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ kao Young-ovu meru. To znači da

$$v_k \to v \text{ slabo* u } L^\infty,\ k \to \infty$$

i da za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

$$g(v_k) \to \bar{g} \text{ slabo* u } L^\infty,\ k \to \infty$$

gde je $\bar{g}(x) = \int g\, d\mu_x$. Odatle imamo da kad $k \to \infty$

$$\underbrace{\sum \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(v_k)}_{div\, f(v_k)} \longrightarrow \underbrace{\sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\int f_j\, d\mu_x\right]}_{\int div\, f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)},\ \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Ova granična vrednost je nula, jer je $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ mv-rešenje sistema $div\, f(u) = 0$. Dakle dobili smo da je

$$\lim_{k\to\infty} \sum \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(v_k) = 0 \ \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sada samo primenimo teoremu 10, iz koje dobijemo da postoji aproksimativno rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ jednačine $div\, f(u) \approx 0$, i u je ograničenog tipa.

b) Za dokaz ovog dela trebaće nam teorema 10. Kako za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $g(v_k) \to \bar{g}$, slabo* u L^∞, $k \to \infty$, imamo da svi podnizovi od v_k indukuju istu Young-ou meru. Za novi niz v_m uzećemo $v_{\frac{1}{m}}$ iz dokaza teoreme 10, tj. imaćemo

$$v_{\eta(\varepsilon)} = v_m, \qquad \text{za } \delta_{m+1} < \varepsilon \le \delta_m,\ m \ge 1.$$

Sada formiramo $u_\varepsilon = v_{\eta(\varepsilon)} * \phi_\varepsilon$ i $u = [(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}] \in \mathcal{G}_s(\Omega)$. Iz dokaza teoreme 10 znamo da $u_\varepsilon - v_{\eta(\varepsilon)} \to 0$, u $L^1_{loc}(\Omega)$, $\varepsilon \to 0$. Stoga i $g(u_\varepsilon) - g(v_{\eta(\varepsilon)}) \to 0$, u $L^1_{loc}(\Omega)$, $\varepsilon \to 0$, za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, tj. $(g(u_\varepsilon))_\varepsilon$ i $(g(v_{\eta(\varepsilon)}))_\varepsilon$ imaju iste slabe* limese u $L^\infty(\Omega)$, za sve g. Odatle sledi da $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ i $(v_{\eta(\varepsilon)})_\varepsilon$ indukuju istu Young-ovu meru. Sada postaje jasno da je $u \approx i(v) = i(\lim_{k\to\infty} v_k)$ i da je $v(x) = \int \lambda\, d\mu_x(\lambda)$. $\square$

Primedba 7. *I u ovom slučaju nemamo jedinstvenost, tj. uopštena funkcija u definisana u dokazu teoreme 12 nije jedinstvena, kao ni Young-ova mera $(\mu_x)_x$ iz teoreme 11. Nejedinstvenost proizilazi iz činjenice da je ideal $\mathcal{N}_s(\Omega)$ strogo manji od prostora L^1_{loc}-nula nizova, koji je strogo manji od prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$-nula nizova, a znamo da za uniformno ograničene nizove $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, $(w_\varepsilon)_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, koji, redom, indukuju Young-ove mere $(\mu_x)_x$ i $(\nu_x)_x$ važi*

$$[(v_\varepsilon)_\varepsilon] = [(w_\varepsilon)_\varepsilon] \ u\ \mathcal{G}_s(\Omega) \iff (v_\varepsilon - w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_s(\Omega),$$
$$(\mu_x)_x = (\nu_x)_x,\ s.s.\ u\ \mathcal{Y}(\Omega) \iff v_\varepsilon - w_\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ u\ L^1_{loc}(\Omega),$$
$$[(v_\varepsilon)_\varepsilon] \approx [(w_\varepsilon)_\varepsilon] \ u\ \mathcal{G}_s(\Omega) \iff v_\varepsilon - w_\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ u\ \mathcal{D}'(\Omega).$$

Stoga, ako predstavnici dve uopštene funkcije indukuju istu Young-ovu meru, one će biti asocirane, a neće biti jednake u $\mathcal{G}_s(\Omega)$.

Dodatak A. O Radonovim merama

Radonove mere se definišu na Hausdorfovom prostoru, X, sa topologijom τ. Izvorna definicija podrazumeva par mera (M, m), gde je m esencijalna mera asocirana sa M, što znači da je

$$m(A) = \sup\{M(B)|B \subset A,\ M(B) < \infty\},$$

koji ima sledeće osobine:

($\imath$) M je *spoljno regularna,* tj. za sve $O \in \tau$,

$$M(O) = \inf\{M(V)|O \subset V,\ V \text{ je otvoren }\}.$$

($\imath\imath$) M je *lokalno konačna,* tj.

svaka tačka ima okolinu konačne mere M.

($\imath\imath\imath$) m je *unutrašnje regularna,* tj. za sve $O \in \tau$,

$$m(O) = \sup\{m(K)|K \subset O,\ K \text{ je kompaktan }\}.$$

($\imath\imath\imath\imath$) $m = M$ na otvorenim i skupovima konačne mere M.

Posledica osobine ($\imath\imath$) je da svi kompaktni skupovi imaju konačnu meru M.

Izvornoj definiciji ekvivalentne su sledeće dve definicije.

Definicija 9. *M je Radonova mera ako je lokalno konačna , spoljno regularna i za svaki otvoren skup U važi*

$$M(U) = \sup\{M(K)|K \subset\subset U\}.$$

Definicija 10. *m je Radonova mera ako je lokalno konačna i unutrašnje regularna.*

Više o Radonovim merama u [s1, ps].

Dodatak B. O funkcijama i merama ograničene varijacije

B.1. BV **funkcije.** Neka je $u : J \to \mathbb{R}^n$. Totalna varijacija se definiše kao

$$\mathrm{TotVar}(u) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{N} |u(x_{j+1}) - u(x_j)| \ : N,\ x_1 < ... < x_N \right\}.$$

Za u kažemo da je funkcija ograničene varijacije ako je $TotVar(u) < \infty$. Navešćemo neke od osobina ovih funkcija. BV-funkcije imaju najviše prebrojivo mnogo prekida. Granične vrednosti $\lim_{x\to x_0^+} u(x)$ i $\lim_{x\to x_0^-} u(x)$ su dobro definisane kao i granične vrednosti u beskonačnosti. Uz eventualno redefinisanje najviše prebrojivo mnogo vrednosti ovih funkcija, dobijamo da su one desno neprekidne. Bitno je da za svaku BV-funkciju u postoji po delovima konstantna funkcija v, tako da je $||u - v||_{L^\infty} \leq \varepsilon$ i $\mathrm{TotVar}(v) \leq \mathrm{TotVar}(u)$. Imamo i ocenu da je

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+\varepsilon) - u(x)|\, dx \leq \mathrm{TotVar}(u).$$

Za ovakve funkcije važe slične teoreme kao za Young-ove mere. Navešćemo jednu od njih:

Teorema 1 (Helly). Neka je $u_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ niz BV-funkcija, takvih da je $\mathrm{TotVar}(u_\varepsilon) \leq c$ i $|u_\varepsilon(x)| \leq M$. Tada postoji podniz (isto indeksiran) koji konvergira ka funkciji koja ima iste osobine kao niz, tj.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = u(x); \quad \mathrm{TotVar}(u) \leq c; \quad |u| \leq M.$$

Dokaz ove teoreme i više osobina BV-funkcija može se naći npr. u [br].

B.2. BV_{loc}**.** Neka je $u = u(y_1, ..., y_n)$. $u \in BV_{loc}$ ako i samo ako su njeni distribucioni izvodi $D_{y_j}u$ mere, tj. ako za sve kompaktne skupove K postoji konstanta $c_K > 0$ tako da je

$$\left| \int_K u \frac{\partial \phi}{\partial y_j}\, dy \right| \leq c_K ||\phi||,$$

za sve $\phi \in C_c^1$, $\operatorname{supp}\phi \subset K$.

B.3. BV **mere.** Totalna varijacija mere μ, na σ-algebri skupa X, je skupovna funkcija definisana sa

$$\begin{aligned}\mathrm{TotVar}(\mu) \equiv & v(\mu, A) \\ := & \sup\{\sum_{j=1}^{N} |\mu(A_j)| \ : N,\ A_j \subset A,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j\}.\end{aligned}$$

Za μ kažemo da je mera ograničene varijacije ako je $\mathrm{TotVar}(\mu) < \infty$. U tom slučaju je TotVar mera na istoj σ-algebri. Primetimo da je tada μ konačna, jer važi

$$|\mu(x)| \leq v(\mu, X).$$

Skup svih mera ograničene varijacije obeležava se sa CA i on je Banahov prostor sa normom definisanom sa

$$||\mu|| = v(\mu, X).$$

Više o merama ograničene varijacije u [s1].

Dodatak C. O kompenzovanoj kompaktnosti

Kompenzovana kompaktnost je u uskoj vezi sa Young-ovim merama. Oba ova pojma služe za dobijanje jake iz slabe konvergencije, jer znamo da

$$g(w - \lim u_\varepsilon) \neq w - \lim g(u_\varepsilon)$$

i

$$g(s - \lim u_\varepsilon) = s - \lim g(u_\varepsilon).$$

Da bismo obezbedili jaku konvergenciju nizu koji slabo konvergira potrebne su nam dodatne pretpostavke. To može biti uniformna ograničenost izvoda (u tačkastoj ili usrednjenoj konvergenciji) ili kompaktnost u strogoj topologiji.

Ako, naprimer, imamo sistem od dva zakona održanja, koji je (strogo) hiperboličan i prirodno nelinearan, L^1-(jaku) kompaktnost (pod)niza aproksimativnih rešenja možemo dobiti uz uslov da imamo $W^{-1,2}$-kompaktnost svih entropijskih polja.

Ekvivalentan uslov tome je da se asocirana Young-ova mera redukuje na Dirakovu.

Više o kompenzovanoj kompaktnosti u [dp1,t,t1].

Spisak koji sledi obuhvata literaturu korišćenu za oba seminarska rada.

Literatura

[ba] Balder, E., *New fundamentals of Young measure convergence,* in *Calculus of Variations and Differential Equations* (A.Ioffe, S. Reich and I. Shafrir, eds.), Chapman and Hall/CRC Research Notes in Math. 410, CRC Press, Boca Raton, (1999), 24-48.

[b] Biagioni, H. A., *A Nonlinear Theory of Generalized Functions* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.

[bmo] Biagioni, H. A., Oberguggenberger, M., *Generalised solutions to Burgers equation,* J. Diff. Eq. 97(2) (1992), 263-287.

[br] Bressan, A, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, S.I.S.A., Italy, 2000.

[bcml] Bernard, S., Colombeau, J. F., Meril, A., Remaki, L., *Conservation Laws with Discontinuous Coefficients*, J. Math. Anal. Appl. 258, (2001), 63-86.

[cclr] Cauret, J.J., Colombeau, J. F., Le Roux, A.Y., *Discontinuous Generalised Solutions of Nonlinear Nonconservative Hyperbolic Equations*, J. Math. Anal. Appl. 139(2), (1989).

[c] Colombeau, J. F., *Elementary Introduction in New Generalized Functions*, North Holland 1985.

[c0] Colombeau, J. F., *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*, North Holland 1985.

[c1] Colombeau, J. F., *The elasto-plastic shock problem as an example of the resolution of ambiguities in the multiplication of distributioms*, J. Math. Phys. 30(10) (1989), 2273-2279.

[ch] Colombeau, J.F., Heibig, A., *Nonconservative products in bounded variation functions*, SIAM J.Math.Anal. 23(4)(1992), 941-949.

[clr] Colombeau, J. F., Le Roux, A.Y., *Multiplications of distributions in elasticity and hidrodinamics*, J. Math. Phys. 29 (1988), 315-319.

[clrnp] Colombeau, J. F., Le Roux, A.Y., Noussair, A., Perrot, B., *Microscopic profiles of shock waves and ambiguities in multiplications of distributions*, SIAM J. Numer. Anal. 26(4) (1989) 871-883.

[cmo] Colombeau, J. F., Oberguggenberger, *Approximate generalized solutions and measure valued solutions to conservation laws*, preprint.

[dp2] DiPerna, R.J., *Generalized solutions to conservation laws* ,In : J.M. Ball (Ed.), Systems of nonlinear partial differential equations : NATO ASI Series, C.Reidel, 1983.

[dp] DiPerna, R.J., *Measure-valued solutions to conservation laws.*, Arch.Rat.Mech.Anal. 88 (1985), 223-270.

[dp1] DiPerna, R.J., *Compensated compactness and general systems of conservation laws*, Trans. AMS 292(2) (1985), 383-410.

[dpm] DiPerna, R.J., Majda, A.J., *Oscillations and Cconcentracions in weak solutions of the incompressible fluid equations.*, Commun. Math. Phys. 108, (1987) 667-689.

[gkos] Grosser, M., Kunzinger, M., Oberguggenberger, M., Steinbauer, R., *Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity*, Kluwer Acadenic Publishers, 2001.

[e] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.

[e2] Evans, L.C., *Weak convergence methods for nonlinear partial differentional equations* , A.M.S., Providence, 1990.

[fed] Federer, H., *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1969.

[f] Friedlander, F.G., *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1982, 1998.

[h] Hörmander,L., *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer-Verlag, 1997.

[k] Kato,T., *The Caushy problem for quasi-linear symetric hyperbolic systems*, Arch.Rat.Mech,Anal. 58 (1975), 181-205.

[kk] Keyfitz, B. L., Kranzer, H. C., *Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions*, J. Diff. Eq. 118(2) (1995), 420-451.

[kr] Kružik, M., *DiPerna - Majda measures and uniform integrability*, J. Math. Anal. App. 198 (1996), 830-843. Article No. 0115

[krr] Kružik, M., Roubìček, T., *Explicit characterizacion of L^p- Young measures*, Comment.Math.Univ.Carolinae 39(3) (1998), 511-523.

[l2] Lax, P.D., *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation.*, Comm.Pure Appl.DMath. 7 (1954), 169-193.

[l1] Lax, P.D., *Shock waves and entropy*, in Contribution to Nonlinear Functional Analysis, ed. E:A:Zarantonello, Academic Press, (1971), 603-634.

[l] Lax, P.D., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and mathematical theory of shock waves*, CBMS Monograph No11, SIAM (1973).

[ll] Lax, P.D., Levermore, D., *The zero dispersion limit for Korteweg de Vries equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 76(8) (1979), 3602-3606.

[lef] Le Floch, P., *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form*, Comm.part.Diff.Eq. 13 (1988), 669-727.

[lef1] Le Floch, P., *Hyperbolic Systems of Conseravtion Laws - the theory of Classical and Nonclassical Shock Waves,* Birkhäuser Verlag, Basel 2002.

[marc] Marcati, P., *Approximate solutions to scalar conservation laws via degenerate diffusion,* Hyperbolic equations (Padua, 1985), 272–277, Pitman Res. Notes Math. Ser., 158, Longman Sci. Tech., Harlow, 1987.

[mp] Marcati, P., *Approximate solutions to conservation laws via convective parabolic equations.* Comm. Partial Differential Equations 13 (1988), no. 3, 321–344.

[mn] Nedeljkov M., Delta and singular delta locus for one dimensional systems of conservation laws, to appear in Math. Mod. Appl. Sci.

[mo] Oberguggenberger, M., *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations*, Pitman Res. Not. Math. 259, Longman Sci. Techn., Essex 1992.

[mo2] Oberguggenberger, M., *Case study of a nonlinear, nonconservative, nonstrictlyhyperbolic system*, Nonlin. Anal. Th. Meth. Appl., 19(1) (1992), 53-79.

[mow] Oberguggenberger, M., Wang, Y.-G., Generalized solutions to conservation laws, Zeitschr. Anal. Anw. 13 (1994), 7-18.

[pps] Perišić,D., Pilipović, S,. Stojanović, M., *Funkcije više promenjljivih diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu, 33 Edicija univerzitetski udžbenik 1997.

[ps] Pilipović, S,. Stanković, B., *Prostori distribucija*, SANU, Ogranak u Novom Sadu, 2000.

[r] Rauch, J., *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York, Inc., 1991.

[ru] Rudin, W., *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc. 1987, 1974, 1966

[s] Schwartz, L., *Théorie des ditributions* , Nouvele ed., Hermann, Paris 1996.

[s1] Schwartz, L., *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, Tata Institute of Fundamental Reasearch, 1973.

[se] Serre, D., *Systems of Conseravation Laws 1 - Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves* Cambridge University Press, 1999.

[sm] Smoller, J., *Schock Waves and Reaction-Diffusion Eguations* Springer, Berlin 1983.

[st] Strauss, W.A., *Partial Differential Equations - an introduction*, John Wiley & Sons, Inc. 1992.

[t] Tartar, L., *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, In : R.J. Knops (Ed.), Nonlinear Analysis and Machanics : Heriot-Watt Symposium IV. Pitman, London, 1979.

[t1] Tartar, L., *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws* , In : J.M. Ball (Ed.), Systems of nonlinear partial differential equations : NATO ASI Series, C.Reidel, 1983.

[vh] Vol'pert, A.I., Hundjaev, S.I., *Analysis in Classes of Discontinuous Functions of Mathematical Physics*, Martinns Nijhoff Publ., Dordrecht, 1985.

[vvv] Vol'pert, A.I., Vol'pert, V.A.,Vol'pert, V.A., *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, AMS 1994.

[y] Yang, H., *Riemann problems for a class of coupled hyperbolic systems of conservation laws,* J. Diff. Eq. 159 (1999), 447-484.

[ylc] Young, L. C., *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory* W.B. Saunders Company, 1969.

[w] Whitham, G.B., *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, New York , 1974.

[sem1] Aleksić, J., *Slaba i uopštena rešenja zakona održanja*, seminarski rad, Departman za matematiku, Univerzitet u Novom Sadu, 2004.