TEZA-verzija

Jelena Aleksić

November 28, 2005

Predgovor

Magistarska teza posvećena je izučavanju Colombeau-ovskih i meroznačnih rešenja nekih klasa nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tačnije posmatrana je jednačina oblika

$$\mathrm{div} f(u) = 0, \tag{1}$$

za koju smo uspostavili izvestan vid ekvivalencije dva pomenuta koncepta rešenja, odnosno pokazali smo da L^p-Young-ove mere, kao meroznačna rešenja jednačine (1), indukuju aproksimativna rešenja p-ograničenog tipa, i obratno. Pre toga, sličan vid ekvivalencije pokazan je za L^∞-Young-ove mere i aproksimativna rešenja ograničenog tipa, [11]. Zatim smo posmatrali i Euler-ove jednačine na koje smo primenili koncept uopštenih Young-ovih mera, i pomoću toga dobili aproksimativna rešenja Euler-ovih jednačina. Na Euler-ove jednačine nije dovoljno primeniti samo klasičnu teoriju Young-ovih mera, jer se u nizu rešenja Navier-Stokes-ovih jednačina, iz kojeg dobijamo rešenje Euler-ove jednačine, pojavljuju i oscilacije i koncentracije, a klasičan koncept Young-ovih mera pokriva samo problem oscilacija. Zbog toga smo na ove jednačine primenili koncept uopštenih Young-ovih mera.

♢ ♢ ♢

Teza je podeljena na tri dela. U prvom poglavlju dali smo uvodne napomene i potrebnu klasičnu teoriju, kao i objašnjenja kako su neki

pojmovi o kojima smo pisali u tezi nastali. Stoga smo pisali o pojmu zakona održanja i njihovim slabim rešenjima kao prvom konceptu neklasičnih rešenja. Zatim smo ispričali kako su nastala uopštena rešenja, tj. šta je bila Colombeau-ova ideja kada je konstruisao prvu algebru uopštenih funkcija. Za svaku analizu konvergencije rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina potrebni su nam pojmovi slabe i slabe* konvergencije. Uvodno poglavlje završavamo napomenama o merama koje se pojavljuju u tezi i funkcijama i merama ograničene varijacije.

U drugom poglavlju predstavljena su dva koncepta rešenja kao i veza između njih. Prvi koncept meroznačnih rešenja uveo je Roland DiPerna, koje je iskoristio Young-ove mere kao rešenja zakona održanja. Posmatrane su specijalne klase Young-ovih mera, tzv. L^p-Young-ove mere, za $1 \leq p \leq \infty$. One rešavaju problem nekompatibilnosti slabe konvergencije i nelinearne kompozicije. Drugi koncept predstavlja Colombeau-ove uopštene funkcije kao rešenja zakona održanja. Za ovaj koncept, najzaslužniji su J.F.Colombeau i M. Oberguggenberger. Aproksimativna rešenja su rešenja u Colombeau-ovim algebrama, gde je jednakost zamenjena relacijom asociranosti.

U trećem poglavlju dato je uopštenje Young-ovih mera, za koje su najzaslužniji DiPerna i Majda, zbog kojih su kasnije te mere i nazvane po njima. Većinu ovog poglavlja čine rezultati iz njihovog rada [15]. Uopštene Young-ove mere se pod imenom DiPerna-Majda-mere prvi put pojavljuju u radovima čeških matematičara, Kružìk i Roubìček. Ovaj koncept primenjen je na Navier-Stokes-ove jednačine u cilju dobijanja rešenja Euler-ovih jednačina. Mi smo ga iskoristili kako bismo dobili Colombeau-ovska rešenja istih.

♢ ♢ ♢

Na ovom mestu želim da izrazim svoju zahvalnost svima koji su me podržavali i pomagali mi tokom izrade magistarske teze.

Zahvaljujem se mom suprugu, mojoj majci, rođacima i prijateljima koji su mi pružali izuzetnu moralnu podršku. Posebno sam zahvalna studentkinji Maji Tasković, koja mi je pomogla u čitanju ovog teksta u potrazi za štamparskim greškama.

Zahvaljujem se svim mojim bivšim profesorima i ujedno sadašnjim kolegama koji su probudili u meni interesovanje za matematiku i želju za naučnim radom.

Posebno sam zahvalna članovima svih komisija za ocenu i odbranu ove magistarske teze, profesorki Mirjani Stojanović, profesoru Vojislavu Mariću, profesoru Michael Oberguggenberger-u, profesoru Marku Nedeljkov i profesoru Stevanu Pilipoviću, što su dali niz korisnih sugestija u cilju poboljšanja kvaliteta teze.

Za sam početak mog bavljenja ovom disciplinom najzaslužniji su profesor Marko Nedeljkov i asistent Mirjana Vuletić, koji su me zainteresovali za ovu oblast u toku letnjeg semestra šk. 2000/01, tokom kursa Parcijalne diferencijalne jednačine. Zahvaljujući profesoru Nedeljkov odlučila sam da izučavam zakone održanja u toku postdiplomskih studija.

Izuzetno sam zahvalna profesoru Michael Oberguggenberger na gostoprimstvu i neiscrpnim diskusijama u toku mog boravka u Innsbruck-u, od februara do jula 2004., gde je i nastala ideja za ovu magistarsku tezu.

Na kraju, posebno bih želela da se zahvalim mentoru, profesoru Stevanu Pilipoviću, koji mi je uvek predstavljao neiscrpan izvor znanja i konstantno pružao snažnu podršku tokom čitavih studija. Od njega sam puno naučila tokom proteklih godina i sigurna sam da bez njegovog usmeravanja ova teza ne bi imala sadašnji oblik.

♢ ♢ ♢

Magistarska teza je izrađena u okviru projekta MNTR Metode funkcionalne analize u rešavanju PDJ i ODJ sa singularitetima.

Novi Sad, 2005.

Jelena Aleksić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Zakoni održanja

Pojam *zakon održanja* govori da je brzina promene totalne količine supstance sadržane u nekom fiksiranom domenu G jednaka njenom fluksu na rubu domena G. Ako gustinu te supstance označimo sa u, fluks sa f, zakon održanja je jednačina

$$\frac{d}{dt}\int_G u dx = -\int_{\partial G} f \cdot n dS, \tag{1.1}$$

gde je n spoljašnja normala na G, a dS element površine ∂G. Kada primenimo teoremu o divergenciji na desnu stranu jednačine (1.1) i diferenciramo pod integralom sa leve strane, dobijamo

$$\int_G u_t dx = -\int_G div f dx,$$

odnosno,

$$\int_G (u_t + \mathrm{div} f) dx = 0.$$

Ako su svi parcijalni izvodi funkcija u i f neprekidni, dobijamo zakon održanja u divergentnom obliku

$$u_t + \mathrm{div} f = 0. \tag{1.2}$$

1.1.1 Slaba rešenja zakona održanja

U potrazi za neklasičnim rešenjima razvila su se tri ekvivalentna koncepta slabih rešenja: Lax-ov, distributivni i integralni oblik. Prvi koncept potiče od Lax-a.

Definicija 1 Funkcija $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ je *slabo rešenje* zakona održanja (1.2) ako za sve test funkcije $\phi \in C^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\phi_t u + \phi_x f(u)\big) dxdt = 0 \tag{1.3}$$

Drugi koncept predstavljaju slaba rešenja u distributivnom smislu. Ovde za prostor test funkcija uzimamo $\mathcal{D}(\Omega) \equiv C^\infty_0(\Omega)$, gde je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^2_+$. Prostor distribucija je prostor neprekidnih linearnih funkcionela $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, za koje važi

$$\big(\forall K \subset\subset \Omega\big)\big(\exists c > 0\big)\big(\exists m \in \mathbb{N}\big)\big(\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\big)\, \mathrm{supp}\, \phi \subset K \Rightarrow$$
$$|\langle T, \phi\rangle| \leq c \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Da bi zakon održanja imao smisla, dovoljno je da u i $f(u)$ budu distribucije. Kako f ne mora biti linearna, moramo pretpostaviti da je u merljiva funkcija tako da je $f(u)$ definisana tačkasto. Tada kažemo da je u *slabo rešenje* jednačine (1.2) na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^2_+$ ako je $u \in L^1_{loc}(\Omega), f(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ i ako za sve test funkcije $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi

$$\iint_\Omega \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dxdt = 0.$$

Treći koncept predstavlja slaba rešenja u tzv. *integralnom obliku.*

Definicija 2 Funkcija $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ je *slabo rešenje* zakona održanja (1.2) ako za skoro sve $x_0, x \in \mathbb{R}$ i $t_0, t \geq 0$ važi

$$\int_{x_0}^{x} (u(y,t) - u(y,t_0))dy + \int_{t_0}^{t} \big(f(u(x,s)) - f(u(x_0,s))\big)\, ds = 0. \quad (1.4)$$

Pojam slabih rešenja proširuje koncept klasičnih rešenja. Lako se može proveriti da je svako klasično rešenje takođe i slabo.

Teorema 1 *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*
a) *u je slabo rešenje u smislu definicije* 1.
b) $u_t + f(u)_x = 0$ *u* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+)$.
c) *u je slabo rešenje u integralnom obliku, tj. u smislu definicije* 2.
Štaviše, preslikavanje $t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,t)u(x,t)dx$ *je neprekidno za sve* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Dokaz ove teoreme, kao i više o slabim rešenjima dali smo u [1].

1.1.2 Uopštena rešenja, Colombeau-ova ideja

Pokušavajući da definiše množenje distribucija, J.F. Colombeau je konstruisao multiplikativne algebre u koje se distribucije mogu potopiti. Prva ideja je bila da se koriste C^∞ ili holomorfne funkcije na $\mathcal{D}(\Omega)$, prostoru C^∞ kompleksoznačnih funkcija na Ω, otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$ sa kompaktnim nosačem. Prirodno bi bilo definisati proizvod dve distribucije T_1 i T_2 na Ω kao preslikavanje

$$\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \longmapsto \langle T_1, \phi\rangle \cdot \langle T_2, \phi\rangle \in \mathbb{C},$$

ali taj koncept pada već na primeru množenja dve C^∞ funkcije, jer za $f_1, f_2 \in C^\infty$ i $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ uglavnom važi

$$\int f_1(x)\phi(x)\, dx \cdot \int f_2(x)\phi(x)\, dx \neq \int f_1(x)f_2(x)\phi(x)\, dx\,.$$

U cilju prevazilaženja ovog problema, ali ne odbacivši ideju o korišćenju C^∞ ili holomorfnih funkcija na $\mathcal{D}(\Omega)$, došla je ideja definisanja faktor algebre.

$\mathcal{D}(\Omega)$ je gust u $\mathcal{E}'(\Omega)$, topološkom dualu C^∞ funkcija (zove se i prostor distribucija na Ω sa kompaktnim nosačem), stoga je $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega)) \subset C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$ inkluzija definisana preko restrikcije

$$\Phi \in C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega)) \longmapsto \Phi|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in C^\infty(\mathcal{D}(\Omega)),$$

koja je injekcija, [9], [4].

Za $f_1, f_2 \in C^\infty(\Omega)$, klasični proizvod $f_1 \cdot f_2$ poklapa se sa preslikavanjem

$$T \in \mathcal{E}'(\Omega) \mapsto \langle T, f_1\rangle\langle T, f_2\rangle \in \mathbb{C}$$

na skupu $\{\delta_x : x \in \Omega\}$, Dirac-ovih mera u tački x. Stoga je Colombeau posmatrao sledeću relaciju ekvivalencije r na $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$, $R_1, R_2 \in C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$:

$$R_1 \; r \; R_2 \iff R_1(\delta_x) = R_2(\delta_x), \text{ za sve } x \in \Omega.$$

Ako sa A označimo preslikavanje

$$R \in C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega)) \longmapsto [x \mapsto R(\delta_x)] \in C^\infty(\Omega)$$

tada $R \in Ker\, A \iff R \; r \; 0$. Stoga su algebre $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))/Ker\, A$ i $C^\infty(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{E}'(\Omega), \mathbb{C})$ izomorfne. Refleksivnost prostora $C^\infty(\Omega)$ je dobro poznat klasični rezultat.

Novi koncept izvoda u $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$, Colombeau je definisao uopštavanjem izvoda u smislu distribucija koji, preko preslikavanja A, odgovara standardnim izvodima u $C^\infty(\Omega)$. Tražio je ideal od $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$, čiji je presek sa $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$ baš $Ker\, A$.

Neka je

$$\mathcal{A}_q := \Big\{ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \int \psi(x)dx = 1, \int x^i \psi(x)dx = 0, \text{ za } i \in \mathbb{N}^n, 1 \le |i| \le q \Big\}.$$

Dalje, sa $\phi_{\varepsilon,x}$ označavamo elemente iz $\mathcal{A}_q$, oblika

$$\phi_{\varepsilon,x}(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{\lambda - x}{\varepsilon}\right) \quad , \lambda \in \mathbb{R}^n,\ \phi \in \mathcal{A}_q.$$

Ako je $R \in Ker\, A$, za dato $q \in \mathbb{N}, \phi \in \mathcal{A}_q$ i $K \subset\subset \Omega$, postoje $c > 0$ i $\eta > 0$ tako da važi

$$|R(\phi_{\varepsilon,x})| \leq c\,\varepsilon^{q+1} \qquad \text{za sve } x \in K,\ 0 < \varepsilon < \eta.$$

Ova karakterizacija skupa $Ker\, A$ dala je definiciju traženog ideala od $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$. Kako proizvod elementa iz $Ker\, A$ i elementa iz $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$ može rasti veoma brzo kad $\varepsilon \to 0$, Colombeau je odlučio da posmatra one elemente $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$ koji imaju tzv. umereni rast.

Definicija 3 $\mathcal{E}_M(\mathcal{D}(\Omega))$ je skup svih R elemenata iz $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$ koji imaju sledeću osobinu

$$\text{za sve } K \subset\subset \Omega \text{ i } D = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}},\ 0 \leq |k| < \infty,\ \text{postoji } N \in \mathbb{N}$$

tako da za sve $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje konstante $c > 0, \eta > 0$ tako da

$$|(DR)(\phi_{\varepsilon,x})| \leq c\,\varepsilon^{-N} \quad , \text{ važi za sve } x \in K,\ 0 < \varepsilon < \eta.$$

Očigledno je da je proizvod dva elementa iz $\mathcal{E}_M(\mathcal{D}(\Omega))$ elemenat u $\mathcal{E}_M(\mathcal{D}(\Omega))$, kao i da ako je $R \in \mathcal{E}_M(\mathcal{D}(\Omega))$, onda je i $DR \in \mathcal{E}_M(\mathcal{D}(\Omega))$ za sve parcijalne diferencijalne operatore D. Kao posebni podskupovi od $\mathcal{E}_M(\mathcal{D}(\Omega))$ izdvajaju se $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Za odgovarajući ideal, Colombeau je izabrao sledeći podskup:

Definicija 4 $\mathcal{N}$ je skup svih $R \in \mathcal{E}_M(\mathcal{D}(\Omega))$ sa sledećom osobinom

$$\text{za sve } K \subset\subset \Omega \text{ i } D \text{ postoji } N \in \mathbb{N}$$

tako da za sve $\phi \in \mathcal{A}_q, q \leq N,$ postoje konstante $c > 0, \eta > 0$ tako da

$$|(DR)(\phi_{\varepsilon,x})| \leq c\,\varepsilon^{q-N} \quad , \text{ važi za sve } x \in K, 0 < \varepsilon < \eta.$$

Ovaj ideal zadovoljava početnu ideju,

$$\mathcal{N} \cap C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega)) = Ker\, A.$$

Definicija 5 Faktor algebra

$$\mathcal{G}(\Omega) := \mathcal{E}_M(\mathcal{D}(\Omega))/\mathcal{N}$$

zove se *algebra uopštenih funkcija.*

$\mathcal{G}(\Omega)$ sadrži $C^\infty(\Omega)$ kao podalgebru, jer je $C^\infty(\Omega) = C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega)) = Ker\, A$, kao i $\mathcal{D}'(\Omega)$, jer je $\mathcal{N} \cap \mathcal{D}'(\Omega) = 0$.

Ovo je bila prva Colombeau-ova definicija uopštenih funkcija, a posle toga definisane su i algebre $\mathcal{G}_g, \mathcal{G}_s$ koje se intenzivnije koriste u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina.

1.2 Slaba i slaba* konvergencija na Banahovom prostoru i njegovom dualu

Potsetimo se klasičnih rezultata funkcionalne analize o slaboj konvergenciji. Na Banahovom prostoru X, čiji je dual X', slabu topologiju $\sigma(X, X')$ definišemo preko familije seminormi $\{p_{x'} : x' \in X'\}$ date sa $p_{x'}(x) = |(x, x')|$. Ako je dual X' separabilan (ima prebrojiv gust skup), onda je ova topologija metrizabilna na ograničenim skupovima u X. Slaba konvergencija niza x_n ka x znači

$$(x_n, x') \to (x, x'), \quad \forall x' \in X'.$$

Na dualu X' definišemo slabu* topologiju $\sigma(X', X)$ preko familije seminormi $\{q_x : x \in X\}$ date sa $q_x(x') = |(x', x)|$. Ako je X separabilan, onda je ova topologija metrizabilna na ograničenim skupovima u

X' i slaba* konvergencija niza x'_n ka x' znači

$$(x, x'_n) \to (x, x'), \quad \forall x \in X.$$

Jedinična lopta u X' je slabo* kompaktna u ovoj topologiji.

Mi ćemo posmatrati prostore $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, i $M(\Omega)$, prostor Radon-ovih mera, gde je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ snabdeven Lebesque-ovom merom. Dual prostora $L^p(\Omega)$ je izometričen prostoru $L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$. Iz ograničenog niza f_n u $L^p(\Omega)$ možemo izdvojiti podniz f_m koji slabo, odnosno slabo*, konvergira ka nekom f, ako je $1 < p < \infty$, odnosno $p = \infty$, tj.

$$\int_\Omega f_m g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx, \quad \forall g \in L^q(\Omega).$$

Prostor $L^1(\Omega)$ se može izometrički potopiti u $M_b(\Omega)$, prostor konačnih mera, koji je dual prostora $\mathcal{C}_b(\Omega)$, prostora neprekidnih ograničenih funkcija sa supremum normom. Iz ograničenog niza f_n u $L^1(\Omega)$ možemo izdvojiti podniz f_m koji slabo* konvergira ka meri μ, tj.

$$\int_\Omega f_m g \, dx \to \langle \mu, g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{C}_b(\Omega).$$

Prostor mera $M(\Omega)$ nije Banahov, ali za svaki kompaktni $K \subset\subset \Omega$, ako sa $X_K = \mathcal{C}^0_K(\Omega)$ obeležimo prostor neprekidnih funkcija sa nosačem u K i supremum normom, tada je $M(\Omega)$ podprostor X'_K i možemo koristiti slabu* topologiju na X'_K. Tada iz niza ograničenog u svim X'_K izdvajamo podniz koji je slabo* konvergentan u X'_K, za prebrojivo mnogo kompaktnih skupova čija je unija Ω.

Na prostoru $M(\Omega)$ slaba konvergencija definiše se na sledeći način:

$$\mu_k \rightharpoonup \mu \iff \big(\forall K\big)\big(\forall g \in X_K\big) \int_\Omega g \, d\mu_k \to \int_\Omega g \, d\mu, \ k \to \infty.$$

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2 *Ako $\mu_k \rightharpoonup \mu$ slabo u $M(\Omega)$, onda je*

$$\limsup \mu_k(K) \leq \mu(K)$$

za sve kompaktne skupove $K \subset\subset \Omega$, i

$$\mu(V) \leq \liminf \mu_k(V)$$

za sve otvorene skupove $V \subset \Omega$.

Pod pretpostavkom da je niz aproksimativnih rešenja $\{u_\varepsilon\}$ uniformno (po ε) ograničen u L^∞ imamo ekvivalenciju sledećih slabih konvergencija:

-slaba* konvergencija u L^∞,

-slaba konvergencija u L^p, $1 < p < \infty$,

-konvergencija u smislu distribucija.

U ovom slučaju, pričaćemo o *slaboj konvergenciji*, tj. lokalnoj konvergenciji ocena

$$u = w - \lim u_\varepsilon \iff \int_K u(y)\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_K u_\varepsilon(y) dy,$$

za sve $K \subset\subset \Omega$. Jedan od načina da obezbedimo egzistenciju podniza koji konvergira u odgovarajućoj slaboj topologiji je da dokažemo da za niz $\{u_\varepsilon\}$ važi tzv. lokalna L^p-kontrola

$$\int_K |\{u_\varepsilon\}|^p\, dy \leq const(K),\ K \subset\subset \Omega,$$

koja se lako dobija iz principa maksimuma. Napomenimo još da je u gore pomenutim topologijama jedinična lopta kompaktna, tako da su one dovoljno slabe da obezbede kompaktnost, ali isuviše slabe ba garantuju neprekidnost nelinearne funkcije.

Ekvivalentne jake konvergencije su:

-konvergencija u jakoj topologiji prostora L^1_{loc},

-konvergencija u jakoj topologiji prostora L^p_{loc}, $1 < p < \infty$. U ovom slučaju, pričaćemo o *jakoj konvergenciji*, tj. konvergenciji po normi

$$u = s - \lim u_\varepsilon \iff \int_K |u(y) - u_\varepsilon(y)|\, dy = 0,$$

za sve $K \subset\subset \Omega$.

Ako je niz $\{u_\varepsilon\}$ konvergentan u jakoj topologiji i ako je funkcija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ neprekidna, tada važi

$$g(s - \lim u_\varepsilon) = s - \lim g(u_\varepsilon),$$

što omogućava da jaki limes aproksimativnih rešenja bude ponovo rešenje.

S druge strane, ako niz $\{u_\varepsilon\}$ konvergira u slaboj topologiji, u opštem slučaju, ako nemamo dodatne pretpostavke, imamo

$$g(w - \lim u_\varepsilon) \neq w - \lim g(u_\varepsilon),$$

(v. primere 1, 2 i 3). Stoga je veoma bitno naći pretpostavke pod kojima ćemo iz slabe konvergencije, dobiti jaku. Preciznije, u teoriji zakona održanja pojavljuje se sledeći problem: Za dat slabo konvergentni niz aproksimativnih rešenja, videti pod kojim uslovima će taj niz imati jako konvergentan podniz. Specifičan problem je odrediti uslove pod kojima se jaka konvergencija može dobiti iz slabe ako nemamo uniformne ocene izvoda. Naime, ako dokažemo ili pretpostavimo, da su izvodi od u_ε uniformno ograničeni, iz slabe konvergencije odmah dobijamo jaku. Npr. ako u_ε slabo konvergira ka u i ako su gradijenti uniformno ograničeni u L^p_{loc},

$$\int_K |\nabla u_\varepsilon|^p\, dy \leq const.,$$

onda u_ε jako konvergira ka u. Uopšte, slaba konvergencija i kompaktnost u strogoj topologiji, impliciraju jaku konvergenciju.

Za dobijanje jake iz slabe konvergencije koristi se Young-ova mera i Tartar-Murat-ova teorema o kompenzovanoj (nadoknađenoj) kompaktnosti.

Primer 1 *Daćemo primere koji pokazuju zašto, ako je* $f = w^* - lim f_n$, *ne mora da važi i da je* $\Phi(f) = w^* - lim\Phi(f_n)$. *Krenućemo od jednostavnijeg primera koji je dat u* [17]. *Mi ćemo ga dopuniti dokazima konvergencija koje su samo pomenute u predhodno citiranoj knjizi.*

Dakle, neka su dati brojevi $a < b$ *i* $0 < \lambda < 1$, *za koje važi*

$$\Phi(\lambda a + (1-\lambda)b) \neq \lambda\Phi(a) + (1-\lambda)\Phi(b),$$

i neka je $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. *Formirajmo funkcije* f_k *na sledeći način:*

$$f_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} a, & \frac{j}{k} \leq x \leq \frac{j+\lambda}{k},\ j = 0, ..., k-1 \\ b, & inače \end{array} \right\}.$$

Pokažimo da $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f \equiv \lambda a + (1-\lambda)b$, *u* L^∞. *Neka je* g *proizvoljna funkcija u* $L^1(\Omega)$. *To znači da je* $\int_\Omega |g(x)|\, dx \leq M$, *za neko* $M > 0$, *i za svaki* $K \subset \Omega$, $\int_K |g(x)|\, dx \leq m(K)M_K, M_K > 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f_k g\, dx \right| \leq & |a| \left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+\lambda}{k}} g(x)\, dx \right| + |b| \left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j+\lambda}{k}}^{\frac{j+1}{k}} g(x)\, dx \right| \\ \leq & |a|\, M_1 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda}{k} + |b|\, M_2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1-\lambda}{k} \\ \leq & M_3\, (a\lambda + b(1-\lambda)), \end{aligned}$$

gde su $M_j,\ j = 1, 2, 3$ *pozitivne konstante date sa*

$$M_1 = \max \left\{ M_{\alpha_j} : \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+\lambda}{k}} |g(x)|\, dx \leq m\left(\left[\frac{j}{k}, \frac{j+\lambda}{k} \right] \right) M_{\alpha_j},\ j = 0, ..., k-1, \right\}$$

$$M_2 = \max\Bigg\{ M_{\beta_j} \ : \int_{\frac{j+\lambda}{k}}^{\frac{j+1}{k}} |g(x)|\, dx \le m\left(\left[\frac{j+\lambda}{k}, \frac{j+1}{k}\right]\right) M_{\beta_j},\ j = 0, ..., k-1 \Bigg\}$$

i

$$M_3 = \max\big\{M_1,\ M_2\big\}.$$

Sada posmatrajmo kompoziciju $\Phi(f_k)$. *Ona se slično ponaša kao* f_k. *Naime,*

$$\Phi(f_k)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \Phi(a), & \frac{j}{k} \le x \le \frac{j+\lambda}{k},\ j = 0, ..., k-1 \\ \Phi(b), & \textit{inače} \end{array} \right\},$$

i slično pokažemo da $\Phi(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\Phi} \equiv \lambda\Phi(a) + (1-\lambda)\Phi(b) \ne \Phi(f)$. $\Diamond$

Sledeći primer je malo komplikovaniji, ali će nam trebati kasnije kada budemo eksplicitno konstruisali Young-ovu meru.

Definicija 6 *Niz indukovan skaliranjem periodične funkcije* v je niz funkcija konstruisanih na sledeći način:

$$u_k(x) \equiv v(kx).$$

Poznat je sledeći rezultat.

Lema 1 *Ako je* v *periodična funkcija sa periodom* p, *onda niz indukovan skaliranjem funkcije* v *slabo* konvergira u* L^∞ *ka konstanti*

$$\frac{1}{p}\int_0^p v(s)\, ds.$$

Dokaz.[1] Dokaz ćemo izvesti u tri koraka. Prvo ćemo pokazati da ako za test funkciju $\psi \in L^1$ izaberemo karakterističnu funkciju intervala $[0,p]$, dobijamo jednakost

$$\left\langle v(kt)\,,\,\psi(t)\right\rangle = \left\langle \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\,,\,\psi(t)\right\rangle. \tag{1.5}$$

Neka je ψ karakteristična funkcija intervala $[0,p]$, tj.

$$\psi(x) = \chi_{[0,p]}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Tada važi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} v(kt)\psi(t)\,dt = \int_0^p v(kt)\,dt = \int_0^{kp} v(x)\,\frac{dx}{k}\\
=&\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\int_0^p v(x)\,dx = \frac{1}{k}k\int_0^p v(x)\,dx\\
=&\int_0^p v(x)\,dx = \frac{1}{p}\underbrace{\int_0^p \psi(t)\,dt}_{p}\int_0^p v(x)\,dx\\
=&\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^p v(x)\,dx\right)\psi(t)\,dt\\
=&\left\langle \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\,,\,\psi(t)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

U drugom koraku, za test funkcije biramo karakteristične funkcije intervala oblika $[0,b]$, gde je b proizvoljan pozitivan broj, i pokazujemo sledeću konvergenciju:

$$\left\langle v(kt)\,,\,\psi(t)\right\rangle \longrightarrow \left\langle \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\,,\,\psi(t)\right\rangle,\ k\to\infty. \tag{1.7}$$

[1]Kako nismo mogli naći dokaz ove leme u literaturi, iznosimo naš dokaz i verujemo da postoji i jednostavniji način da se ova lema pokaže.

Neka je ψ karakteristična funkcija intervala $[0, b]$, tj.

$$\psi(x) = \chi_{[0,b]}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Tada važi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(kt)\psi(t)\,dt = \int_0^b v(kt)\,dt = \int_0^{kb} v(x)\,\frac{dx}{k}. \tag{1.8}$$

Za fiksirano k (b i p su pozitivne konstante), postoji jedinstven prirodan broj r takav da je

$$rp \leq kb < (r+1)p. \tag{1.9}$$

Sada nastavljamo niz jednakosti (1.8):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} v(kt)\psi(t)\,dt &= \int_0^b v(kt)\,dt = \int_0^{kb} v(x)\,\frac{dx}{k} \\
&= \frac{1}{k}\int_0^p v(x)\,dx + \ldots + \frac{1}{k}\int_{(r-1)p}^{rp} v(x)\,dx + \frac{1}{k}\int_{rp}^{kb} v(x)\,dx \\
&= \frac{r}{k}\int_0^p v(x)\,dx + \frac{1}{k}\int_{rp}^{kb} v(x)\,dx \\
&= \frac{r}{k}\int_0^p v(x)\,dx + \mathcal{O}(1\backslash k).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx\,,\ \psi(t) \right\rangle &= \frac{1}{p}\int_0^p v(x)\,dx \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt}_{b} \\
&= \frac{b}{p}\int_0^p v(x)\,dx,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

ostaje nam još da pokažemo da (1.10) konvergira ka desnoj strani jednakosti (1.11), kad $k \to \infty$, odnosno da pokažemo da $\frac{r}{k} \to \frac{b}{p}$, kad $k \to \infty$. Mi znamo da r zavisi od k i zbog toga ćemo pisati $r = r(k)$. Takođe znamo da smo $r(k)$ dobili kao jedinstveni prirodan broj koji zadovoljava (1.9), odakle dobijamo da je

$$\frac{b}{p} \geq \frac{r(k)}{k} > \frac{b}{p} - \frac{1}{k}.$$

Tako smo niz $\frac{r(k)}{k}$ uklještili između dva niza koja konvergiraju ka $\frac{b}{p}$, što kompletira dokaz konvergencije (1.7).

I za karakterističnu funkciju proizvoljnog intervala $[a, b]$, $a < b$, dobijamo istu granicu. Ako interval $[a, b]$ sadrži nulu onda ga podelimo na dva intervala $[a, 0]$ i $[0, b]$. Za interval $[a, 0]$ tvrđenje dobijamo isto kao za $[0, b]$, jer se radi o periodičnoj funkciji. Ako interval $[a, b]$ ne sadrži nulu onda ga možemo pretstaviti u obliku $[a, b] = [0, b] \backslash [0, a)$. Stoga smo pokazali da tvrđenje leme važi za sve karakteristične funkcije. Za kompletan dokaz leme potrebno je još samo iskoristiti činjenicu da su karakteristične funkcije guste u L^1. $\square$

Primer 2 *Posmatramo niz funkcija $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indukovan skaliranjem periodične funkcije $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kao što smo videli, imamo*

$$u_k(x) \equiv v(kx), \quad w^* - \lim u_k = \frac{1}{p} \int_0^p v(s)\, ds.$$

Ako je g proizvoljna neprekidna funkcija, niz $g(u_k)$ takođe možemo posmatrati kao niz indukovan skaliranjem periodične funkcije $g \circ v$, pa imamo

$$\begin{aligned} w^* - \lim g(u_k) =& \frac{1}{p} \int_0^p g(v(s))\, ds \\ \neq& g\left(\frac{1}{p} \int_0^p v(s)\, ds\right) \\ =& g(w^* - \lim u_k). \end{aligned}$$

$\Diamond$

Dosadašnji primeri odnosili su se na funkcije definisane na $\mathbb{R}$. Oni se mogu uopštiti i na $\mathbb{R}^n$.

Primer 3 *Neka su $y_1, \dots, y_n$ nezavisni vektori u $\mathbb{R}^n$ i neka je*

$$Y = \{\sum_{i=1}^{n} \theta_i y_i : \ 0 \leq \theta_i \leq 1\}.$$

Dalje, neka je $F(x, y)$ neprekidna ograničena funkcija na $\Omega \times \mathbb{R}^n$, za koju važi

$$F(x, y + y_j) = F(x, y), \quad j = 1, ..., n.$$

Tada, kad $n \to \infty$ niz $f_n(x) = F(x, nx)$ konvergira slabo u L^∞ ka*

$$f(x) = \frac{1}{m(Y)} \int_Y F(x, y)\, dy,$$

gde je $m(Y)$ mera skupa Y. Ipak, slabi, odnosno slabi, limesi nizova f_n i $\Phi(f_n)$ nisu nezavisni. Kao i u prethodnom primeru, ako niz f_n konvergira slabo* u $L^\infty(\Omega)$ ka f i $\Phi(f_n)$ konvergira ka h, onda (ako je Φ konveksna), važi $h(x) \geq \Phi(f(x))$, s.s.*

$\Diamond$

$\Diamond \quad \Diamond \quad \Diamond$

Da bismo razlikovali slabu od jake konvergencije, u tezi ćemo sa $\to$ obeležavati jaku konvergenciju, a sa $\rightharpoonup$ slabu konvergenciju, osim ako nije drugačije naznačeno.

1.3 O Radonovim merama

Radonove mere se definišu na Hausdorfovom prostoru, X, sa topologijom τ. Izvorna definicija podrazumeva par mera (M, m), gde je m esencijalna mera asocirana sa M, što znači da je

$$m(A) = \sup\{M(B)|B \subset A,\ M(B) < \infty\},$$

koji ima sledeće osobine:

1. M je *spoljno regularna,* tj. za sve $O \in \tau$

$$M(O) = \inf\{M(V)|O \subset V,\ V \text{ je otvoren }\}.$$

2. M je *lokalno konačna,* tj. svaka tačka ima okolinu konačne mere M.

3. m je *unutrašnje regularna,* tj. za sve $O \in \tau$,

$$m(O) = \sup\{m(K)|K \subset O,\ K \text{ je kompaktan }\}.$$

4. $m = M$ na otvorenim i skupovima konačne mere M.

Posledica osobine 2. je da svi kompaktni skupovi imaju konačnu meru M.

Izvornoj definiciji ekvivalentne su sledeće dve definicije.

Definicija 7 M je Radonova mera ako je lokalno konačna, spoljno regularna i za svaki otvoren skup U važi

$$M(U) = \sup\{M(K)|K \subset\subset U\}.$$

Definicija 8 m je Radonova mera ako je lokalno konačna i unutrašnje regularna.

Više o Radonovim merama može se naći u [27].

Izvod mere u odnosu na meru

Izvod Radonove mere γ u odnosu na meru σ definiše se preko formule

$$D_\sigma \gamma^k(x) \equiv \lim_{r\to 0} \frac{\gamma(B(x,r))}{\sigma(B(x,r))},$$

gde je $B(x,r)$ lopta sa centrom u x poluprečnika r. Ovaj limes postoji za σ-s.s. $x \in \mathbb{R}^n$. Preslikavanje $x \mapsto D_\sigma\gamma(x)$, je ograničeno i σ-merljivo. Ovakvi izvodi se još nazivaju i simetrični izvodi, [18].

♢ ♢ ♢

U tezi smo koristili sledeće oznake. Ako je G lokalno kompaktan Hausdorf-ov prostor, onda sa $M(G)$ označavamo Radon-ove mere na G, sa $M^+(G)$ nenegativne mere iz $M(G)$, a sa $ProbM(G)$ mere sa jediničnom masom iz $M^+(G)$. $M_b(G)$ označava prostor konačnih mera na G.

Oznaka L^n je rezervisana za Lebesque-ovu meru dimenzije n.

1.4 O funkcijama i merama ograničene varijacije

1.4.1 BV funkcije

Neka je $u : J \to \mathbb{R}^n$. Totalna varijacija se definiše kao

$$\mathrm{TotVar}(u) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{N} |u(x_{j+1}) - u(x_j)| \ : N,\ x_1 < ... < x_N \right\}.$$

Za u kažemo da je funkcija ograničene varijacije ako je $\mathrm{TotVar}(u) < \infty$. Navešćemo neke od osobina ovih funkcija. BV-funkcije imaju najviše prebrojivo mnogo prekida. Granične vrednosti $\lim_{x\to x_0^+} u(x)$ i $\lim_{x\to x_0^-} u(x)$ su dobro definisane kao i granične vrednosti u beskonačnosti. Uz eventualno redefinisanje najviše prebrojivo mnogo vrednosti ovih funkcija, dobijamo da su one desno neprekidne. Bitno je da za svaku BV-funkciju u postoji po delovima konstantna funkcija v, tako da je $||u - v||_{L^\infty} \leq \varepsilon$ i $\mathrm{TotVar}(v) \leq \mathrm{TotVar}(u)$. Imamo i ocenu da je

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+\varepsilon) - u(x)|\, dx \leq \mathrm{TotVar}(u).$$

Za ovakve funkcije važe slične teoreme kao za Young-ove mere. Navešćemo jednu od njih:

Teorema (Helly). Neka je $u_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ niz BV-funkcija, takvih da je $\mathrm{TotVar}(u_\varepsilon) \leq c$ i $|u_\varepsilon(x)| \leq M$. Tada postoji podniz (isto indeksiran) koji konvergira ka funkciji koja ima iste osobine kao niz, tj.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = u(x); \quad \mathrm{TotVar}(u) \leq c; \quad |u| \leq M.$$

Dokaz ove teoreme i više osobina BV-funkcija može se naći npr. u [6].

Neka je $u = u(y_1, ..., y_n)$. $u \in BV_{loc}$ ako i samo ako su njeni distribucioni izvodi $D_{y_j} u$ mere, tj. ako za sve kompaktne skupove K postoji konstanta $c_K > 0$ tako da je

$$\left| \int_K u \frac{\partial \phi}{\partial y_j}\, dy \right| \leq c_K ||\phi||,$$

za sve $\phi \in C_c^1$, $\operatorname{supp} \phi \subset K$.

1.4.2 BV mere

Totalna varijacija mere μ, na σ-algebri skupa X, je skupovna funkcija definisana sa

$$\begin{aligned}\mathrm{TotVar}(\mu) \equiv & v(\mu, A) \\ := & \sup\{\sum_{j=1}^{N} |\mu(A_j)| \ : N,\ A_j \subset A,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j\}.\end{aligned}$$

Za μ kažemo da je mera ograničene varijacije ako je $\mathrm{TotVar}(\mu) < \infty$. U tom slučaju je TotVar mera na istoj σ-algebri. Primetimo da je tada μ konačna, jer važi

$$|\mu(x)| \leq v(\mu, X).$$

Skup svih mera ograničene varijacije je Banahov prostor sa normom definisanom sa

$$||\mu|| = v(\mu, X).$$

Više o merama ograničene varijacije može se naći u [27].

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

Napomenimo još da smo sa $\square$ obeležavali kraj dokaza, a sa $\diamondsuit$ kraj primera.

Glava 2

Aproksimativna i meroznačna rešenja zakona održanja

2.1 Young-ove mere kao meroznačna rešenja

Young-ove mere, u oznaci $\mathcal{Y}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ su slabo merljiva preslikavanja oblika

$$x \in \Omega \mapsto \nu_x \in \mathrm{rca}(\mathbb{R}^m),$$

gde je Ω(otvoren)$\subset \mathbb{R}^n$, a $\mathrm{rca}(\mathbb{R}^m)$ je skup funkcija na Borelovoj σ - algebri na $\mathbb{R}^n$, koje su regularne, prebrojivo aditivne skupovne funkcije i imaju ograničenu totalnu varijaciju. Prostor $\mathrm{rca}(\mathbb{R}^m)$ snabdeven totalnom varijacijom,

$$TV(\mu) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{N} |\mu(A_j)| \;\middle|\; N \in \mathbb{N},\ A_j \subset \mathbb{R}^m, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \right\},$$

kao normom, je Banahov i izometrijski je izomorfan dualu neprekidnih funkcija koje se anuliraju u beskonačnosti,

$$(\mathrm{rca}(\mathbb{R}^m), TV) \cong (C_0(\mathbb{R}^m))'.$$

Slabo merljiva znači da za sve $v \in C_0(\mathbb{R}^m)$, preslikavanje

$$x \in \Omega \mapsto \langle\, \nu_x,\, v \,\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} v(\lambda)\nu_x(d\lambda) \in \mathbb{R}$$

je merljivo.

Skup Young-ovih mera je konveksan podskup prostora

$$L^\infty_w(\Omega; \mathrm{rca}(\mathbb{R}^m)) \cong (L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m)))'.$$

Indeks "w" označava da se radi o slabo merljivim (engl. "weakly measurable") funkcijama.

Mi ćemo se baviti posebnim klasama Young-ovih mera, $\mathcal{Y}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ i $\mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, koje su "indukovane" nizovima funkcija uniformno ograničenih u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$, respektivno, u $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

2.1.1 $L^\infty-$Young-ove mere

Posmatramo niz funkcija

$$u_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

koji konvergira u slaboj* topologiji na L^∞

$$w^* - \lim_{l\to\infty} u_l = u.$$

Takav niz je uniformno ograničen u L^∞ nekim brojem $r > 0$,

$$\|u_l\|_\infty \leq r,$$

i na svakom ograničenom Borel-ovom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ važi

$$\lim_{l\to\infty} \int_\Omega u_l(y)\, dy \;=\; \int_\Omega u(y)\, dy.$$

O slaboj* konvergenciji kompozicije neprekidne realnoznačne funkcije $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ i ovakvog niza govori Young-ova teorema. Ona rešava problem nekompatibilnosti slabe konvergencije i nelinearne kompozicije.

Teorema 3 (Young) *Za svaki niz $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$-ograničenih funkcija $\{u_l\}$, postoji $\{u_k\}$, podniz niza $\{u_l\}$ i Young-ova mera*

$$\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega},$$

tako da za sve $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$,

$$w^* - \lim_{k\to\infty} F(u_k) = \overline{F} \equiv \langle\, \nu\, ,\, F\, \rangle \tag{2.1}$$

gde je

$$\overline{F}(x) := \int_{\mathbb{R}^m} F(\lambda)\, d\nu_x(\lambda), \tag{2.2}$$

za skoro sve $x \in \Omega$.

Primedba 1 Birajući specifične funkcije F u teoremi 3 dobijamo sledeće zaključke.

1. Iz teoreme imamo, stavljajući $F(t) = t$, da i niz u_k konvergira u slaboj* topologiji, i da mu je granica

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda\, d\nu_x,\ x \in \Omega.$$

2. Ako je niz $\{u_k\}$ uniformno ograničen, tj. ako postoji kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^m$, tako da $u_k(x) \in K$, skoro svuda, za sve k, onda je

$\text{supp}\nu_x \subset K$. Ovu osobinu dobijamo ako za F uzmemo funkciju koja se anulira van K. Važi i obrnuto, tj. da svaka Young-ova mera sa kompaktnim nosačem ima L^∞-ograničen niz koji je indukuje. Stoga možemo zaključiti sledeće.

Posledica 1 *Young-ova mera ν je indukovana nizom $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$-uniformno ograničenih funkcija, ako i samo ako*

$$\exists K \subset\subset \mathbb{R}^m, \quad \text{supp}\nu_x \subset K, \qquad \textit{za skoro sve } x \in \Omega.$$

Definicija 9 Familiju mera dobijenu iz niza $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$-uniformno ograničenih funkcija, kao u teoremi 3, zovemo L^∞-*Young-ova mera.* Skup ovako dobijenih Young-ovih mera obeležavamo sa $\mathcal{Y}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Za dokaz Young-ove teoreme koristimo teoremu Radon-Nikodym-a. Sa μ ćemo obeležiti konačnu, nenegativnu, Radonovu meru na $\mathbb{R}^{n+m}$, a sa σ njenu kanoničku projekciju na $\mathbb{R}^n$, tj. $\sigma(E) \equiv \mu(E \times \mathbb{R}^m)$, za sve Borelove skupove $E \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 4 (Radon-Nykodim) *Za σ-s.s. $x \in \mathbb{R}^n$, postoji Radonova probabilistička mera $\nu_x \in ProbM(\mathbb{R}^m)$, tako da*

(*i*) *preslikavanje* $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\nu_x(y)$ *je σ-merljivo*

(*ii*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\nu_x(y) \right) d\sigma(x),$

za sve ograničene, neprekidne funkcije f.

Dokaz teoreme 4: Podelićemo dokaz na tri dela.

1. Neka je $\{f_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ prebrojiv, gust podskup skupa ograničenih neprekidnih funkcija. Njemu pridružujemo Radonove mere

$$\gamma^k(E) = \int_{E\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y), \quad k = 1, 2, ...$$

definisane na $\mathbb{R}^n$, tj. za sve Borelove skupove $E \subset \mathbb{R}^n$. Jasno je da je $\gamma^k \ll \sigma$. Dalje, za σ-s.s. $x \in \mathbb{R}^n$ postoji limes

$$\begin{aligned} D_\sigma \gamma^k(x) &\equiv \lim_{r\to 0} \frac{\gamma^k(B(x,r))}{\sigma(B(x,r))} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{\int_{B(x,r)\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y)}{\int_{B(x,r)\times\mathbb{R}^m} d\mu(x,y)}, \quad k = 1,2,... \end{aligned} \tag{2.3}$$

i preslikavanja $x \mapsto D_\sigma \gamma^k(x)$, $k = 1,2,...$ su ograničena (jer su funkcije f_k neprekidne i ograničene), σ-merljiva i za svaki Borelov skup $E \subset \mathbb{R}^n$ važi

$$\int_{E\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y) = \gamma^k(E) = \int_E D_\sigma \gamma^k(x)\, d\sigma(x), \quad k = 1,2,... \tag{2.4}$$

Ovde smo koristili teoriju simetričnih izvoda, [18].

2. Sada fiksirajmo funkciju $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ i izaberimo podniz $\{f_{k_j}\}_{j\geq 1} \subset \{f_k\}_{k\geq 1}$ koji konvergira ka f, uniformno na $\mathbb{R}^m$. Kako f_{k_j} uniformno konvergira ka f, izvodi $D_\sigma \gamma^{k_j}(x)$ će biti uniformno ograničeni, pa će za σ-s.s. $x \in \mathbb{R}^n$ postojati limes

$$\begin{aligned} \Gamma_x(f) &\equiv \lim_{j\to\infty} D_\sigma \gamma^{k_j}(x) \\ &= \lim_{j\to\infty} \lim_{r\to 0} \frac{\int_{B(x,r)\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y)}{\int_{B(x,r)\times\mathbb{R}^m} d\mu(x,y)}, \quad k = 1,2,... \end{aligned} \tag{2.5}$$

i neće zavisiti od izbora podniza koji aproksimira f. Ako fiksiramo x dobijemo preslikavanje $\big[\, f \mapsto \Gamma_x(f) \,\big] \in \big(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)\big)'$, ograničenu linearnu funkcionelu na $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$. Stoga postoji Radonova mera ν_x na $\mathbb{R}^m$ za koju važi

$$\Gamma_x(f) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\nu_x(y), \quad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m).$$

S druge strane, ako fiksiramo $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$, dobijamo ograničeno, σ-merljivo preslikavanje $\big[\, x \mapsto \Gamma_x(f) \,\big]$, pa iz (2.4) imamo

$$\begin{aligned}\int_{E\times\mathbb{R}^m} f(y)\, d\mu(x,y) &= \int_E \lim_{j\to\infty} D_\sigma \gamma^{k_j}(x)\, d\sigma(x) = \int_E \Gamma_x(f)\, d\sigma(x) \\ &= \int_E \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\nu_x(y) \right) d\sigma(x),\end{aligned} \tag{2.6}$$

za sve $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ i E (Borelov) $\subset \mathbb{R}^n$.

3. Ako sada postupak aproksimacije nizom funkcija opisan u drugom delu dokaza primenimo na funkciju $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$, iz (2.6) dobijamo

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} g(x) f(y)\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\nu_x(y) \right) d\sigma(x), \tag{2.7}$$

za neprekidne, ograničene funkcije f, g. Ako stavimo $f \equiv 1$ u (2.7), dobijamo da je $\nu_x(\mathbb{R}^m) = 1$, σ-s.s.

Dakle, dobili smo tvrđenje u specijalnom slučaju, kada se neprekidna i organičena funkcija na $\mathbb{R}^{n+m}$ može napisati u obliku $g(x)f(y)$. Ali svaka neprekidna i organičena funkcija na $\mathbb{R}^{n+m}$ može se lokalno uniformno aproksimirati konačnim sumama oblika $\sum_{i=1}^N g^i(x) f^i(y)$ za neprekidne i organičene $g^i,\ f^i,\ i = 1, ..., N$, što kompletira naš dokaz. $\square$

Dokaz teoreme 3: I ovaj dokaz podelićemo na tri dela.

1. Definišimo meru

$$\mu_k(E) \equiv \int_\Omega \chi_E(x, f_k(x))\, dx, \quad k = 1, 2, ...$$

za svaki Borelov skup $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Kako je

$$\mu_k(\Omega \times \mathbb{R}^m) = L^n(\Omega) < \infty,$$

za sve k, imamo da su $\mu_k(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ uniformno ograničene po k. Stoga postoji podniz $\{\mu_{k_j}\}_{j\geq 1} \subset \{\mu_k\}_{k\geq 1}$ koji slabo konvergira ka nenegativnoj meri μ, tj. postoji $\mu \in M^+(\Omega \times \mathbb{R}^m)$, tako da $\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu$, u $M^+(\Omega \times \mathbb{R}^m)$. (Ovde smo sa $\rightharpoonup$ obeležili slabu konvergenciju, a L^n označava Lebesque-ovu meru dimenzije n.)

2. Dalje tvrdimo da je projekcija od μ na $\mathbb{R}^n$ $n-$dimenzionalna Lebesque-ova mera restrikovana na Ω. Obeležićemo projekciju sa σ. Dakle tvrdimo

$$\sigma = L^n|_\Omega.$$

Kako je μ_{k_j} slabo konvergentan niz Radon-ovih mera koji konvergira ka μ imamo da za otvoren skup $V \subset \Omega$ važi

$$\sigma(V) = \mu(V \times \mathbb{R}^m) \leq \liminf \mu_{k_j}(V \times \mathbb{R}^m) = L^n(V).$$

Stoga je $\sigma \leq L^n|_\Omega$. S druge strane, neka je $K \subset\subset \Omega$. Kako je $\{f_{k_j}\}_j$ ograničen u $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$, postoji $R > 0$ tako da su nosači mera μ_{k_j} i μ sadržani u $\Omega \times B(0; R)$. Tako dobijamo da je

$$\begin{aligned}\sigma(K) =& \mu(K \times \mathbb{R}^m) = \mu(K \times B(0, R)) \\ &\geq \limsup \mu_{k_j}(K \times B(0, R)) = L^n(K),\end{aligned}$$

odakle imamo da je $\sigma \geq L^n|_\Omega$, tj. $\sigma = L^n|_\Omega$.

Ovde smo koristili osobine slabo konvergentnih Radonovih mera datih u sledećoj lemi.

Lema 2 *Ako $\mu_k \rightharpoonup \mu$ u $M(\Omega)$, onda je*

$$\limsup \mu_k(K) \leq \mu(K)$$

za sve kompaktne skupove $K \subset\subset \Omega$, i

$$\mu(V) \leq \liminf \mu_k(V)$$

za sve otvorene skupove $V \subset \Omega$.

3. Iz teoreme 4 zaključujemo da postoji za σ-s.s. $x \in \Omega$ Borelova probabilistička mera ν_x, tako da

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,d\mu(x,y) = \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\nu_x(y) \right) d\sigma(x),$$

za neprekidne, ograničene funkcije f. Stavimo $f(x,y) = \xi(x)F(y)$, gde su $\xi \in \mathcal{C}_b(\Omega)$, $F \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$. Tada je

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \xi(x)F(f_{k_j}(x))\,dx &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,d\mu_{k_j}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,d\mu(x,y) \\ &= \int_\Omega \xi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(y)\,d\nu_x(y) \right) dx \\ &= \int_\Omega \xi(x)\overline{F}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Napomenimo još da smo dokaz izveli za ograničenu neprekidnu funkciju F. Isto važi i ako je F samo neprekidna. Kako su u_{k_j} ograničene uniformno, npr. $\|u_{k_j}\| \le M$, u jednakosti (2.8) F posmatramo samo na skupu $\{y : \|y\| \le M\}$, a van tog skupa je možemo redefinisati da bude nula. $\square$

Primer 4 *Konstruisaćemo eksplicitno Young-ovu meru u jednom primeru.*

Posmatramo niz funkcija $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indukovan skaliranjem periodične funkcije $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.,

$$u_k(x) \equiv v(kx).$$

Takav niz ima sledeću osobinu.

Lema 3 *Ako je v periodična funkcija sa periodom p, onda niz indukovan skaliranjem funkcije v slabo* konvergira u L^∞ ka konstanti*

$$\frac{1}{p}\int_0^p v(s)\,ds.$$

Dokaz ove osobine dali smo u odeljku 1.2, lema 1. Dakle, imamo

$$u_k(x) \equiv v(kx), \quad w^* - \lim u_k = \frac{1}{p}\int_0^p v(s)\,ds.$$

Ako je g proizvoljna neprekidna funkcija, niz $g(u_k)$ takođe možemo posmatrati kao niz indukovan skaliranjem periodične funkcije $g \circ v$, pa imamo

$$\begin{aligned} w^* - \lim g(u_k) =& \frac{1}{p}\int_0^p g(v(s))\,ds \\ \neq& g\left(\frac{1}{p}\int_0^p v(s)\,ds\right) \\ =& g(w^* - \lim u_k). \end{aligned}$$

Tako dobijamo nenegativnu ograničenu linearnu funkcionelu koja deluje na neprekidne funkcije g i može se predstaviti kao probabilistička mera ν:

$$\frac{1}{p}\int_0^p g(v(s))\,ds = \langle\, \nu\,,\, g(\lambda)\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\,d\nu.$$

Zaključujemo da ako je niz u_k indukovan skaliranjem periodične funkcije v, njemu asocirana Young-ova mera ne zavisi od x i data je slikom normalizovane Lebesque-ove mere kompozicije funcije v_* i karakterisične funkcije χ_p intervala $[0,p]$:

$$\nu_x = \nu = v_*\left(\frac{\chi_p\,ds}{p}\right).$$

Ovde smo sa v_* označili takozvanu "push forward" transformaciju funkcije v. Ona je povezana sa tzv. "pull back" transformacijom. Naime ako imamo neko preslikavanje v iz prostora X u Y, onda se "pull back" definiše na sledeći način: $v^* : \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X)$, $(v^* f)(x) = f(v(x))$, za $f \in \mathcal{C}(Y)$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\langle\, v^* f(x)\,,\, \phi(x)\,\rangle =& \langle\, f(v(x))\,,\, \phi(x)\,\rangle \\ =& \Big\langle\, f(y)\,,\, \phi(v^{-1}y)\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^{-1}\,\Big\rangle \\ =& \langle\, f(y)\,,\, (v_*\phi)(y)\,\rangle\end{aligned}$$

Tako dobijamo preslikavanje $v_* : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$,

$$(v_*\phi)(y) = \phi(v^{-1}(y))J^{-1},$$

gde smo sa J obeležili Jakobijan $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

Kada ovaj račun primenimo na primer dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\int_0^p g(v(s))\,ds = \langle\, g(\lambda)\,, d\nu\,\rangle = \int g(\lambda)d\nu,\\ \Big\langle\, v^* g\,,\, \frac{\chi_p}{p}\,ds\,\Big\rangle =& \langle\, g(\lambda)\,,\, d\nu\,\rangle,\\ \Big\langle\, g\,,\, v_*\Big(\frac{\chi_p}{p}\,ds\Big)\,\Big\rangle =& \langle\, g\,,\, d\nu\,\rangle.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Young-ove mere karakterišu i jaku konvergenciju niza $\{u_k\}_k$. Naime, iz uniformne ograničenosti niza $\{u_k\}_k$ u $L^\infty(\Omega)$ imamo da ako niz konvergira u jakoj topologiji na $L^p_{loc}(\Omega)$ za neko $p:\ 1 \le p < \infty$, onda on konvergira u jakoj topologiji na $L^q_{loc}(\Omega)$ za sve $q:\ 1 \le q < \infty$, tj. važi

$$\lim_{l\to\infty}\int_K |u_k(y) - u(y)|^q\,dy = 0\ ,$$

za sve $K \subset\subset \mathbb{R}^m$ i za sve $q: \ 1 \leq q < \infty$. Ako je to slučaj, reći ćemo da niz $\{u_k\}_k$ *jako konvergira.*

Posledica 2 *Niz $\{u_k\}_k$ jako konvergira ka u ako i samo ako je Young-ova mera u skoro svim tačkama x jednaka Dirac-ovoj meri u $u(x)$, tj.*

$$\nu_x = \delta_{u(x)} \quad , \text{ za skoro sve } x. \tag{2.9}$$

Dokaz posledice 2. Neka važi (2.9). Da bismo pokazali jaku konvergenciju dovoljno je pokazati da za neko $p: \ 1 \leq p < \infty$ niz konvergira u jakoj topologiji na L^p_{loc}. Mi ćemo pokazati za $p = 2$. Iz teoreme 3 imamo da je

$$w^* - \lim g(u_k) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\, d\nu_y = \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\, d\delta_{u(y)} = g(u),$$

tj.,

$$w^* - \lim g(u_k) = g(u). \tag{2.10}$$

Izaberimo funkciju g koja je strogo konveksna. To znači da je

$$Qg(\lambda, \lambda_0) := g(\lambda) - g(\lambda_0) - \nabla g(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) \geq c|\lambda - \lambda_0|^2. \tag{2.11}$$

Kako je $w^* - \lim u_k = u$, imamo da je $\lim_{k\to\infty} \int_K (u_k - u)\, dy = 0$, odakle je $\lim_{k\to\infty} \int_K \nabla g(u)(u_k - u)\, dy = 0$, što uz (2.10) daje da je

$$\lim_{k\to\infty} \int_K Qg(u_k, u)\, dy = 0, \tag{2.12}$$

za sve $K \subset\subset \Omega$. Iz (2.11) imamo da je

$$|u_k - u|^2 \leq c_1 Qg(u_k, u),$$

odakle uz (2.12) imamo da je

$$\lim_{l\to\infty} \int_K |u_k(y) - u(y)|^2\, dy = 0 \ ,$$

tj. da niz u_k konvergira u jakoj topologiji na $L^2_{loc}(\Omega)$.
Za dokaz drugog smera trebaće nam Jensen-ova nejednakost.

Lema 4 (Jensen-ova nejednakost) *Neka je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathcal{M}$ na skupu Ω, takva da je $\mu(\Omega) = 1$. Ako je $f \in L^1(\mu)$ realna funkcija za koju važi $a < f(x) < b$, za sve $x \in \Omega$ i ako je ϕ konveksna na intervalu (a, b), onda je*

$$\phi\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) \leq \int_\Omega (\phi \circ f)\, d\mu. \tag{2.13}$$

Jednakost u (2.13) *dobijamo ako i samo ako je μ Dirac-ova mera.*

Dokaz Jensen-ove nejednakosti može se naći npr. u [26].

Pokažimo sada drugi smer tvrđenja. Ako u_k jako konvergira onda (2.10) važi za sve g. Kako je

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda\, d\nu_x \equiv \langle \nu_x, \lambda \rangle,$$

imamo

$$\begin{aligned} \langle \nu_x, g(\lambda) \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\, d\nu_x \; &= \; w^* - \lim g(u_k) \\ &= g(u) = g(\langle \nu_x, \lambda \rangle), \end{aligned}$$

za sve g i skoro sve y, odnosno,

$$\langle \nu_x, g(\lambda) \rangle = g(\langle \nu_x, \lambda \rangle), \tag{2.14}$$

za sve g i skoro sve x.

Izaberimo neku funkciju g koja je strogo konveksna. Tada nam Jensen-ova nejednakost daje

$$\langle \nu_x, g(\lambda) \rangle \geq g(\langle \nu_x, \lambda \rangle),$$

a jednakost važi ako i samo ako je ν_x Dirac-ova mera, što smo i želeli da pokažemo. $\square$

2.1.2 L^p-Young-ove mere

Za dalje uopštavanje Young-ovih mera zaslužna je Maria Schonbek, [28], koja je 1982. godine definisala L^p-Young-ove mere, za $1 < p < +\infty$, kao Young-ove mere indukovane ograničenim nizovima L^p-funkcija. Kasnije je isto tvrđenje pokazano i za $p = 1$. Za slabo konvergentan niz L^p-funkcija važi klasičan rezultat:

Lema 5 *Ako niz $u_k \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ slabo konvergira ka nekom u u $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, onda postoji $r > 0$ tako da važi*

$$\|u_k\|_{L^p} \leq r,$$

uniformno za sve u_k, i

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k(y)\, dy = \int_\Omega u(y)\, dy,$$

za sve ograničene Borelove skupove Ω.

Za L^p-ograničene nizove važi teorema Young-ovog tipa.

Teorema 5 *Svaki uniformno ograničen niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $1 < p < +\infty$, ima podniz, isto indeksiran, i postoji Young-ova mera $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega} \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, tako da za sve $v \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^m)$*

$$v \circ u_k \rightharpoonup v_\nu \equiv \bar{v} \equiv \langle\, \nu\, , v\, \rangle,$$

kad $k \to \infty$, u $L^1(\Omega)$, gde je $v_\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} v(\lambda)\, \nu_x(d\lambda)$ i $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^m)$ prostor neprekidnih funkcija koje u beskonačnosti ne rastu brže od polinoma stepena p, tj. $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^m) = \{v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m) : v(\lambda) = o(|\lambda|^p),\ |\lambda| \to \infty\}$.

I za ovakav niz važi teorema o jakoj konvergenciji. Naime, ovakav niz jako konvergira ako i samo ako je

$$\nu_x = \delta_{u(x)}, \quad \text{za skoro sve } x \in \Omega.$$

Definicija 10 Familiju mera dobijenu iz niza $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$-uniformno ograničenih funkcija, kao u teoremi 5, zovemo *L^p-Young-ove mere.* Skup ovako dobijenih Young-ovih mera obeležavamo sa $\mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Karakterizaciju skupa Young-ovih mera indukovanih L^P-ograničenim nizom, uradili su Kružík i Roubíček, [21].

Teorema 6 *Neka je $1 \leq p < \infty$. Tada $\nu = \{\nu_x\}_x \in \mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ ako i samo ako*

$$\begin{aligned} &1. \quad \nu \in \mathcal{Y}(\Omega;\mathbb{R}^m) \ i \\ &2. \quad \left[x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda)\right] \in L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je (2.15) dovoljan uslov. Dokaz ovog smera izvešćemo u četiri koraka.

<u>1.korak</u>: Konstrukcija aproksimativnih L^∞-Young-ovih mera ν^ρ.

Neka je $\rho \in \mathbb{N}$, i $B_\rho = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : |\lambda| \leq \rho\}$. Definišimo "cutoff"-preslikavanja $r^\rho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$r^\rho(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| \leq \rho \\ 1 + \rho - |\lambda|, & \rho \leq |\lambda| \leq \rho + 1 \\ 0, & |\lambda| \geq \rho + 1 \end{cases},$$

i preslikavanja $s^\rho : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} s^\rho(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \big(1 - r^\rho(\lambda)\big) \, d\nu_x(\lambda) \\ &= \int_{\rho \leq |\lambda| \leq \rho+1} (|\lambda| - \rho) \, d\nu_x(\lambda) + \int_{|\lambda| \geq \rho+1} d\nu_x(\lambda) \\ &= \int_{B_1} |\lambda| \, d\nu_x(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_{\rho+1}} d\nu_x(\lambda), \end{aligned} \tag{2.16}$$

preko kojih definišemo aproksimativne mere $\nu^\rho = \{\nu_x^\rho\}_x$,

$$\nu_x^\rho = r^\rho \nu_x + s^\rho(x)\delta_0.$$

Ovako definisane mere ν_x^ρ su Radonove, probabilističke i $\mathrm{supp}\nu_x^\rho \subset B_{\rho+1}$, a preslikavanje $x \mapsto \nu_x^\rho$ je slabo merljivo. Dakle, ν_ρ je Young-ova mera.

<u>2.korak</u>: Konvergencija ν_ρ na ν.

Dakle, krenuli smo od $\nu = \{\nu_x\}_x \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ i napravili niz Young-ovih mera $\nu^\rho = \{\nu_x^\rho\}_x$,

$$\nu_x^\rho = r^\rho \nu_x + s^\rho(x)\delta_0.$$

Hoćemo da pokažemo da

$$\nu^\rho \rightharpoonup \nu, \quad \rho \to \infty,$$

tj. za sve $v \in \mathcal{C}_p(\Omega; \mathbb{R}^m)$,

$$\langle\, \nu^\rho \,,\, v \,\rangle \rightharpoonup \langle\, \nu \,,\, v \,\rangle, \quad \rho \to \infty, \text{ slabo u } L^1,$$

tj. za sve $\phi \in L^\infty(\Omega)$ i za sve $v \in \mathcal{C}_p(\Omega; \mathbb{R}^m)$

$$\langle\, \langle\, \nu^\rho \,,\, v \,\rangle \,,\, \phi \,\rangle \longrightarrow \langle\, \langle\, \nu \,,\, v \,\rangle \,,\, \phi \,\rangle, \quad \rho \to \infty.$$

Neka je $\phi \in L^\infty(\Omega)$. Imamo,

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big(v_\nu(x) - v_{\nu^\rho}(x)\Big)\phi(x)\Big| = \\
&= \left|\left(\int_{\mathbb{R}^m} v(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) - \int_{\mathbb{R}^m} v(\lambda)\, d\nu_x^\rho(\lambda)\right)\phi(x)\right| = \\
&= \left|\left(\int_{\mathbb{R}^m} v(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) - \int_{\mathbb{R}^m} v(\lambda) r^\rho(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \int_{\mathbb{R}^m} v(\lambda) s^\rho(x)\, \delta_0(d\lambda)\right)\phi(x)\right| \\
&\le \left|\int_{\mathbb{R}^m} (1 - r^\rho(\lambda)) v(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\phi(x)\right| + \big|s^\rho(x)\phi(x)v(0)\big| \\
&\le \underbrace{\big|v(0)s^\rho(x)\phi(x)\big|}_{T_\rho^1(x)} + \underbrace{\big|\phi(x)\big| \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\rho} |v(\lambda)|\, d\nu_x(\lambda)}_{T_\rho^2(x)}
\end{aligned}$$

Iz definicije preslikavanja s^ρ, (2.16), vidimo da je

$$|s^\rho| \le 1 \text{ i } \lim_{\rho\to\infty} s^\rho(x) = 0, \text{ za s.s. } x \in \Omega,$$

kao posledica Lebesque-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji, jer je $\lim_{\rho\to\infty}(1 - r^\rho(\lambda)) = 0$, za sve $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Tako dobijamo da

$$T_\rho^1(x) \to 0, \text{ za s.s. } x \in \Omega.$$

Takođe imamo da je

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\rho} |v(\lambda)|\, d\nu_x(\lambda) = 0, \text{ za s.s. } x \in \Omega,$$

jer je $|\langle\, \nu\, ,\, v\, \rangle| < +\infty$, skoro svuda na Ω i $\bigcap_{\rho=1}^\infty (\mathbb{R}^m \setminus B_\rho) = \emptyset$. Tako dobijamo da i

$$T_\rho^2(x) \to 0, \text{ za s.s. } x \in \Omega.$$

Uvešćemo skraćenicu

$$C(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda),$$

kako bismo dobili ocene

$$\begin{aligned} T^1_\rho(x) =& \big|v(0)s^\rho(x)\phi(x)\big| \leq \big|v(0)\big| \, \big|\phi(x)\big| \\ T^2_\rho(x) =& \big|\phi(x)\big| \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_\rho} |v(\lambda)| \, d\nu_x(\lambda) \leq \big|\phi(x)\big| \int_{\mathbb{R}^m} |v(\lambda)| \, d\nu_x(\lambda) \\ \leq& \big|\phi(x)\big| \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \frac{v(\lambda)}{1+|\lambda|^p}(1 + C(x)). \end{aligned}$$

Stoga je,

$$\begin{aligned} \Big|\Big(v_\nu(x) - v_{\nu^\rho}(x)\Big)\phi(x)\Big| \leq& T^1_\rho(x) + T^2_\rho(x) \\ \leq& \big|\phi(x)\big| \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \frac{v(\lambda)}{1+|\lambda|^p}(2 + C(x)). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Iz uslova 2. u (2.15) vidimo da je desna strana nejednakosti (2.17) ograničena, pa na osnovu Lebesque-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji imamo da je

$$\lim_{\rho \to \infty} \big\langle \, \langle \, \nu \, , \, v \, \rangle \, - \langle \, \nu^\rho \, , \, v \, \rangle \, , \, \phi \, \big\rangle = 0,$$

za proizvoljno $\phi \in L^\infty(\Omega)$, tj. $\langle \, \nu^\rho \, , \, v \, \rangle \rightharpoonup \langle \, \nu \, , \, v \, \rangle$, u $L^1(\Omega)$.

<u>3.korak</u>: Dokaz da $\nu^\rho \in \mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Tražimo L^p-niz koji indukuje ν^ρ.

Kako je $\text{supp}\nu^\rho \subset B_{\rho+1}$, imamo da $\nu^\rho \in \mathcal{Y}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$, pa postoji L^∞-ograničen niz $\{u^\rho_s\}_s \in \mathbb{N}$, takav da

$$w^* - \lim_{s \to \infty} v(u^\rho_s) = \langle \, \nu^\rho \, , \, v \, \rangle,$$

u $L^\infty(\Omega)$. Odatle imamo da $v(u_s^\rho)$ konvergira i slabo u $L^1(\Omega)$, i to važi za sve $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Rast funkcije v sada je nebitan, jer u_s^ρ imaju kompaktan nosač.

4.korak: Povezivanje 2. i 3. koraka.

Iz predhodna dva koraka imamo

$$w - \lim_{\rho\to\infty} \lim_{s\to\infty} v(u_s^\rho) = \langle\, \nu\,,\, v\,\rangle, \text{ u } L^1(\Omega).$$

Znači, za svako ρ, imamo niz u_s^ρ koji indukuje meru $\nu^\rho = \{\nu_x^\rho\}_{x\in\Omega}$, a nama treba niz koji će indukovati meru $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$. Stoga biramo mrežu $\{u_{s_\xi}^{\rho_\xi}\}_{\xi\in\Xi}$, tako da

$$w - \lim_{\xi\in\Xi} v(u_{s_\xi}^{\rho_\xi}) = \langle\, \nu\,,\, v\,\rangle, \text{ u } L^1(\Omega).$$

Za fiksirano $\rho \in \mathbb{N}$ i $v = |\cdot|^p$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} \int_\Omega |u_s^\rho|^p\, dx &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p\, d\nu_x^\rho(\lambda)\, dx \\
&= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p \Big(r^\rho\, d\nu_x(\lambda) + s^\rho(x)\delta_0\, d\lambda \Big)\, dx \\
&\le \int_\Omega \int_{B_{\rho+1}} |\lambda|^p\, d\nu_x(\lambda)\, dx \\
&\le \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p\, d\nu_x(\lambda)\, dx \\
&= \|C\|_{L^1(\Omega)} < \infty.
\end{aligned}$$

Tako smo dobili da za sve ρ i s važi

$$\|u_s^\rho\|_{L^P(\Omega,\mathbb{R}^m)} \le \Big(\|C\|_{L^1(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} + 1,$$

tj. da je mreža $\{u_{s_\xi}^{\rho_\xi}\}_{\xi\in\Xi}$ ograničena u $L^P(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Sada hoćemo da prostor $L^\infty(\Omega) \otimes \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^m)$, u kom se nalaze podintegralne funkcije $v \in$

$\mathcal{C}_p(\mathbb{R}^m)$ i $u_\xi \in L^\infty(\Omega)$, zamenimo prostorom $L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))$, koji je separabilan, pa možemo pretpostaviti da je $\Xi = \mathbb{N}$. Tu zamenu možemo izvršiti kada lokalizujemo pomenute prostore na skupove ogrničene u $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, a opravdava je činjenica da ovi prostori imaju isto zatvaranje u prirodnom prostoru podintegralnih funkcija,

$$\Big\{ h : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \,\Big|\, \exists a \in L^1(\Omega), b \in \mathbb{R} : |h(x, \lambda)| \leq a(x) + b|\lambda|^p \Big\},$$

snabdevenim familijom seminormi $\{|h|_\rho\}_\rho$, definisanim sa

$$|h|_\rho = \sup_{\|u\|_{L^P(\Omega;\mathbb{R}^m)} \leq \rho} \Big| \int_\Omega h(x, u(x))\, dx \Big|.$$

Time smo pokazali jedan smer tvrđenja. Suprotan smer se dokazuje mnogo jednostavnije. Neka je $\nu \in \mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ indukovana nizom $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Tada za sve $v \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}^m)$

$$v \circ u_k \rightharpoonup v_\nu \equiv \langle\, \nu\,,\, v\,\rangle,$$

kad $k \to \infty$, u $L^1(\Omega)$, odakle imamo da je

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda)\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k(\lambda)|^p \, dx < +\infty,$$

što znači da važi uslov 2. iz (2.15). $\square$

2.1.3 Meroznačna rešenja zakona održanja

Posmatraćemo sistem zakona održanja

$$\mathrm{div} f(u) = 0, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{2.18}$$

Definicija meroznačnih rešenja prvi put se pojavljuje u DiPerna [13], za sistem $u_t + f(u)_x = 0$, $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Mi ćemo je prilagoditi našem sistemu.

Definicija 11 Merljiva funkcija

$$\nu : x \in \mathbb{R}^2_+ \mapsto \nu_x \in ProbM(\mathbb{R}^n)$$

je *meroznačno rešenje* sistema (2.18) ako

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle\, \nu_x, f_j \,\rangle \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int f_j \, d\nu_x \right) = 0 \tag{2.19}$$

važi u smislu distribucija na Ω, što je ekvivalentno sa

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \langle\, \nu_x, f_j \,\rangle \phi_{x_j}(x) \, dx = 0$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Pod merljivošću funkcije ν podrazumevamo tzv. slabu* merljivost mera ν_y iz njenog kodomena, što znači da za sve neprekidne funkcije f, preslikavanje

$$x \mapsto \langle \nu_x, f(\lambda) \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda) \, d\nu_x(\lambda)$$

je merljivo.

Mi ćemo posmatrati ona meroznačna rešenja koja su u $\mathcal{Y}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ i $\mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, tj. ona čiji se kodomen sastoji od probabilističkih mera čiji nosači leže u fiksiranom kompaktnom podskupu od $\mathbb{R}^m$, odnosno ona za koje je preslikavanje $[x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda)] \in L^1(\Omega)$. $\mathcal{Y}^\infty(\Omega; \mathbb{R})$-meroznačna rešenja definisali su Colombeau i Oberguggenberger, [11].

Definicija 12 Familija probabilističkih mera $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ na $\mathbb{R}$, definisana za skoro sve $x \in \Omega$ je $\mathcal{Y}^\infty(\Omega; \mathbb{R})$-*meroznačno rešenje* sistema

(2.18) ako

1. $\operatorname{supp} \nu_x \subset [-M, M]$, za neko $M > 0$,
2. za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, preslikavanje $x \mapsto \displaystyle\int g \, d\nu_x$ je merljivo,
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int f_j \, d\nu_x\right) = 0$, važi u $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Analogno tome možemo definisati i $\mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R})$-meroznačna rešenja.

Definicija 13 Familija probabilističkih mera $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ na $\mathbb{R}$, definisana za skoro sve $x \in \Omega$ je $\mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R})$-*meroznačno rešenje* sistema (2.18) ako

1. $\displaystyle\left[x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda)\right] \in L^1(\Omega)$,
2. za sve $g \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$, preslikavanje $x \mapsto \displaystyle\int g \, d\nu_x$ je merljivo,
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int f_j \, d\nu_x\right) = 0$, važi u $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Sada ćemo posmatrati regularizacije sistema (2.18). Cilj nam je da iz niza rešenja $\{u_\varepsilon\}$ regularizovanog sistema, izvučemo meroznačno rešenje od (2.18).

Teorema 7 *Neka je $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ niz rešenja održivog sistema*

$$\operatorname{div} f(u) = \varepsilon L(u), \tag{2.20}$$

gde je L eliptični diferencijalni operator sa konstantnim koeficijentima i $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$. Ako je niz $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uniformno ograničen u $L^\infty(\Omega)$, onda postoji $\mathcal{Y}^\infty(\Omega;\mathbb{R})$-meroznačno rešenje ν sistema (2.18), koje dobijamo kao Young-ovu meru iz nekog $\{u_{\varepsilon_k}\}_k$ podniza niza $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Tada kažemo da svaki proces sa singularnom perturbacijom koji je stabilan u L^∞, generiše jedno meroznačno rešenje neperturbovanog sistema (2.18).

Dokaz teoreme 7. Kako je u_ε slabo rešenje od (2.20) imamo da u $\mathcal{D}'(\Omega)$ važi

$$\mathrm{div} f(u_\varepsilon) = \varepsilon L(u_\varepsilon). \tag{2.21}$$

Iz Young-ove teoreme imamo da postoji podniz $\{u_{\varepsilon_k}\}$ niza $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ i familija probabilističkih mera ν tako da je

$$w^* - \lim f(u_{\varepsilon_k}) = \langle \nu_x, f(\lambda)\rangle. \tag{2.22}$$

Pokažimo da je ν meroznačno rešenje.

Young-ova mera je merljiva u smislu slabe* merljivosti mera ν_x. Stoga treba još pokazati da je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle\, \nu_x, f_j \,\rangle = 0, \tag{2.23}$$

u smislu distribucija na Ω. Ako iskoristimo jednakost (2.22) dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle\, \nu_x, f_j \,\rangle &= -\int_\Omega \underbrace{\langle \nu_y, f(\lambda)\rangle}_{\lim f(u_{\varepsilon_j})} \phi_{x_j}(x)\, dx \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_j(u_{\varepsilon_k}(x))\phi_{x_j}(x)\, dx \\
&= -\lim_{\varepsilon_k\to 0} \langle\, \partial_{x_j} f_j(u_{\varepsilon_k}(x))\,, \phi \,\rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon_k\to 0} \langle\, \varepsilon_k L(u_{\varepsilon_k})\,, \phi \,\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

U pretposlednjoj jednakosti smo iskoristili (2.21), čime smo pokazali (2.23), što kompletira dokaz da je Young-ova mera dobijena iz podniza $\{u_{\varepsilon_k}\}$, meroznačno rešenje sistema (2.18). $\square$

Slično dobijamo i $\mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R})$-meroznačna rešenja.

Teorema 8 *Neka je* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *niz rešenja održivog sistema*

$$\mathrm{div} f(u) = \varepsilon L(u), \tag{2.25}$$

gde je L *eliptični diferencijalni operator sa konstantnim koeficijentima i* $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$. *Ako je niz* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *uniformno ograničen u* $L^p(\Omega)$, *onda postoji* $\mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R})$*-meroznačno rešenje* ν *sistema* (2.18), *koje dobijamo kao Young-ovu meru iz nekog* $\{u_{\varepsilon_k}\}_k$ *podniza niza* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Dokaz. Kako je i prostor L^p potopljen u $\mathcal{D}'$, samo umesto Young-ove teoreme treba iskoristiti teoremu 5, da bismo dobili tvrđenje ove teoreme na isti način kao u dokazu teoreme 7. □

Tako dobijamo da i svaki proces sa singularnom perturbacijom koji je stabilan u L^p, generiše L^p-Young-ovu meru kao meroznačno rešenje neperturbovanog sistema.

2.2 Uopštene funkcije kao aproksimativna rešenja

2.2.1 Colombeau-ova specijalna algebra

Ideja konstrukcije specijalne algebre potiče od potrebe da se prostor distribucija predstavi preko nizova funkcija. Jedan od prvih rezultata bio je taj da faktor algeba koja se dobija od nizova $\mathcal{C}^\infty$ funkcija koji konvergiraju u $\mathcal{D}'$ preko ideala kog čine oni nizovi koji konvergiraju ka nuli, je izomorfna sa $\mathcal{D}'$ i izomorzam slika nizove u njihove granice.

Primer 5 Delta-distribucija može se prikazati kao granica tzv. "strict

delta"-niza $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, za koji važi

1. $\mathrm{supp}\rho_\varepsilon \to \{0\},\ \varepsilon \to 0$
2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int \rho_\varepsilon\, dx = 1,$ za sve $\varepsilon > 0$
3. $\displaystyle\int |\rho_\varepsilon(x)|\, dx$ je uniformno ograničen po ε,

i "model delta"-niza ϕ_ε, koji se dobija od proizvoljne funkcije $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\int \phi = 1$, kao

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Kao rešenje tog problema potrebna je asocijativna, komutativna algebra $(\mathcal{A}(\Omega), +, \cdot)$ u kojoj važe sledeće osobine:

1. $\mathcal{D}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{A}(\Omega),$ linearno, i $f(x) \equiv 1$ je jedinica u $\mathcal{A}(\Omega)$
2. Postoje operatori izvoda $\partial_i : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Omega),\ i = 1, ..., n$ koji su linearni i važi Leibnitz-ovo pravilo
3. $\partial_i|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ je uobičajeni parcijalni izvod
4. Osobina koja će rešiti problem množenja distribucija

Posle mnogih rezultata o nepostojanju takve algebre (za konkretne osobine pod 4.), od kojih je najpoznatiji Schwartz-ov, Colombea-u je dokazao postojanje takve algebre gde je četvrti uslov sledeći,

4'. $\cdot\,|_{\mathcal{C}^\infty(\Omega)\times\mathcal{C}^\infty(\Omega)}$ je tačkasti proizvod funkcija.

Konstrukcija algebre $\mathcal{G}_s(\Omega)$

Posmatrajmo nizove glatkih funkcija $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in (\mathcal{C}^\infty(\Omega))^{(0,1)}$, gde je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Takav niz zvaćemo *umeren* (engl. moderate) ako

on zadovoljava uslov

$$\begin{aligned}&\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \exists N > 0 \text{ tako da je}\\ &\|\partial^\alpha u_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N})\ , \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

Skup umerenih nizova glatkih funkcija obeležavaćemo sa $\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$. Niz iz $\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$ zvaćemo *nula-niz* (engl. null, negligible) ako on zadovoljava uslov

$$\begin{aligned}&\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall M > 0 \text{ važi}\\ &\|\partial^\alpha u_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M})\ , \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

Nula-nizove obeležavaćemo sa $\mathcal{N}_s(\Omega)$. $\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$ je algebra sa parcijalnim izvodima u kojoj su operacije definisane po komponentama, tj. članovima nizova. $\mathcal{N}_s(\Omega)$ je ideal algebre $\mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$, zatvoren u odnosu na parcijalne izvode. U [gkos, str.11] može se naći dokaz da je dovoljno da važi

$$\begin{aligned}&\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall M > 0 \text{ važi}\\ &\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M})\ , \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

da bi umereni niz bio nula-niz. Dakle, umeren niz $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ je nula-niz ako

$$\varepsilon^{-M} u_\varepsilon \in L^\infty_{loc}(\Omega), \quad \text{za sve } M > 0.$$

Algebra *specijalnih uopštenih funkcija* je faktor algebra

$$\mathcal{G}_s(\Omega) = \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)/\mathcal{N}_s(\Omega).$$

Njene elemente (klase ekvivalencije) obeležavaćemo sa $u = \big[\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\big] = \big[\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\big]_{\mathcal{N}}$ i zvaćemo *uopštene funkcije*. Restrikcija uopštene funkcije na otvoren skup $\Omega' \subset \Omega$ je definisana preko predstavnika, tj.

$$u|_{\Omega'} = \{u_\varepsilon|_{\Omega'}\} + \mathcal{N}_s(\Omega').$$

Uopštena funkcija u se anulira na Ω', $u|_{\Omega'} = 0$, ako i samo ako $u|_{\Omega'} \in \mathcal{N}_s(\Omega')$. Nosač uopštene funkcije u je

$$\operatorname{supp} u = \Big\{ \bigcup \{\Omega' \subset \Omega | \Omega' \text{ je otvoren i } u|_{\Omega'} = 0\} \Big\}^c,$$

odnosno komplement najvećeg otvorenog skupa Ω' na kom je $u|_{\Omega'} = 0$. Poslednja osobima je posledica činjenice da preslikavanja $\Omega \mapsto \mathcal{G}_s(\Omega)$, Ω je otvoren, čine snop (eng. "fine sheaf") diferencijalnih algebri na $\mathbb{R}^n$. $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ ima inverznu funkciju u odnosu na množenje, tj. postoji $v : uv = 1$, ako i samo ako, za svaki predstavnik $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ od u i za sve $K \subset\subset \Omega$, postoje $\varepsilon_0 > 0$ i $m \in \mathbb{N}$, tako da je $\inf_K |u_\varepsilon(x)| \geq \varepsilon^m$, za sve $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Potapanje prostora distribucija i klasičnih funkcija u $\mathcal{G}_s(\Omega)$

Potapanje distribucija se konstruiše preko konvolucije sa tzv. molifajerima, funkcijama koje se dobijaju od funkcije ρ za koju važi

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \rho(x)dx = 0, \qquad \text{za sve } \alpha \in \mathbb{R}_0^n,\ |\alpha| \geq 1$

na sledeći način,

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \geq 0.$$

Funkcija ρ sa ovakvim osobinama ne postoji u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ali postoji u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Može se dobiti primenom inverzne Furijeove transformacije na bilo koju funkciju $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, koja je na nekoj okolini nule jednaka jedinici. Zato biramo $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Kako ovakvi molifajeri nemaju konvoluciju sa $\mathcal{D}'$, prvo se potapa prostor distribucija sa kompaktnim

nosačem $\mathcal{E}'$. Dato $w \in \mathcal{E}'(\Omega)$ možemo dodefinisati van Ω nulom, a zatim definisati preslikavanje

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{E}'(\Omega) &\to \mathcal{G}_s(\Omega) \\ w &\mapsto \{w * \rho_\varepsilon\}_{\varepsilon \geq 0} + \mathcal{N}_s(\Omega). \end{aligned}$$

Preslikavanje ι je linearno, injektivno i očuvava parcijalne izvode. Distribucija $w \in \mathcal{E}'(\Omega)$ ima isti nosač kao i njena slika $\iota(w)$, tj. važi $\operatorname{supp}(w) = \operatorname{supp}(\iota(w))$.

Glatke funkcije sa kompaktnim nosačem, $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, potapaju se konstantnim preslikavanjem,

$$\sigma : f \mapsto \{f\}_\varepsilon + \mathcal{N}_s(\Omega).$$

Restrikovano na $\mathcal{D}(\Omega)$, ι se poklapa sa σ,

$$\iota|_{\mathcal{D}(\Omega)} = \sigma.$$

Štaviše, za $v, w \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \equiv \mathcal{D}(\Omega)$, glatke funkcije sa kompaktnim nosačem, važi

$$\iota(vw) = \iota(v)\,\iota(w).$$

Stoga je $\mathcal{D}(\Omega)$ podalgebra algebre $\mathcal{G}_s(\Omega)$. To sledi iz činjenice da za $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(v*\rho_\varepsilon - v)_{\varepsilon>0} \in \mathcal{N}_s(\Omega)$, što se lako može pokazati korišćenjem Taylor-ovog razvoja i strukture molifajera ρ. Istim ovim preslikavanjem, možemo potopiti i $L^\infty(\Omega)$. Preslikavanje ι može se proširiti i na potapanje prostora distribucija $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{G}_s(\Omega)$ koje se poklapa sa datim preslikavanjem na $\mathcal{E}'(\Omega)$, kao i na $L^\infty(\Omega)$. Dokaz ovoga je mnogo složeniji i koristi činjenice da su $\mathcal{D}'(\Omega)$ i $\mathcal{G}_s(\Omega)$ snopovi. Može se naći u [gkos, str. 16-25]. Za dato $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i relativno kompaktan otvoren skup $\omega \subset \Omega$, biramo $\Psi_\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Psi_\omega \equiv 1$ na ω. Neka je $\iota_\omega(u) = \big[((\Psi_\omega u)*\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}\big]$. Familija $(\iota_\omega(u))_{\omega\subset\Omega}$ elemenata algebre $\mathcal{G}_s(\Omega)$ je koherentna (različiti elementi se poklapaju na presecima), pa postoji jedinstveni elemenat iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$ čija restrikcija na sve ω se poklapa sa

$\iota_\omega(u)$. Taj elemenat definiše $\iota(u) \in \mathcal{G}_s(\Omega)$. Preslikavanje ι je linearno, injektivno, očuvava parcijalne izvode i za $v, w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \equiv \mathcal{E}(\Omega)$, glatke funkcije na Ω, važi $\iota(vw) = \iota(v)\,\iota(w)$, pa je $\mathcal{E}(\Omega)$ podalgebra algebre $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Ako definišemo

$$\mathcal{S}'(\Omega) := \{w \in \mathcal{D}'(\Omega) \,|\, \exists \widetilde{w} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widetilde{w}|_\Omega = w \in \mathcal{D}'(\Omega)\},$$

onda $w \in \mathcal{S}'(\Omega)$ možemo potopiti preko njene ekstenzije $\widetilde{w} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\iota(w) = \Big[\big\{\, (\widetilde{w} * \rho_\varepsilon)|_\Omega \,\big\}_\varepsilon\Big]_{\mathcal{N}_s}.$$

Kako je $L^p(\Omega) \subset \mathcal{S}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, i prostor $L^p(\Omega)$ je potopljen u $\mathcal{G}_s(\Omega)$.

Kompozicija, jednakost i asociranost u $\mathcal{G}_s(\Omega)$

Da bi kompozicija funkcije f i $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ bila dobro definisana, dovoljno je da f bude glatka, polinomijalno ograničena funkcija sa polinomijalno ograničenim izvodima. To znači da, ako je f glatka, polinomijalno ograničena funkcija sa polinomijalno ograničenim izvodima, i $u = \big[\{u_\varepsilon\}_\varepsilon\big] \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, onda je kompozicija $f(u) \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, i definisana je preko predstavnika $f(u) = [\{f(u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}]$. Takođe ako je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ dat preko dva različita predstavnika, tj. $u = \big[\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\big] = \big[\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\big]$, što znači da je $\{u_\varepsilon - v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{N}_s(\Omega)$, onda je i $\{f(u_\varepsilon) - f(v_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{N}_s(\Omega)$.

Ovde smo videli da jednakost dva elementa $u, v \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ znači da $\{u_\varepsilon - v_\varepsilon\}_\varepsilon \in \mathcal{N}_s(\Omega)$, tj. da za sve $M > 0$, $\varepsilon^{-M}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, odnosno, u skladu sa definicijom nula-nizova,

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x) - \partial^\alpha v_\varepsilon(x)| \le c\varepsilon^M,\ \varepsilon \to 0,$$

za sve K, α, M. Osim jednakosti, na $\mathcal{G}_s(\Omega)$ imamo definisanu i relaciju

asociranosti. Naime, za dva elementa u, v iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$ kažemo da su asocirani, $u \approx v$, ako za njihove predstavnike $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ i $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ važi

$$u_\varepsilon - v_\varepsilon \to 0 \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ kad } \varepsilon \to 0,$$

tj. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\langle u_\varepsilon - v_\varepsilon, \phi\rangle \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (u_\varepsilon - v_\varepsilon)\phi\, dx = 0$, za sve $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Dve distribucije su asocirane ako i samo ako su jednake, tj. za $g, h \in \mathcal{D}'(\Omega)$ važi

$$\begin{aligned} h = g \iff & \iota(g) \approx \iota(h) \\ \iff & \int_\Omega (h * \rho_\varepsilon - g * \rho_\varepsilon)\phi\, dx \to 0,\ \varepsilon \to 0 \\ \iff & \frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega\int_\Omega \Big(h(x-y) - g(x-y)\Big)\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\phi(y)\, dxdy \to 0,\ \varepsilon \to 0, \end{aligned}$$

što znači da $\iint\big((h-g)\rho\phi\big)dxdy$ ide brže u nulu od ε^n.

Ako je $g \in L^\infty(\Omega)$, jedan od predstavnika za $\iota(g)$ je $(g * \rho_\varepsilon)_{\varepsilon\geq 0}$. Znamo da je $g * \rho_\varepsilon$ ograničena nezavisno od ε, i da $g * \rho_\varepsilon \to g$ u $L^1_{loc}(\Omega)$. Odavde sledi da za $g, h \in L^\infty(\Omega)$,

$$\iota(gh) \approx \iota(g)\,\iota(h).$$

Stoga koncept asociranosti ne služi samo da bismo definisali aproksimativna rešenja (rešenja problema (2.29)), nego i da proširi koncept množenja sa klasičnog proizvoda funkcija na uopštene funkcije. Više detalja o ovoj temi možete naći u [4, 10]. Bitno je i da je asociranost saglasna sa izvodima, kao i sa množenjem $\mathcal{C}^\infty$-funkcijom, tj. ako je $u \approx v$ za $u, v \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, onda je i

$$\partial^\alpha u \approx \partial^\alpha v$$

i

$$\iota(g)u \approx \iota(g)v,$$

za sve $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

2.2.2 Zakoni održanja u $\mathcal{G}_s(\Omega)$

Posmatraćemo sada zakon održanja

$$\operatorname{div} f(u) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0, \tag{2.26}$$

gde je $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ glatka funkcija i $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Takođe ćemo posmatrati i njegovu paraboličnu aproksimaciju

$$\operatorname{div} f(u) = \varepsilon L(u), \tag{2.27}$$

gde je L linearan parcijalni diferencijalni operator sa glatkim koeficijentima i $\varepsilon > 0$. Kako su predstavnici elemenata iz $\mathcal{G}_s(\Omega)$ nizovi glatkih funkcija, u $\mathcal{G}_s(\Omega)$ jednačina (2.26) može da se interpretira kao

$$\sum_{j=1}^{n} f_j'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \tag{2.28}$$

$u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, rešenje od (2.28), zvaćemo *(jako) uopšteno rešenje.* Primetimo da ovaj koncept možemo koristiti i za rešavanje neodrživih jednačina, [4]. Ipak, ovako formulisana jednačina ne dozvoljava prekidna rešenja, jer različiti održivi oblici od (2.28) mogu biti ekvivalentni u $\mathcal{G}_s(\Omega)$, a davati različite uslove na prekidima (skokovima). Zbog toga ćemo posmatrati jednačinu

$$\sum_{j=1}^{n} f_j'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \approx 0. \tag{2.29}$$

Rešenje ove jednačine, $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$, zvaćemo *aproksimativno rešenje.* U daljem radu, za funkciju f pretpostavićemo da je

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, &\text{ glatka funkcija najviše polinomijalnog rasta} \\ &\text{čiji su izvodi takođe najviše polinomijalnog rasta.} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ova pretpostavka nam treba da bismo imali dobro definisanu kompoziciju funkcije i uopštene funkcije.

Primedba 2 (*ı*) Pod pretpostavkom (2.30), svako jako rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ je aproksimativno rešenje. Da bismo to videli podsetimo se definicija ovih pojmova i šta one zapravo znače. Ako je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ jako rešenje, to znači da je $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0$ u $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Dalje, ako je $u = [\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}]$, onda je

$$\operatorname{div} f(u) = \left[\left(\frac{\partial f_1(u_\varepsilon)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n(u_\varepsilon)}{\partial x_n}\right)_\varepsilon\right] = 0,$$

što znači da

$$\left\{\frac{\partial f_1(u_\varepsilon)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n(u_\varepsilon)}{\partial x_n}\right\}_\varepsilon \in \mathcal{N}_s(\Omega),$$

tj.

$$\sup_{x\in K}\left|\partial^\alpha\left(\frac{\partial f_1(u_\varepsilon)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n(u_\varepsilon)}{\partial x_n}\right)\right| \leq c\varepsilon^M,\ \varepsilon \to 0$$

za sve K, M, α. Sa druge strane, $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ je aproksimativno rešenje ako

$$\frac{\partial f_1(u_\varepsilon)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n(u_\varepsilon)}{\partial x_n} \longrightarrow 0 \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega),\ \text{kad } \varepsilon \to 0.$$

Sada je jasno da *jednakost u* $\mathcal{G}_s(\Omega)$ *implicira asociranost.*

(*ıı*) Ako je $v \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, slabo rešenje od (2.26), što znači da je $\operatorname{div} f(v) = 0$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$, onda je $u = \iota(v) = [\{v * \rho_\varepsilon\}_\varepsilon] \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ aproksimativno rešenje. Naime, kako $v * \rho_\varepsilon \to v$ u L^1_{loc}, onda i $f(v*\rho_\varepsilon) \to f(v)$. Stoga $\operatorname{div} f(v*\rho_\varepsilon) \to 0$, što znači da je $\operatorname{div} f(u) \approx 0$.

U mnogim slučajima, jednačina (2.27) ima klasično rešenje u_ε za sve $\varepsilon > 0$, i tada gotovo uvek važi princip maksimuma, pa stoga imamo da je niz $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ograničeni podskup od $L^\infty(\Omega)$. Sada ćemo pokazati kako se iz takvog niza konstruiše aproksimativno rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$.

2.2.3 Aproksimativna rešenja ograničenog tipa

Definicija 14 Za $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ reći ćemo da je *ograničenog tipa*, ako ima predstavnika $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$, koji je ograničeni niz u $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 9 *Neka f zadovoljava* (2.30). *Ako postoji niz $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^\infty(\Omega)$, ograničen u $L^\infty(\Omega)$, tako da* $\operatorname{div} f(v_\varepsilon) \to 0$ *u $\mathcal{D}'(\Omega)$ kad $\varepsilon \to 0$, tada postoji aproksimativno rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ jednačine* $\operatorname{div} f(u) \approx 0$, *i u je ograničenog tipa.*

Dokaz: U slučaju da je $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ niz umerenih glatkih funkcija, tj. $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$, možemo uzeti klasu tog niza za traženo rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$. U opštem slučaju, prvo ćemo uglačati niz $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, a onda izvesti zavisnost od ε na sledeći način. Neka je $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, čiji je integral jednak jedan i neka je

$$\phi_\delta(x) = \delta^{-n}\phi\Big(\frac{x}{\delta}\Big).$$

Za fiksirano $\varepsilon > 0$, imamo da $v_\varepsilon * \phi_\delta \to v_\varepsilon$ u $L^1_{loc}(\Omega)$ kad $\delta \to 0$, i da je $v_\varepsilon * \phi_\delta$ ograničena nezavisno od δ u $L^\infty(\Omega)$, a od ranije imamo da je ograničena nezavisno i od ε. Neka je, dalje, $(K_m)_{m\geq 1}$ niz kompaktnih podskupova od Ω koji pokriva Ω. Možemo naći strogo opadajući niz pozitivnih brojeva $(\delta_m)_{m\geq 1}$, koji konvergira ka nuli, takav da je

$$\|v_{1/m} * \phi_\delta - v_{1/m}\|_{L^1(K_m)} \leq \frac{1}{m}, \qquad \text{za } 0 < \delta \leq \delta_m.$$

Definišimo jednu rastuću, po delovima konstantnu funkciju

$$\begin{aligned} &\eta : (0,1) \to (0,1] \\ &\eta(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{za } 0 < \varepsilon \leq \delta_m,\ m \geq 1 \\ 1, & \text{za } \varepsilon \geq \delta_1, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.31}$$

i preko nje traženi niz

$$u_\varepsilon = v_{\eta(\varepsilon)} * \phi_\varepsilon, \text{ za } \varepsilon \in (0,1).$$

Primetimo da je svaka funkcija u_ε glatka, da familija $\{v_{\eta(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ ima istu L^∞-granicu kao i $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ i da je, po definiciji molifajera, $\partial^\alpha u_\varepsilon = v_{\eta(\varepsilon)} * \varepsilon^{-|\alpha|}(\partial^\alpha\phi)_\varepsilon$, gde je $(\partial^\alpha\phi)_\delta(x) = \delta^{-n}\partial^\alpha\phi(\frac{x}{\delta})$. Odatle imamo da je $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ umeren niz glatkih funkcija. Neka je u njegova klasa u $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Jasno, u je ograničenog tipa. Po definiciji, imamo da je

$$\|u_\varepsilon - v_{\eta(\varepsilon)}\|_{L^1(K_m)} \leq \frac{1}{m}, \qquad \text{za } \delta_{m+1} < \varepsilon \leq \delta_m,$$

odakle imamo da $u_\varepsilon - v_{\eta(\varepsilon)} \to 0$ u $L^1_{loc}(\Omega)$. Štaviše, obe familije su ograničene u $L^\infty(\Omega)$. Stoga imamo da

$$f(u_\varepsilon) - f(v_{\eta(\varepsilon)}) = (u_\varepsilon - v_{\eta(\varepsilon)}) \int_0^1 \nabla f\big(\tau u_\varepsilon + (1-\tau)v_{\eta(\varepsilon)}\big)\, d\tau,$$

takođe konvergira ka nuli u $L^1_{loc}(\Omega)$, a odatle i

$$\operatorname{div} f(u_\varepsilon) - \operatorname{div} f(v_{\eta(\varepsilon)}) \to 0 \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.32}$$

Uslov teoreme je da $\operatorname{div} f(v_\varepsilon) \to 0$, a kako je $v_{\eta(\varepsilon)}$ podniz niza v_ε to isto važi i za $v_{\eta(\varepsilon)}$. Stoga iz (2.32) dobijamo da $\operatorname{div} f(u_\varepsilon) \to 0$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$, što znači da je $\operatorname{div} f(u) \approx 0$. $\square$

2.2.4 Aproksimativna rešenja p-ograničenog tipa

Definicija 15 Za $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ reći ćemo da je *p-ograničenog tipa*, ako ima predstavnika $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$, koji je ograničeni niz u $L^p(\Omega)$.

Ako je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ p-ograničenog tipa, da bi $f(u)$ bilo isto p-ograničenog tipa, nije dovoljni da f zadovoljava uslov (2.30). Stoga u ovom delu pretpostavljamo da je

$$f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R};\mathbb{R}^n).$$

Za aproksimativna rešenja p-ograničenog tipa važi slično tvrđenje kao u teoremi 9. Ona se dobijaju iz niza rešenja ograničenih u $L^p(\Omega)$.

Teorema 10 *Neka je* $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$. *Ako postoji niz* $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *ograničen u* $L^p(\Omega)$, *tako da* $\operatorname{div} f(v_\varepsilon) \to 0$ *u* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *kad* $\varepsilon \to 0$, *tada postoji aproksimativno rešenje* $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ *jednačine* $\operatorname{div} f(u) \approx 0$, *i* u *je* p-*ograničenog tipa.*

Dokaz. I u ovom slučaju, ako niz $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ nije umeren, pomoću konvolucije sa molifajerima naćićemo traženi umeren niz $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, kao u dokazu teoreme 9,

$$u_\varepsilon = v_{\eta(\varepsilon)} * \phi_\varepsilon, \text{ za } \varepsilon \in (0,1),$$

gde je $\eta(\varepsilon)$ rastuća, po delovima konstantna funkcija, definisana sa (3.34). Da je niz $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ umeren i da je njegova klasa u aproksimativno rešenje, dokazuje se isto kao u teoremi 9. Ostaje još da pokažemo da je u p-ograničenog tipa. Zbog toga ocenjujemo njegove predstavnike,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p} = \|v_{\eta(\varepsilon)} * \phi_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|v_{\eta(\varepsilon)}\|_{L^p} \|\phi_\varepsilon\|_{L^1} \leq \|v_{\eta(\varepsilon)}\|_{L^p}.$$

Kako je $v_{\eta(\varepsilon)}$ podniz niza v_ε, koji je ograničen u L^p, imamo pokazano i poslednje potrebno tvrđenje. $\square$

U prethodnom poglavlju smo videli da slična tvrđenja važe i za meroznačna rešenja zakona održanja, stoga je bilo prirodno pretpostaviti da postoji izvesni vid ekvivalencije između ova dva koncepta.

2.3 Ekvivalencija aproksimativnih i meroznačnih rešenja

2.3.1 Rešenja ograničenog tipa i $\mathcal{Y}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$

U ovom odeljku pretpostavićemo da je

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, glatka funkcija najviše polinomijalnog rasta
čiji su izvodi takođe najviše polinomijalnog rasta.

Teorema 11 *a) Neka je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ uopštena funkcija ograničenog tipa, koja zadovoljava* $\operatorname{div} f(u) \approx 0$. *Tada svaka Young-ova mera $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$, konstruisana iz podniza svakog predstavnika od u, je meroznačno rešenje sistema* $\operatorname{div} f(u) = 0$.

b) Ako je $u \approx \iota(v)$, za neko $v \in L^\infty(\Omega)$, tada je $v(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda)$ za skoro sve $x \in \Omega$.

Dokaz. a) Neka je $u = \left[\{u_\varepsilon\}_\varepsilon\right] \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ ograničenog tipa, tj. $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} < M$, za neko $M > 0$ i za sve ε. Tada, na osnovu Young-ove teoreme (teorema 2, poglavlja Young-ova mera) imamo da postoji podniz $\{u_{\varepsilon_k}\}_k$ i familija mera $\{\mu_x\}_x$, na $\mathbb{R}$, definisanih za skoro sve $x \in \Omega$, za koje važi $\operatorname{supp}\mu_x \subset [-M, M]$, tako da za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ imamo slabu* konvergenciju $g(u_{\varepsilon_k}) \longrightarrow \bar{g}$, $g(x) \equiv \int g\, d\mu_x$, u $L^\infty(\Omega)$. Specijalno, za naše funkcije f_j, imamo da

$$w^* - \lim_{k\to\infty} f_j(u_{\varepsilon_k}) = \bar{f}_j, \quad \text{u } L^\infty(\Omega).$$

Ali kako je u aproksimativno rešenje, znamo da važi

$$\operatorname{div} f(u_{\varepsilon_k}) \to 0, \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Tako dobijamo da je

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\int f_j\, d\mu_x\right] = 0, \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega),$$

što kompletira dokaz da je Young-ova mera $\{\mu_x\}_{x\in\mathbb{R}}$, konstruisana iz podniza svakog predstavnika od u, meroznačno rešenje sistema $\operatorname{div} f(u) = 0$.

b) Specijalno, iz Young-ove teoreme imamo da $u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\mu_x(\lambda)$, odakle imamo da, ako je neko $v \in L^\infty(\Omega), \iota(v) \approx u$, tada je $v(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda)$, s.s. $\square$

Primedba 3 Čak i ako je $\iota(v) \approx u$ za neko $v \in L^\infty(\Omega)$, može da se dogodi da različiti podnizovi proizvode različite Young-ove mere. To je povezano sa činjenicom da $g(u)$, u opštem slučaju, nije asocirano sa $g(\iota(v))$. U ovom smislu, $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ može da se posmatra kao predstavnik familije Young-ovih mera. Problem jedinstvenosti diskutovaćemo u primedbi 4.

Teorema 12 *a) Neka je $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ meroznačno rešenje sistema div $f(u) = 0$ i neka* $\mathrm{supp}\mu_x \subset K \subset\subset \mathbb{R}^m$, *za skoro sve $x \in \Omega$. Tada postoji niz $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$, čija klasa u je ograničenog tipa i zadovoljava* $\mathrm{div}\, f(u) \approx 0$.

b) Štaviše, ovaj niz indukuje jedinstvenu Young-ovu meru koja je jednaka sa $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ za skoro sve $x \in \Omega$, i $\iota(v) \approx u$, gde je $v(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda)$.

Dokaz. a) Neka je $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ meroznačno rešenje sistema div $f(u) = 0$. Tada na osnovu diskusije iz poglavlja Young-ova mera (v. str. 24) imamo da postoji uniformno ograničeni niz $\{v_k\}_k \subset L^\infty(\Omega)$ koji indukuje $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ kao Young-ovu meru. To znači da

$$v_k \rightharpoonup v,$$

slabo* u L^∞, kad $k \to \infty$, i da za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$,

$$g(v_k) \rightharpoonup \bar{g},$$

slabo* u L^∞, kad $k \to \infty$, gde je $\bar{g}(x) = \int g\, d\mu_x$. Odatle imamo da kad $k \to \infty$

$$\underbrace{\sum \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(v_k)}_{div\, f(v_k)} \rightharpoonup \underbrace{\sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\int f_j\, d\mu_x\right]}_{\int div\, f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)}, \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Ova granična vrednost je nula, jer je $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ meroznačno rešenje sistema $\operatorname{div} f(u) = 0$. Dakle dobili smo da je

$$\lim_{k\to\infty} \sum \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(v_k) = 0 \ \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sada samo primenimo teoremu 9, iz koje dobijemo da postoji aproksimativno rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ jednačine $\operatorname{div} f(u) \approx 0$, i u je ograničenog tipa.

b) Za dokaz ovog dela trebaće nam teorema 9. Kako za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $g(v_k) \rightharpoonup \bar{g}$, slabo* u L^∞, kad $k \to \infty$, imamo da svi podnizovi od v_k indukuju istu Young-ovu meru. Za novi niz v_m uzećemo $v_{\frac{1}{m}}$ iz dokaza teoreme 9, tj. imaćemo

$$v_{\eta(\varepsilon)} = v_m, \qquad \text{za } 0 < \delta \le \delta_m,\ m \ge 1.$$

Sada formiramo $u_\varepsilon = v_{\eta(\varepsilon)} * \phi_\varepsilon$ i $u = [\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}] \in \mathcal{G}_s(\Omega)$. Iz dokaza teoreme 9 znamo da $u_\varepsilon - v_{\eta(\varepsilon)} \rightharpoonup 0$, u $L^1_{loc}(\Omega)$, $\varepsilon \to 0$. Stoga i $g(u_\varepsilon) - g(v_{\eta(\varepsilon)}) \rightharpoonup 0$, u $L^1_{loc}(\Omega)$, $\varepsilon \to 0$, za sve $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, tj. $\{g(u_\varepsilon)\}_\varepsilon$ i $\{g(v_{\eta(\varepsilon)})\}_\varepsilon$ imaju iste slabe* limese u $L^\infty(\Omega)$, za sve g. Odatle sledi da $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ i $\{v_{\eta(\varepsilon)}\}_\varepsilon$ indukuju istu Young-ovu meru. Sada postaje jasno da je $u \approx \iota(v) = \iota(\lim_{k\to\infty} v_k) = \iota(v)$, gde je $v(x) = \int \lambda \, d\mu_x(\lambda)$. $\square$

Primedba 4 I u ovom slučaju nemamo jedinstvenost, tj. uopštena funkcija u definisana u dokazu teoreme 12 nije jedinstvena, kao ni Young-ova mera $\{\mu_x\}_x$ iz teoreme 11. Nejedinstvenost proizilazi iz činjenice da je ideal $\mathcal{N}_s(\Omega)$ strogo manji od prostora L^1_{loc}-nula nizova, koji je strogo manji od prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$-nula nizova, a znamo da za uniformno ograničene nizove $\{v_\varepsilon\}_\varepsilon$, $\{w_\varepsilon\}_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, koji, redom, indukuju Young-ove mere $\{\mu_x\}_x$ i $\{\nu_x\}_x$ važi

$$\begin{aligned}
\big[\{v_\varepsilon\}\big] = \big[\{w_\varepsilon\}\big] \text{ u } \mathcal{G}_s(\Omega) &\iff \{v_\varepsilon - w_\varepsilon\}_\varepsilon \in \mathcal{N}_s(\Omega),\\
\{\mu_x\}_x = \{\nu_x\}_x,\ s.s. \text{ u } \mathcal{Y}(\Omega) &\iff v_\varepsilon - w_\varepsilon \longrightarrow 0,\ \varepsilon \to 0,\ \text{u } L^1_{loc}(\Omega),\\
\big[\{v_\varepsilon\}\big] \approx \big[\{w_\varepsilon\}\big] \text{ u } \mathcal{G}_s(\Omega) &\iff v_\varepsilon - w_\varepsilon \longrightarrow 0,\ \varepsilon \to 0,\ \text{u } \mathcal{D}'(\Omega).
\end{aligned}$$

Stoga, ako predstavnici dve uopštene funkcije indukuju istu Young-ovu meru, one će biti asocirane, a neće biti jednake u $\mathcal{G}_s(\Omega)$.

2.3.2 Rešenja p-ograničenog tipa i $\mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$

Za aproksimativna rešenja p-ograničenog tipa važe slična tvrđenja. Ona indukuju meroznačna rešenja iz $\mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$. U ovom odeljku pretpostavićemo da je

$$f \in \mathcal{C}_p(\Omega;\mathbb{R}). \tag{2.33}$$

Teorema 13 *a) Neka je $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$ uopštena funkcija ograničenog tipa, koja zadovoljava* $\operatorname{div} f(u) \approx 0$. *Tada svaka Young-ova mera $\{\mu_x\}_x \in \mathcal{Y}^p(\Omega;\mathbb{R})$, konstruisana iz podniza svakog predstavnika od u, je meroznačno rešenje sistema* $\operatorname{div} f(u) = 0$.

b) Ako je $u \approx \iota(v)$, za neko $v \in L^1(\Omega)$, tada je $v(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda)$ za skoro sve $x \in \Omega$.

Dokaz ovog tvrđenja je potpuno analogan dokazu teoreme 11, samo umesto teoreme 3, treba iskoristiti teoremu 5. Za dokaz dela pod b) treba iskoristiti teoremu 6, tj. činjenicu da je preslikavanje $[x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda)] \in L^1(\Omega)$. $\square$

Teorema 14 *a) Neka je $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ meroznačno rešenje sistema* $\operatorname{div} f(u) = 0$ *i neka preslikavanje $[x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda)] \in L^1(\Omega)$. Tada postoji niz $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$, čija klasa u je p-ograničenog tipa i zadovoljava* $\operatorname{div} f(u) \approx 0$.

b) Štaviše, ovaj niz indukuje jedinstvenu Young-ovu meru koja je jednaka sa $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ za skoro sve $x \in \Omega$, i $\iota(v) \approx u$, gde je $v(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda)$.

Dokaz. Na osnovu teoreme 6 imamo da je meroznačno rešenje $\{\mu_x\}$ L^p-Young-ova mera, pa postoji niz $\{u_k\}$ koji indukuje meru $\{\mu_x\}$.

Niz $\{u_k\}$ je ograničen u L^p i za sve $g \in \mathcal{C}_p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ imamo slabu konvergenciju u L^1 kompozicije $g(u_k)$. Kada to primenimo na našu funkciju $f = (f_1, ..., f_n)$, dobijamo da

$$\underbrace{\sum \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(v_k)}_{div\, f(v_k)} \rightharpoonup \underbrace{\sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\int f_j \, d\mu_x \right]}_{\int div\, f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)}, \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Ova granična vrednost je nula, jer je $\{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ meroznačno rešenje od $\operatorname{div} f(u) = 0$. Dakle, niz $\{u_k\}$ zadovoljava uslove teoreme 10, pa kad primenino istu teoremu, dobijamo tvrđenje pod a). Dokaz tvrđenja pod b) dobijamo analogno kao u dokazu teoreme 12, uz korišćenje adekvatnih teorema za L^p. $\square$

Glava 3

Uopštene Young-ove mere

U ovom poglavlju bavićemo se ekstenzijom koncepta L^p-Young-ovih mera, opisanim u odeljku 2.1, koje su indukovane nizom $u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^m$ funkcija iz L^p za koje važi

$$\int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^p \, dx \leq C, \tag{3.1}$$

gde je Ω ograničeni podskup od $\mathbb{R}^n$ i $p \geq 1$.

U specijalnom slučaju, za $p = 2$, i posebnu klasu funkcija za koju će postojati limes kompozicije sa u_ε, koje su date kasnije sa (3.10), dobijamo uopštene Young-ove mere kao meroznačna rešenja Euler-ove jednačine, preko kojih se mogu predstaviti oscilacije i koncentracije. Te mere i njihove osobine, date su u teoremama 16 i 17.

Tartar, [29, 30], je prvi primetio da su Young-ove mere korisne i bitne za problem predstavljanja i analize oscilacija, i tako je nastao koncept meroznačnih rešenja zakona održanja preko klasične Young-ove mere, DiPerna, [13], predstavljen u predhodnom poglavlju za jednačinu $\operatorname{div} f(u) = 0$. Za proučavanje koncentracija ovaj koncept nije bio dovoljan, pa su DiPerna i Majda, [15] uveli L^p-Young-ove mere, koje su uopštili kako bi definisali meroznačna rešenja Euler-ovih jednačina.

3.1 Euler-ove i Navier-Stokes-ove jednačine

Euler-ove jednačine za nestišljiv homogen fluid u n-prostornoj dimenziji su jednačine oblika

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v}_{\frac{Dv}{Dt}} = -\nabla p, \tag{3.2}$$

gde je $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$,

$$v(x_1, ..., x_n; t) = (v_1(x_1, ..., x_n; t), ..., v_n(x_1, ..., x_n; t))^\top : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

i još važi

$$\operatorname{div} v \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = 0$$

i

$$v(x; 0) = v_0(x).$$

Veličina v predstavlja brzinu fluida, a p skalarni pritisak. Euler-ove jednačine (3.2) čine sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i} &= -\frac{\partial p}{\partial x_n}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

jer je vektor $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial t}, ..., \dfrac{\partial v_n}{\partial t}\right)^\top$, ∇v je matrica čije su kolone ∇v_j, $j = 1, ..., n$, tj. matrica

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial v_n}{\partial x_1} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_n} & ... & \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

a $v \cdot \nabla v$ je vektor

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \\ ... \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

koji se dobije kao proizvod matrice (3.4) i vektora $v = (v_1, ..., v_n)^\top$.

Navier-Stokes-ove jednačine, sa Reynold-ovim brojem $\dfrac{1}{\varepsilon}$, su jednačine oblika

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + v^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon = -\nabla p^\varepsilon + \varepsilon \triangle v^\varepsilon. \tag{3.6}$$

Struktura rešenja Euler-ovih jednačina i ponašanje niza rešenja Navier-Stokes-ovih jednačina kada $\varepsilon \to 0$ su problemi od širokog interesa. U kontekstu Navier-Stokes-ovog limesa, važnost koncepta meroznačnih rešenja je ilustrovan sledećom teoremom, koju ćemo kasnije pokazati.

Teorema 15 *Neka je v_0 glatka funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^3)$ koja zadovoljava uslov*

$$\operatorname{div} v_0 = 0,$$

i neka je v_ε slabo rešenje Navier-Stokes-ove jednačine (3.6) *sa početnim uslovom v_0.*

Tada važi da, kad $\varepsilon \to 0$, postoji konvergentan podniz rešenja koji definiše meroznačno rešenje 3D-nestišljive Euler-ove jednačine (3.2)*, za $n = 3$.*

Motivacija za teoremu je delom sledeća. Za glatki početni uslov, postoji fiksiran vremenski interval $[0, T]$ na kom Navier-Stokes-ovo rešenje v_ε jako konvergira u L^2, kad $\varepsilon \to 0$. Granica v tog niza je rešenje Euler-ove jednačine. Tokom ovog vremenskog intervala, kad $t \in [0, T]$, asocirano meroznačno rešenje Euler-ove jednačine redukuje se na Dirac-ovu masu u tački $v(x; t)$. Numerički dokazi [5, 7, 8] indiciraju da kompleksnost toka fluida raste brzo tokom vremena. To sugerira da posle izvesnog kritičnog vremena, Navier-Stokes-ovo rešenje v_ε konvergira slabo, ali ne i jako, u L^2, jer se razvijaju oscilacije i/ili koncentracije.

Na nivou meroznačnih rešenja pojava oscilacija i koncentracija se manifestuje kao dekompozicija Dirac-ove mase na mere kompleksnije strukture. DiPerna i Majda predstavili su okvir za izučavanje ove mogućnosti.

Slabo rešenje Euler-ovih jednačina se dobija iz održivog oblika jednačine (3.2),

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(v \otimes v) + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{3.7}$$

množenjem odgovarajućom test-funkcijom i parcijalnom integracijom. U održivoj jednačini (3.7), pojavljuje se divergencija matrice $(v_i v_j)_{ij}$, što se definiše kao vektor čiji su elementi divergencije kolona matrice

$(v_i v_j)_{ij}$, tj.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} v\otimes v =&\Big(\operatorname{div}(v_1v_1,...,v_nv_1),\dots,\operatorname{div}(v_1v_n,...,v_nv_n)\Big)^\top\\ =&\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(v_1v_i),\dots,\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(v_nv_i)\right)^\top.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Kada izračunamo izvode proizvoda funkcija i iskoristimo da je $\operatorname{div} v = 0$, iz (3.8) dobijamo sistem (3.3).

Funkcija $v \in L^2(\Omega)$ je slabo rešenje Euler-ovih jednačina na Ω, ako je $\operatorname{div} v = 0$, u distributivnom smislu, i

$$\iint_\Omega \phi_t\cdot v+\nabla\phi : v\otimes v\,dxdt = 0,\tag{3.9}$$

važi za sve test-funkcije $\phi \in \big(C_0^\infty(\Omega)\big)^n$, $\operatorname{div}\phi = 0$. Ovde je $\phi_t\cdot v$ skalarni proizvod vektora $\phi_t = (\phi_{1_t},...,\phi_{n_t})$ i $v = (v_1,...,v_n)^\top$, $\nabla\phi$ je matrica $\left(\dfrac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$, a oznaka : je proizvod matrica, $A : B = \sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij}$.

Proširujući definiciju 11, i koristeći (3.9), DiPerna i Majda su definisali meroznačno rešenje Euler-ove jednačine kao Young-ovu meru $\bar\nu$ koja zadovoljava

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\,\bar\nu, v\,\rangle + \operatorname{div}\langle\,\bar\nu, v\otimes v\,\rangle + \nabla p = 0,\quad \operatorname{div}\langle\,\bar\nu, v\,\rangle = 0,$$

za neku distribuciju p, tj. ako važi

$$\iint_\Omega \phi_t\langle\,\bar\nu_{(x;t)}, v\,\rangle + \nabla\phi : \langle\,\bar\nu_{(x;t)}, v\otimes v\,\rangle\,dxdt = 0,$$

za sve vektorske test funkcije $\phi \in (\mathcal{C}_0^\infty)^n$, $\operatorname{div}\phi = 0$, i

$$\iint_\Omega \nabla\psi\cdot\langle\,\bar\nu_{(x;t)}, v\,\rangle\,dxdt = 0,$$

za sve skalarne test funkcije $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$.

I ovde meroznačno rešenje dobijamo kao Young-ovu meru generisanu nizom Euler-ovih rešenja.

Propozicija 1 *Ako je u_ε niz rešenja Euler-ove jednačine* (3.2)*, koji je uniformno ograničen u L^∞,*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

tada je Young-ova mera $\bar{\nu}$ generisana ovim nizom, meroznačno rešenje Euler-ove jednačine.

Videli smo da je pri formulisanju teorema Young-ovog tipa, treba odrediti klasu funkcija g za koje će kompozicija sa nizom uniformno ograničenih funkcija u L^p imati limes. Na osnovu strukture Euler-ove jednačine, DiPerna i Majda su došli do zaključka da se najmanja klasa funkcija relevantna za posmatranje limesa kompozicije sastoji od funkcija g oblika

$$g(u) = g_0(u)\big(1 + |u|^2\big) + g_H\left(\frac{u}{|u|}\right)|u|^2, \tag{3.10}$$

gde je $g_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ i $g_H \in \mathcal{C}(S^{n-1})$, kojoj pripadaju funkcije v i $v \otimes v$ iz Euler-ove jednačine. U novoj teoremi Young-ovog tipa dobijamo uopštene Young-ove mere kao vektorske mere ν specijalne strukture, koje će biti predstavljene u teoremama 18 i 19, datim u sledećem odeljku. Delovanje mere ν na funkcije oblika (3.10) prikazano je u sledećim teoremama.

Teorema 16 *Neka je $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ proizvoljna familija uniformno ograničenih funkcija u $L^2(\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Tada postoji podniz, isto indeksiran, i postoji mera $\mu \in M(\Omega)$ takva da*

$$|u_\varepsilon|^2 \rightharpoonup \mu,$$

u $M(\Omega)$*, i postoji* μ*-merljivo preslikavanje*

$$(x;t) \in \Omega \mapsto \{\nu^1_{(x;t)}, \nu^2_{(x;t)}\} \in M^+(\mathbb{R}^n) \oplus ProbM(S^{n-1}),$$

takvo da za sve g *oblika* (3.10)*, važi*

$$g(u_\varepsilon) \rightharpoonup \langle\, \nu^1, g_0 \,\rangle (1+f)\, dxdt + \langle\, \nu^2, g_H \,\rangle\, d\mu,$$

gde je f *Radon-Nykodim-ov izvod mere* μ *po* $dxdt$*, tj.*

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \iint \phi g(u_\varepsilon)\, dxdt = \\ &= \iint \phi \langle\, \nu^1, g_0 \,\rangle (1+f)\, dxdt + \iint \phi \langle\, \nu^2, g_H \,\rangle\, d\mu, \end{aligned}$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$.

Primedba 5 Uređena trojka (μ, ν^1, ν^2) predstavlja kanoničku dekompoziciju vektorske mere ν, koju ćemo zvati *uopštena Young-ova mera.* Ona je definisana na klasi funkcija široj od klase funkcija oblika (3.10) na kojoj daje konvergenciju tipa

$$g(u_\varepsilon) \rightharpoonup \langle\, \nu, g \,\rangle,$$

za sve g iz te klase, koju ćemo posmatrati u sledećemo odeljku. Restrikcija mere ν na klasu funkcija oblika (3.10) daje

$$\nu = \nu^1(\, dxdt + d\mu) + \nu^2\, d\mu. \tag{3.11}$$

Definicija 16 Uopštena Young-ova mera ν je *meroznačno rešenje Euler-ove jednačine* ako

$$\iint \phi_t \langle\, \nu, v \,\rangle + \nabla\phi : \langle\, \nu, v \otimes v \,\rangle = 0, \tag{3.12}$$

važi za sve $\phi \in \left(\mathcal{C}_0^\infty\right)^n$, za koje važi $\operatorname{div}\phi = 0$, i

$$\iint \nabla\phi : \langle\, \nu, v \,\rangle = 0,$$

važi za sve $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$.

Primedba 6 Kako je delovanje mere ν u (3.12) ograničeno na specijalnu klasu funkcija oblika (3.10), mi ćemo posmatrati dekompoziciju (3.11) da bismo (3.12) izrazili u sledećem obliku

$$\iint \phi_t \left\langle \nu^1_{(x;t)}, \frac{v}{1+|v|^2} \right\rangle (1+f)\, dxdt$$
$$+\nabla\phi : \left\langle \nu^2_{(x;t)}, \frac{v\otimes v}{|v|^2} \right\rangle d\mu = 0.$$

Sledeće tvrđenje je direktna posledica teoreme 16 i definicije 16.

Propozicija 2 *Uopštene Young-ove mere asocirane sa svakim nizom slabih rešenja Euler-ove jednačine, koji ima lokalno uniformno ograničenu kinetičku energiju, tj. zadovoljava*

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2\, dxdt \le C,$$

definiše meroznačno rešenje Euler-ove jednačine.

Primer 6 [1] Svako klasično slabo rešenje Euler-ove jednačine u sa lokalno konačnom kinetičkom energijom definiše meroznačno rešenje na sledeći način,

$$d\mu = |u|^2\, dxdt$$
$$\nu^1_{(x;t)} = \delta_{u(x;t)}$$
$$\nu^2_{(x;t)} = \delta_{\theta(x;t)} \in M(S^{n-1}),$$

[1] Više konkretnih primera u kojima se pojavljuju oscilacije i razvijaju koncentracije možete naći u [21]

gde je $\theta(x;t) = \dfrac{u(x;t)}{|u(x;t)|}$.
U dvodimenzionalnom slučaju, ove mere imaju oblik

$$\begin{aligned} \mu &= \Gamma\delta(x) \\ \nu^1_{(x;t)} &= \delta_0 \\ \nu^2_{(x;t)} &= \text{ uniformna mera na } S^1, \end{aligned}$$

gde je Γ fiksirana konstanta, a $\delta(x)$ Dirac-ova mera na pravoj $x = 0$. Uniformna mera na S^1 definiše se preko sledeće formule

$$\langle\, \nu^2_{(x;t)}, g_H \,\rangle = \int_{S^1} g_H(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Trojka (μ, ν^1, ν^2) definiše meroznačno rešenje $\nu = (\mu, \nu^1, \nu^2)$ koje je visoko koncentrovano i ima ne-Dirac-ovo ponašanje na homogenim funkcijama. Primetimo još da je u ovom slučaju mera ν^1 klasična Young-ova mera. $\Diamond$

Kao posledicu ove diskusije dobijamo sledeće tvrđenje, koje će biti dokazano u sledećem odeljku.

Teorema 17 *Neka je $\nu = (\mu, \nu^1, \nu^2)$ uopštena Young-ova mera asocirana sa L^2-nizom $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, i neka je*

$$\mu = \mu_s + f\, dxdt$$

Lebesque-ova dekompozicija mere μ na singularni i apsolutno neprekidni deo.

a) Ako je $|u_\varepsilon|_\infty \leq C$, onda je $\mu_s = 0$, a klasična Young-ova mera $\bar{\nu}$ se dobija kao

$$\bar{\nu}_{(x;t)} = (1 + |u|^2)^{-1}\, \nu^1_{(x;t)}\, (1 + f).$$

b) Slaba neprekidnost tipa

$$g(u_\varepsilon) \rightharpoonup g(u),$$

važi za $g = g_0(1 + |u|^2)$, $g_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$, *ako i samo ako se* ν^1 *redukuje na težinsku Dirac-ovu meru,*

$$\nu^1_{(x;y)} = \alpha(x;t)\delta_{u(x;t)},$$

gde je $0 \leq \alpha \leq 1$ *i* $(1 + |u|^2) = \alpha(1 + f)$.

c) Jaka konvergencija

$$u_\varepsilon \to u, \ \ u \ L^2,$$

važi ako i samo ako je $\mu_s = 0$ *i* $\alpha = 1$, *skoro svuda.*

U sledećem odeljku bavićemo se osobinama uopštenih Young-ovih mera, pomoću kojih ćemo, u odeljku 3.3. naći meroznačna rešenja Navier-Stokes-ovih jednačina, koja preko nula-viskoznog limesa daju rešenja Euler-ovih jednačina.

Koncept meroznačnih rešenja, koji je predstavljen ovde, primenjuje se na mnoge nelinearne jednačine matematičke fizike sa prirodnom L^p-granicom, koja se još naziva i energetska granica.

3.2 Konstrukcija uopštenih Young-ovih mera

Za uniformno ograničen niz L^p-funkcija, tj. niz koji zadovoljava (3.1), i nelinearnu funkciju g, treba nam slabi limes njihove kompozicije,

$$w - \lim_{\varepsilon \to 0} g(u_\varepsilon),$$

tj. treba da postoji limes

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \phi(x) g\big(u_\varepsilon(x)\big)\, dx, \tag{3.13}$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. Najširu klasu funkcija gde očekujemo da izračunamo limes (3.13) čine funkcije oblika

$$g(u) = \widetilde{g}(u)\big(1 + |u|^p\big), \tag{3.14}$$

gde je $\widetilde{g} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$. Na prostoru funkcija oblika (3.14), norma se definiše preko norme prostora neprekidnih ograničenih funkcija na $\mathbb{R}^m$,

$$\|g\|_\infty = \max_{u\in\mathbb{R}^m} |\widetilde{g}(u)| = \|\widetilde{g}\|_\infty.$$

Važi sledeća teorema o reprezentaciji.

Teorema 18 *Neka niz $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ zadovoljava uslov* (3.1)*. Tada postoji podniz, isto indeksiran, i postoji skalarna mera $\sigma \in M^+(\Omega)$, tako da imamo sledeću w*-konvergenciju*

$$\big(1 + |u_\varepsilon(x)|^p\big)\, dx \rightharpoonup d\sigma,$$

tj. važi

$$\lim \int \phi\big(1 + |u_\varepsilon(x)|^p\big)\, dx = \int \phi\, d\sigma,$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.
Više od toga, postoji ograničena linearna transformacija

$$T : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m) \to L^\infty(\sigma),$$

tako da za sve g oblika (3.14) *važi*

$$g\big(u_\varepsilon(x)\big)\, dx = \rightharpoonup T(\widetilde{g}) d\sigma, \tag{3.15}$$

tj. važi

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int \phi g\big(u_\varepsilon(x)\big)\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \phi\widetilde{g}(u_\varepsilon)\big(1 + |u_\varepsilon(x)|^p\big)\, dx \\ &= \int \phi T(\widetilde{g})\, d\sigma, \end{aligned} \tag{3.16}$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Ovde imamo ograničene neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^m$. Da bismo koristili Risz-ovu teoremu o reprezentaciji mere na kompaktnom skupu (nenegativna mera je neprekidna nenegativna funkcionela na $\mathcal{C}(K)$), potrebno je izvršiti kompaktifikaciju od $\mathbb{R}^m$. U slučaju $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ koristimo Stone-Cach-ovu kompaktifikaciju, koja daje izomorfizam

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m) \cong \mathcal{C}(\beta\mathbb{R}^m).$$

Mi ćemo ignorisati izomorfizam između ovih prostora i reći ćemo da je $\widetilde{g} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ ako i samo ako $\widetilde{g} \in \mathcal{C}(\beta\mathbb{R}^m)$. Skup svih linearnih kombinacija funkcija oblika

$$\left\{\phi(x)\widetilde{g}(u) \,\middle|\, \phi \in \mathcal{C}_0(\Omega),\, \widetilde{g} \in \mathcal{C}(\beta\mathbb{R}^m)\right\}$$

je gust u $\mathcal{C}_0(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m)$, a $\beta\mathbb{R}^m$ je kompaktan Hausdorff-ov prostor. Dual prostora $\mathcal{C}_0(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m)$ je prostor Radon-ovih mera na $\Omega \times \beta\mathbb{R}^m$, tj.

$$\mathcal{C}_0(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m)' = M(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m).$$

Dokaz teoreme 18. Za fiksirano ε, funkcija u_ε definiše jedinstvenu Radonovu meru $\nu_\varepsilon \in M^+(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m)$ na sledeći način,

$$\langle\, \nu_\varepsilon, \phi\widetilde{g} \,\rangle \equiv \int_\Omega \phi g(u_\varepsilon)\, dx = \int_\Omega \phi\widetilde{g}(u_\varepsilon)\big(1 + |u_\varepsilon|^p\big)\, dx,$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, $\widetilde{g} \in \mathcal{C}_b(\beta\mathbb{R}^m)$. Uniformno ograničenje funkcija u_ε, (3.1), implicira da su i mere ν_ε uniformno ograničene, tj. da važi,

$$\big|\nu_\varepsilon(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m)\big| \le C.$$

Stoga, zbog slabe*-kompaktnosti u $M^+(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m)$ i Riesz-ove teoreme o reprezentaciji, imamo da postoji konvergentan podniz niza mera ν_ε, isto indeksiran, tj. postoji mera $\nu \in M^+(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m)$ takva da

$$\nu_\varepsilon \rightharpoonup \nu,$$

u $M^+(\Omega \times \beta\mathbb{R}^m)$, što znači,

$$\lim \int_\Omega \phi g(u_\varepsilon)\, dx = \lim \langle\, \nu_\varepsilon, \phi\widetilde{g}\,\rangle = \langle\, \nu, \phi\widetilde{g}\,\rangle \tag{3.17}$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, $\widetilde{g} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$.

Ako stavimo $\widetilde{g} \equiv 1$ u (3.17), imamo da je skalarna mera σ projekcija mere ν na $\mathbb{R}^m$, tj. važi (3.15), i

$$\sigma(E) = \nu(E \times \beta\mathbb{R}^m),$$

za sve Borel-ove skupove E u Ω. Ako skalarnu meru $\nu_{\widetilde{g}}$ definišemo na Ω na sledeći način

$$\langle\, \nu_{\widetilde{g}}, \phi\,\rangle \equiv \langle\, \nu, \phi\widetilde{g}\,\rangle,$$

dobijamo da za nju važi

$$\begin{aligned}
|\langle\, \nu_{\widetilde{g}}, \phi\,\rangle| &= |\langle\, \nu, \phi\widetilde{g}\,\rangle| = \big|\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\, \nu_\varepsilon, \phi\widetilde{g}\,\rangle\big| \\
&= \left|\lim \int_\Omega \phi\widetilde{g}(u_\varepsilon)\big(1 + |u_\varepsilon|^p\big)\, dx\right| \\
&\le \|\widetilde{g}\|_\infty \left|\lim \int_\Omega \phi\big(1 + |u_\varepsilon|^p\big)\, dx\right| \\
&= \|\widetilde{g}\|_\infty \big|\lim\langle\, (1 + |u_\varepsilon|^p)\, dx, \phi\,\rangle\big| \\
&= \|\widetilde{g}\|_\infty |\langle\, d\sigma, \phi\,\rangle| = \|\widetilde{g}\|_\infty \left|\int_\Omega \phi\, d\sigma\right| \\
&\le \|\widetilde{g}\|_\infty \int_\Omega |\phi|\, d\sigma,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

što implicira da je $|\nu_{\widetilde{g}}(E)| \le \|\widetilde{g}\|_\infty \sigma(E)$, za sve E, tj. da je $\nu_{\widetilde{g}}$ apsolutno neprekidna u odnosu na σ. Iz Radon-Nykodym-ove teoreme sledi da za sve $\widetilde{g}$, mera $\nu_{\widetilde{g}}$ može da se predstavi u obliku

$$\nu_{\widetilde{g}}(E) = \int_E f\, d\sigma,$$

za neko $f \in L^1(\sigma)$. Funkcija f linearno zavisi od $\widetilde{g}$ i definiše transformaciju T. Ograničenost transformacije T sledi iz (3.18) i dualnosti prostora L^1 i L^∞. $\square$

Granice u (3.15) i (3.16) mogu se interpretirati kao vektorske mere. Potsetimo se da slabo*-merljiva vektorska mera ν na Ω, svaki Borelov skup E u Ω slika u $\nu(E)$, što je element duala X', nekog Banachovog prostora X, i $\nu(E)$ je slabo*-prebrojivo aditivna, tj. ako je E prebrojiva unija disjunktnih skupova E_j, onda je

$$\nu(E) = w^* - \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \nu(E_j),$$

tj.

$$\big\langle\, \nu(E), g \,\big\rangle = w^* - \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \big\langle\, \nu(E_j), g \,\big\rangle,$$

za sve $g \in X$. Prostor vektorskih mera obeležava se sa $M(\Omega; X')$. Za $X = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ imamo da je granica u (3.16) vektorska mera iz prostora $M(\Omega; \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)')$. Tako dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 3 *Skalarna mera σ i linearna transformacija T iz teoreme 18 definišu vektorsku meru ν u $M\big(\Omega; \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)'\big)$,*

$$\big\langle\, \nu(E), g \,\big\rangle = \int_E T(\widetilde{g})\, d\sigma,$$

na svim Borel-ovim skupovima E.

Isto tvrđenje kao u teoremi 18 možemo formulisati i za neprekidne funkcije oblika

$$g(u) = g_H\left(\frac{u}{|u|}\right)|u|^p, \tag{3.19}$$

gde je $g_H \in \mathcal{C}(S^{n-1})$. U tom slučaju dobijamo skalarnu meru μ kao limes

$$|u_\varepsilon|^p \rightharpoonup \mu,$$

u $M(\Omega)$. Za funkcije oblika (3.19) važe ista tvrđenja kao u teoremi 18 i posledici 3, samo σ treba zameniti sa μ. Kako $\big(1+|u_\varepsilon(x)|^p\big)\,dx \rightharpoonup d\sigma$, i $|u_\varepsilon|^p \rightharpoonup \mu$, imamo da važi

$$d\sigma = d\mu + dx.$$

Stoga postoji linearna transformacija

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}(S^{n-1}) \to L^\infty(\mu),$$

takva da je

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \phi g_H(u_\varepsilon)|u_\varepsilon|^p\,dx = \int \phi \mathcal{L}(g_H)\,d\mu, \tag{3.20}$$

za sve $g_H \in \mathcal{C}(S^{n-1})$ i $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Reprezentacija na separabilnim prostorima

Počećemo od konstrukcije familije mera $\nu^2_{(x;t)} \in ProbM(S^{n-1})$ iz teoreme 16. Koristićemo verziju teoreme 18 koja se odnosi na funkcije oblika (3.19).

Teorema 19 (Young-ove mere za homogene funkcije) *Postoji μ-merljivo preslikavanje*

$$x \in \Omega \mapsto \nu_x \in ProbM(S^{n-1}),$$

takvo da

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \phi g(u_\varepsilon)\,dx = \int \phi\langle\, \nu_x, g_H \,\rangle\,d\mu,$$

za sve g oblika $g = g_H|u|^p$ i $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, gde je

$$\langle\, \nu_x, g_H \,\rangle = \int_{S^{n-1}} g_H \, d\nu_x.$$

Dokaz. Izaberimo prebrojiv gust skup funkcija h_j iz separabilnog prostora $\mathcal{C}(S^{n-1})$. Iz (3.20) imamo da postoji skup N mere nula, $\mu(N) = 0$, takav da je

$$|\mathcal{L} \circ h_j(x)| \leq \|h_j\|_\infty, \tag{3.21}$$

za $x \in \Omega \setminus N$. Ovo je direktna posledica ograničenosti transformacije $\mathcal{L}$. Neophodno je izbeći samo prebrojiv broj skupova mere nula kako bismo tvrdili (3.21) na jednom skupu N mere nula. Na osnovu Riesz-ove teoreme o reprezentaciji, postoji jedinstveni element $\nu_x \in M^+(S^{n-1})$ takav daje

$$\langle\, \nu_x, h_j \,\rangle = \mathcal{L} \circ h_j(x),$$

za $x \in \Omega \setminus N$. Ovo nam daje traženo μ-merljivo preslikavanje iz Ω u $ProbM(S^{n-1})$. Ako izaberemo za $h \equiv 1$, iz (3.21) vidimo da je ν probabilistička mera, jer je tada

$$\int_{S^{n-1}} d\nu_x = \langle\, \nu_x, 1 \,\rangle = \mathcal{L}(1),$$

tj.

$$\int_\Omega \phi \int_{S^{n-1}} d\nu_x \, d\mu = \int_\Omega \phi \mathcal{L}(1) \, d\mu = \lim \int_\Omega \phi |u_\varepsilon|^p \, dx,$$

za sve $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. $\square$

Isti dokaz daje još konkretniju reprezentaciju funkcije $T\widetilde{g}$ iz teoreme 18, ako funkcija $\widetilde{g}$ biramo iz separabilne kompletno regularne podalgebre od $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$. Podalgebra F je kompletno regularna ako

je zatvorena u odnosu na maksimum-normu, sadrži konstante i razdvaja tačke od zatvorenih skupova. O ovakvim algebrama može se naći u npr. [19]. Primeri ovakvih algebra su $F_\infty = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m)$ i $F_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \cup \{\text{konstante}\}$. Svakoj takvoj podalgebri F možemo pridružiti jednu kompaktifikaciju skupa $\mathbb{R}^m$, u oznaci $\beta_F\mathbb{R}^m$. $\beta_F\mathbb{R}^m$ je kompaktan kompletno regularan Hausdorff-ov prostor i podalgebra F je izomorfna sa $\mathcal{C}(\beta_F\mathbb{R}^m)$. Stoga se svaka neprekidna linearna funkcionela na F idetifikuje sa jednom merom iz $M(\beta_F\mathbb{R}^m)$. Važi i sledeća osobina

$$F_1 \subset F_2 \Rightarrow \beta_{F_1}\mathbb{R}^m \subset \beta_{F_2}\mathbb{R}^m.$$

Specijalno, algebra $\beta_{F_0}\mathbb{R}^m$ je izomorfna sa kompaktifikacijom od $\mathbb{R}^m$ pomoću jedne tačke, tzv. "severnog pola", pa je u tom slučaju

$$M(\beta_{F_0}\mathbb{R}^m) = M(\mathbb{R}^m) \oplus \{\alpha\delta_{sp}\}, \tag{3.22}$$

gde je $\langle\, \delta_{sp}, 1 \,\rangle = 1$ i $\langle\, \delta_{sp}, g_0 \,\rangle = 0$, za sve $g_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$. Stoga mere na kompaktifikaciji jednom tačkom skupa $\mathbb{R}^m$ imaju dekompoziciju na meru na $\mathbb{R}^m$ i Dirac-ovu meru u severnom polu.

Teorema 20 *Postoji σ-merljivo preslikavanje*

$$x \in \Omega \mapsto \nu_x \in ProbM(\beta_F\mathbb{R}^m),$$

takvo da

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \phi g(u_\varepsilon)\, dx = \int \phi \langle\, \nu_x, \widetilde{g} \,\rangle\, d\sigma, \tag{3.23}$$

za sve $\widetilde{g} \in F$ i $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, gde je

$$\langle\, \nu_x, \widetilde{g} \,\rangle = \int_{\beta_F\mathbb{R}^m} \widetilde{g}\, d\nu_x. \tag{3.24}$$

Dokaz teoreme 20 je isti kao u teoremi 19, pa ćemo ga izostaviti.

Sada možemo da kompletiramo dokaz teoreme 16 o uopštenoj meri, koristeći F_0 u teoremi 20. Kako mere na kompaktifikaciji jednom

tačkom skupa $\mathbb{R}^m$ imaju dekompoziciju na meru na $\mathbb{R}^m$ i Dirac-ovu meru u severnom polu, (3.22), i osobine (3.23) i (3.24) iz teoreme 20, deo $\nu^1_{(x;t)}$ Young-ove mere iz teoreme 16 nije probabilistička mera, jer negde može otići i u beskonačnost, zbog dela δ_{sp}. Ovu osobinu imamo u sledećoj posledeci teoreme 20, koja je motivisana činjenicom da se svaka probabilistička mera $\nu \in ProbM(\beta_{F_0}\mathbb{R}^m)$ može predstaviti u obliku

$$\nu = \nu^1 + (1-\alpha)\delta_{sp},$$

gde je $\nu^1 \in M^+(\mathbb{R}^m)$ i $0 \leq \alpha \equiv \nu^1(\mathbb{R}^m) \leq 1$.

Posledica 4 *Postoji σ-merljivo preslikavanje α, $0 \leq \alpha \leq 1$, tako da mera ν_x iz teoreme 20 ima oblik*

$$\nu_x = \nu^1_x + \big(1-\alpha(x)\big)\delta_{sp},$$

gde je $\nu^1_x \in M^+(\mathbb{R}^m)$ i $\nu^1_x(\mathbb{R}^m) = \alpha(x)$. Stoga, ako je

$$g(u) = g_0(u)\big(1+|u|^p\big), \tag{3.25}$$

gde je $g_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$, tada je

$$\lim \int \phi g(u_\varepsilon)\,dx = \int \phi\langle\, \nu^1_x, g_0\,\rangle\,d\sigma.$$

Posmatrajmo sada uopštenu Young-ovu meru, μ, datu u specijalnom slučaju teoreme 16, koji se odnosi na funkcije oblika (3.19). Lebesque-ova dekompozicija mere μ na singularni i apsolutno neprekidni deo je data sa

$$\mu = \mu_s + f\,dx,$$

gde je $\mu_s \perp dx$, $f \in L^1(\Omega)$ i $\sigma = dx + \mu$.

Propozicija 3 *Ako je g oblika (3.25), gde je $g_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$, tada je*

$$\lim \int \phi g(u_\varepsilon)\,dx = \int \phi\langle\, \nu^1_x, g_0\,\rangle(1+f)\,dx, \tag{3.26}$$

gde je ν_x^1 *definisano u posledici* 4*, tj. važi*

$$\int \phi\langle\, \nu_x^1, g_0 \,\rangle\, d\mu_s = 0, \tag{3.27}$$

za sve $g_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$.

Dokaz. Ako je g_0 funkcija koja ima nosač u lopti prečnika R, odnosno ako je g_0 bilo koja ograničena funkcija, onda je (3.26) trivijalno zadovoljeno, jer je tada

$$\langle\, \nu_x, g_0 \,\rangle = \langle\, \nu_x^1 + \big(1 - \alpha(x)\big)\delta_{sp}, g_0 \,\rangle = \langle\, \nu_x^1, g_0 \,\rangle.$$

Iskoristićemo tu činjenicu za dokaz propozicije. Posmatraćemo niz koji se dobija odsecanjem niza u_ε na sledeći način,

$$u_\varepsilon^R = \gamma_\varepsilon^R u_\varepsilon,$$

gde je γ_ε^R karakteristična funkcija skupa na kom je $|u_\varepsilon| \leq R$. Ako se g_0 anulira za $|u| > R$, tada je

$$g_0(u_\varepsilon^R)\big(1 + |u_\varepsilon^R|^p\big) = g_0(u_\varepsilon)\big(1 + |u_\varepsilon|^p\big)$$

pa se možemo pozvati na prezentaciju klasične Young-ove mere (2.1), (2.2), za $F = g$, koja nam daje egzistenciju familije mera $\nu_x^R \in ProbM(\mathbb{R}^m)$, takve da je

$$\begin{aligned}\lim \int \phi g(u_\varepsilon^R)\, dx &= \int \phi\langle\, \nu_x^R, g \,\rangle\, dx \\ &= \int \phi\langle\, \nu_x^1, g_0 \,\rangle(1 + f)\, dx + \int \phi\langle\, \nu_x^1, g_0 \,\rangle\, d\mu_s,\end{aligned}$$

za sve g oblika $g = g_0\big(1 + |u|^p\big)$. Kako klasična Young-ova mera nema singularni deo, ovde je

$$\int \phi\langle\, \nu_x^1, g_0 \,\rangle\, d\mu_s = 0, \tag{3.28}$$

za sve g_0 koje se anuliraju za $|u| > R$. Dakle dobili smo traženo tvrđenje (3.27), ali za funkcije g_0 koje se anuliraju za $|u| > R$. Da bismo dobili traženo tvrđenje za sve $g_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$, treba primetiti da (3.28) definiše linearnu neprekidnu funkcionelu na $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$, za fiksirano ϕ, i da je skup funkcija g_0 koje se anuliraju van neke lopte, gust u $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Direktna posledica ove propozicije je sledeće tvrđenje.

Posledica 5 *Ako je $|u_\varepsilon|_\infty \leq C$, tada je $\mu_s = 0$, i*

$$\nu_x = (1+f)\big(1+|u|^p\big)^{-1}\nu_x^1$$

je klasična Young-ova mera definisana u predthodnom poglavlju sa (2.1) *i* (2.2).

Za kraj ovog odeljka, pokazaćemo tvrđenja b) i c) teoreme 17. Neka je

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u, \text{ u } L^p(\Omega), \ 1 < p < \infty,$$

i neka važi

$$g(u_\varepsilon) \rightharpoonup g(u), \text{ u } L^p(\Omega), \tag{3.29}$$

za sve g oblika $g = g_0(u)\big(1+|u|^p\big)$, $g_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$. Iz (3.29) i propozicije 3 imamo da je

$$\int \phi\langle\, \nu_x^1, g_0\,\rangle(1+f)\,dx = \lim \int \phi g(u_\varepsilon)\,dx = \int \phi g(u)\,dx,$$

tj. da je

$$\langle\, \nu_x^1, g_0\,\rangle f(x) = \langle\, \delta_{u(x)}, g\,\rangle, \tag{3.30}$$

za skoro sve x. Iz (3.30) vidimo da je ν_x^1 težinska Dirac-ova mera, skoro svuda, u odnosu na $f\,dx$. Zbog toga, a na osnovu posledice 4, zaključujemo da postoji $\alpha(x)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, tako da

$$\big(1+|u|^p\big) = \alpha(x)f(x), \text{ s.s.}$$

Ostaje nam još deo c) teoreme 17. Znamo da $u_\varepsilon \to u$ u L^p ako i samo ako $|u_\varepsilon|^p \rightharpoonup |u|^p$ u $M(\Omega)$.[2] Kada primenimo teoremu 19 za $g_H \equiv 1$ dobijamo da $|u_\varepsilon|^p \rightharpoonup |u|^p$ u $M(\Omega)$ važi ako i samo ako je

$$|u|^p\,dx = \mu_s + f\,dx,$$

odnosno ako je $\mu_s = 0$ i $f = |u|^p$, skoro svuda. Ova diskusija, za $p = 2$ nam daje tvrđenje teoreme 17.

3.3 Meroznačna rešenja Euler-ovih jednačina i nula difuzioni limes za Navier-Stokes-ove jednačine

Prvo ćemo pokazati propoziciju koja intuitivno govori da slaba stabilnost i slaba konzistencija Euler-ovih jednačina impliciraju konvergenciju ka meroznačnom rešenju.

Propozicija 4 *Neka je u_ε niz funkcija za koje važi* $\operatorname{div} u_\varepsilon = 0$, *i neka su zadovoljene sledeće osobine:*

a) Slaba stabilnost: Za svako $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, postoji konstanta $C(\Omega)$ takva da je

$$\iint_\Omega |u_\varepsilon(x;t)|^2\,dxdt \le C(\Omega).$$

b) Slaba konzistencija: za sve test funkcije $\phi \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^n$, $\operatorname{div}\phi = 0$, *važi*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_\Omega \phi_t \cdot u_\varepsilon + \nabla\phi : u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon\,dxdt = 0.$$

Ako je $\nu = (\mu, \nu^1, \nu^2)$ asocirana uopštena Young-ova mera iz teoreme 16, *tada je ν meroznačno rešenje Euler-ovih jednačina na Ω.*

[2] Ovo tvrđenje je poznato kao Vitali-Hahn-Saks-ova teorema.

Dokaz. Iz definicije meroznačnih rešenja Euler-ove jednačine, definicija 16, primenjene na funkcije oblika (3.10), što je dato u primedbi 6, i uslova slabe konzistencije, imamo da je

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_\Omega \phi_t \cdot u_\varepsilon + \nabla\phi : u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon \, dxdt = \\ &= \iint_\Omega \phi_t \left\langle \nu^1_{(x;t)}, \frac{u}{1+|u|^2} \right\rangle (1+f)\, dxdt + \nabla\phi : \langle \nu^2_{(x;t)}, \theta\otimes\theta \rangle \, d\mu, \end{aligned}$$

gde je $\theta = \dfrac{u}{|u|}$. $\square$

Kao direktnu posledicu propozicije 4, dobijamo teoremu 15, datu u prvom odeljku ovog poglavlja.

Iz klasične teorije Navier-Stokes-ove jednačine, [31], poznato je da za svako $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, za koje važi $\operatorname{div} u_0 = 0$, u smislu distribucija, postoji najmanje jedno (Lerey-Hopf-ovo) slabo rešenje, $u_\varepsilon(x;t)$, Navier-Stokes-ovih jednačina koje zadovoljava nejednakost kinetičke energije,

$$\max_{0\le t<\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |u_\varepsilon(x;t)|^2 \, dx \le \int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^2 \, dx.$$

Stoga, za veliki Reynold-ov broj, $1\backslash\varepsilon$, u_ε zadovoljava uslov slabe stabilnosti. Množenjem Navier-Stokes-ove jednačine sa test funkcijom ϕ, dobijamo

$$\iint_\Omega \phi_t u_\varepsilon + \nabla\phi : u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon \, dxdt = \varepsilon \iint \Delta\phi u_\varepsilon \, dxdt. \tag{3.31}$$

Kako je $|\iint \Delta\phi u_\varepsilon| \le C\|u_\varepsilon\|_{L^2} \le CT\|u_0\|^2_{L^2}$, (3.31) implicira da je ispunjen uslov konzistentnosti. Da bismo dobili tvrđenje teoreme 15, treba samo primeniti propoziciju 4 na niz u_ε, koji ispunjava oba uslova, slabe stabilnosti i slabe konzistencije.

3.4 Colombeau-ovska rešenja Euler-ovih jednačina

Na kraju cilj nam je da iskoristimo ideju iz Propozicije 4 za dobijanje meroznačnih rešenja Euler-ovih jednačina, kako bismo dobili Colombeau-ovsko rešenje istih. Naime, ako posmatramo Euler-ove jednačine u održivom obliku

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(v \otimes v) + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{3.32}$$

gde je

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v \otimes v =& \Big(\operatorname{div}(v_1 v_1, ..., v_n v_1), \dots, \operatorname{div}(v_1 v_n, ..., v_n v_n)\Big)^\top \\ =& \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(v_1 v_i), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(v_n v_i)\right)^\top, \end{aligned} \tag{3.33}$$

vidimo da je to sistem u kom se svaka od jednačina može zapisati u obliku

$$\operatorname{div}_{n+1} f^j(v) \approx 0, \ j = 1, ...n,$$

gde je $v = (v_1, ..., v_n)$, $f^j = (v_j, v_1 v_j, v_2 v_j, ..., v_n v_j)$, a divergenciju posmatramo u odnosu na promenljive $(t, x_1, x_2, ...x_n)$, odnosno dobijamo sistem oblika

$$\operatorname{div}_{n+1} F(v) \approx 0,$$

gde je $F = (f^1, ..., f^n)^\top$.

Propozicija 5 *Neka je* $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *niz funkcija za koje važi* $\operatorname{div} v_\varepsilon = 0$, *i neka su zadovoljene sledeće osobine:*

a) Slaba stabilnost: Za svako $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, *postoji konstanta* $C(\Omega)$ *takva da je*

$$\iint_\Omega |v_\varepsilon(x;t)|^2 \, dxdt \leq C(\Omega).$$

b) Slaba konzistencija: za sve test funkcije $\phi \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^n$, važi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_\Omega \phi_t \cdot v_\varepsilon + \nabla\phi : v_\varepsilon \otimes v_\varepsilon \, dxdt = 0.$$

Tada postoji $u \in \mathcal{G}_s$, aproksimativno rešenje Euler-ovih jednačina.

Dokaz. U slučaju da je $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ niz umerenih glatkih funkcija, tj. $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{E}_{M,s}(\Omega)$, možemo uzeti klasu tog niza za traženo rešenje $u \in \mathcal{G}_s(\Omega)$. U opštem slučaju, iskoristićemo ideju iz teoreme 9, iz odeljka 2.2.3, kako bismo uglačali niz $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Neka su $\psi^j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, $j = 1, ..., n$, čiji su integrali jednaki jedan i neka je

$$\psi^j{}_\delta(x) = \delta^{-n}\psi^j\Big(\frac{x}{\delta}\Big).$$

Uvedimo oznaku $\psi = (\psi^1, ..., \psi^n)$ i napišimo funkcije v_ε preko koordinata, $v_\varepsilon = (v_\varepsilon^1, ..., v_\varepsilon^n)$. Za fiksirano $\varepsilon > 0$, imamo da $v_\varepsilon^j * \psi^j{}_\delta \to v_\varepsilon^j$, u $L^2_{loc}(\Omega)$, kad $\delta \to 0$, i da je $v_\varepsilon^j * \psi^j{}_\delta$ ograničena nezavisno od δ u $L^2(\Omega)$, jer je

$$\|v_\varepsilon^j * \psi^j{}_\delta\|_{L^2} \le \|v_\varepsilon^j\|_{L^2}\|\psi^j{}_\delta\|_{L^1} = \|v_\varepsilon^j\|_{L^2},$$

a od ranije imamo da je ograničena nezavisno i od ε. Neka je, dalje, $(K_m)_{m\ge1}$ niz kompaktnih podskupova od Ω koji pokriva Ω. Možemo naći strogo opadajući niz pozitivnih brojeva $(\delta_m)_{m\ge1}$, koji konvergira ka nuli, takav da je

$$\|v_{1/m}^j * \psi_\delta - v_{1/m}^j\|_{L^2(K_m)} \le \frac{1}{m}, \qquad \text{za } 0 < \delta \le \delta_m.$$

Definišimo jednu rastuću, po delovima konstantnu funkciju

$$\begin{aligned} &\eta : (0,1) \to (0,1] \\ &\eta(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{za } 0 < \varepsilon \le \delta_m,\ m \ge 1 \\ 1, & \text{za } \varepsilon \ge \delta_1, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.34}$$

i preko nje traženi niz

$$u_\varepsilon^j = v_{\eta(\varepsilon)}^j * \psi_\varepsilon^j, \text{ za } \varepsilon \in (0,1), \text{ i za sve } j = 1, ..., n.$$

Primetimo da je svaka funkcija u_ε^j glatka, i da se familija $\{v_{\eta(\varepsilon)}^j\}_{\varepsilon>0}$ isto ponaša kao i $\{v_\varepsilon^j\}_{\varepsilon>0}$. Po definiciji molifajera ψ_δ^j, imamo da je $\partial^\alpha u_\varepsilon^j = v_{\eta(\varepsilon)}^j * \varepsilon^{-|\alpha|}(\partial^\alpha \psi^j)_\varepsilon$, gde je $(\partial^\alpha \psi^j)_\delta(x) = \delta^{-n}\partial^\alpha \psi^j(\frac{x}{\delta})$. Odatle imamo da je $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ umeren niz glatkih funkcija. Neka je u^j njegova klasa u $\mathcal{G}_s(\Omega)$. Po definiciji, imamo da je $\|u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\|_{L^2(K_m)} \leq \frac{1}{m}$, za $\delta_{m+1} < \varepsilon \leq \delta_m$, odakle imamo da

$$u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j \to 0 \tag{3.35}$$

u $L^2_{loc}(\Omega)$. Štaviše, obe familije su ograničene u $L^2(\Omega)$.

Uslov slabe konzistencije daje da za sve $j = 1, ..., n$ važi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_\Omega \phi_t^j v_\varepsilon^j + \sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^j v_\varepsilon^j v_\varepsilon^i \, dxdt = 0,$$

tj. da je

$$\mathrm{div}_{n+1} f^j(v_\varepsilon) \rightharpoonup 0, \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Znači, da bismo pokazali da je u aproksimativno rešenje, dovoljno je pokazati da

$$\mathrm{div}_{n+1} f^j(u_\varepsilon) - \mathrm{div}_{n+1} f^j(v_{\eta(\varepsilon)}) \rightharpoonup 0, \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega),$$

tj. da za test funkcije $\phi^j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, važi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_\Omega \big(u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\big)\phi_t^j + \sum_{i=1}^n \big(u_\varepsilon^j u_\varepsilon^i - v_{\eta(\varepsilon)}^j v_{\eta(\varepsilon)}^i\big)\phi_{x_i}^j \, dxdt = 0,$$

što ćemo dobiti iz (3.35) i sledeće ocene,

$$\begin{aligned}
&\Big|\iint_\Omega \big(u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\big)\phi_t^j + \sum_{i=1}^n \big(u_\varepsilon^j u_\varepsilon^i - v_{\eta(\varepsilon)}^j v_{\eta(\varepsilon)}^i\big)\phi_{x_i}^j\, dxdt\Big| \\
&\quad = \Big|\iint_\Omega \big(u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\big)\phi_t^j + \sum_{i=1}^n \big(u_\varepsilon^j u_\varepsilon^i \pm v_{\eta(\varepsilon)}^j u_\varepsilon^i - v_{\eta(\varepsilon)}^j v_{\eta(\varepsilon)}^i\big)\phi_{x_i}^j\, dxdt\Big| \\
&\quad \le \|u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\|_{L^2}\|\phi_t^j\|_{L^2} + \\
&\qquad \sum_{i=1}^n \sup|\phi_{x_i}^j|\Big(\|u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\|_{L^2}\|u_\varepsilon^i\|_{L^2} + \|v_{\eta(\varepsilon)}^j\|_{L^2}\|u_\varepsilon^i - v_{\eta(\varepsilon)}^i\|_{L^2}\Big) \\
&\quad \le c_1\|u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \Big(c_2\|u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\|_{L^2} + c_3\|u_\varepsilon^i - v_{\eta(\varepsilon)}^i\|_{L^2}\Big),
\end{aligned}$$

gde su c_1, c_2, c_3 pozitivne konstante. Koristili smo Schwartz-ovu nejednakost, $\|uv\|_{L^1} \le \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$, za $u, v \in L^2$. $\sup|\phi_{x_i}^j|$ postoji, jer $\phi_{x_i}^j$ ima kompaktan nosač.

Ostaje nam još da pokažemo da je $\mathrm{div} u \approx 0$. Znamo da je $\mathrm{div}\, v_\varepsilon = 0$ u $\mathcal{D}'$, pa je i $\mathrm{div}\, v_{\eta(\varepsilon)} = 0$ u $\mathcal{D}'$. Znači dovoljno je pokazati da

$$\mathrm{div} u_\varepsilon - \mathrm{div} v_{\eta(\varepsilon)} \rightharpoonup 0, \text{ u } \mathcal{D}',$$

što sledi iz ocene

$$\Big|\iint_\Omega \sum_{j=1}^n \big(u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\big)\phi_{x_j}\, dxdt\Big| \le \sum_{j=1}^n \|u_\varepsilon^j - v_{\eta(\varepsilon)}^j\|_{L^2}\|\phi_{x_j}\|_{L^2}.$$

□

Literatura

[1] Aleksić, J., *Slaba i uopštena rešenja zakona održanja*, seminarski rad, Departman za matematiku, Univerzitet u Novom Sadu, 2004.

[2] Aleksić, J., *Meroznačna i aproksimativna rešenja zakona održanja*, seminarski rad, Departman za matematiku, Univerzitet u Novom Sadu, 2005.

[3] Balder, E., *New fundamentals of Young measure convergence,* in *Calculus of Variations and Differential Equations* (A.Ioffe, S. Reich and I. Shafrir, eds.), Chapman and Hall/CRC Research Notes in Math. 410, CRC Press, Boca Raton, (1999), 24-48.

[4] Biagioni, H. A., *A Nonlinear Theory of Generalized Functions* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.

[5] Brachet, M.E., at al., *Small-scale structure of theTaylor-Green vortex*, J.Fluid.Mech. 130, (1983), 411-452.

[6] Bressan, A, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, S.I.S.A., Italy, 2000.

[7] Chorin, A.J, *Estimates of intermittency, spectra and blow up in developed turbulence*, Commun.Pure Appl. Math. 34, (1981), 853-866.

[8] Chorin, A.J, *The evolution of turbulent vortex*, Commun. Math. Phy. 83, (1982), 517-535.

[9] Colombeau, J. F., *Elementary Introduction in New Generalized Functions*, North Holland 1985.

[10] Colombeau, J. F., *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*, North Holland 1985.

[11] Colombeau, J. F., Oberguggenberger, M., *Approximate generalized solutions and measure valued solutions to conservation laws*, preprint.

[12] DiPerna, R.J., *Generalized solutions to conservation laws*, in J.M. Ball (Ed.), Systems of nonlinear partial differential equations: NATO ASI Series, C.Reidel, 1983.

[13] DiPerna, R.J., *Measure-valued solutions to conservation laws.*, Arch.Rat.Mech.Anal. 88 (1985), 223-270.

[14] DiPerna, R.J., *Compensated compactness and general systems of conservation laws*, Trans. AMS 292(2) (1985), 383-410.

[15] DiPerna, R.J., Majda, A.J., *Oscillations and Cconcentracions in weak solutions of the incompressible fluid equations.*, Commun. Math. Phys. 108, (1987) 667-689.

[16] Grosser, M., Kunzinger, M., Oberguggenberger, M., Steinbauer, R., *Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity*, Kluwer Acadenic Publishers, 2001.

[17] Evans, L.C., *Weak convergence methods for nonlinear partial differentional equations* , A.M.S., Providence, 1990.

[18] Federer, H., *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1969.

[19] Folland, G., *Introduction to real analysis*, Wiley, New York, 1985.

[20] Hörmander,L., *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer-Verlag, 1997.

[21] Kružik, M., *DiPerna - Majda measures and uniform integrability*, J. Math. Anal. App. 198 (1996), 830-843. Article No. 0115

[22] Kružik, M., Roubìček, T., *Explicit characterizacion of L^p- Young measures*, Comment.Math.Univ.Carolinae 39(3) (1998), 511-523.

[23] Majda, A.J., Bertozzi, A.L., *Vorticity and Incomressible Flow*, Cambridge University Press 2002.

[24] Màlek, J., Nečas, J., Rokyta, M., Rủžička, M., *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDE's*, Chapman & Hall, London 1996.

[25] Oberguggenberger, M., *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations*, Pitman Res. Not. Math. 259, Longman Sci. Techn., Essex 1992.

[26] Rudin, W., *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc. 1987, 1974, 1966

[27] Schwartz, L., *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, Tata Institute of Fundamental Reasearch, 1973.

[28] Schonbek, M. E., *Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations,* Comm. Partial Diff. Eq. 7(2) (1982), 959-1000.

[29] Tartar, L., *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, In : R.J. Knops (Ed.), Nonlinear Analysis and Machanics : Heriot-Watt Symposium IV. Pitman, London, 1979.

[30] Tartar, L., *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws* , In : J.M. Ball (Ed.), Systems of nonlinear partial differential equations : NATO ASI Series, C.Reidel, 1983.

[31] Temam, R., *Navier-Stokes Equation and Nonlinear Functional Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics 1983.

[32] Temam, R., *Navier-Stokes Equation*, Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

[33] Vol'pert, A.I., Hundjaev, S.I., *Analysis in Classes of Discontinuous Functions of Mathematical Physics*, Martinns Nijhoff Publ., Dordrecht, 1985.

[34] Young, L. C., *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory* W.B. Saunders Company, 1969.

Biografija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Magistarska teza
VR
Autor: Jelena Aleksić
AU
Mentor: Akademik dr Stevan Pilipović
MN
Naslov rada: Colombeau-ovska i meroznačna rešenja nekih klasa nelinearnih jednačina
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija i Crna Gora
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2005.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 3/107/34/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Analiza i verovatnoća
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: zakoni održanja, Euler-ove i Navier-Stokes-ove jednačine, Colombeau-ovska rešenja, meroznačna rešenja, slaba i jaka konvergencija rešenja, Young-ove mere, specijalna Colombeau-ova algebra.
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU

Važna napomena:
VN
Izvod: Magistarska teza posvećena je izučavanju Colombeau-ovskih i meroznačnih rešenja nekih klasa nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tačnije posmatrana je jednačina oblika

$$\mathrm{div} f(u) = 0, \tag{3.36}$$

za koju smo uspostavili izvestan vid ekvivalencije dva pomenuta koncepta rešenja, odnosno pokazali smo da L^p-Young-ove mere, kao meroznačna rešenja jednačine (3.36), indukuju aproksimativna rešenja p-ograničenog tipa, i obratno. Pre toga, sličan vid ekvivalencije pokazan je za L^∞-Young-ove mere i aproksimativna rešenja ograničenog tipa, [11]. Zatim smo posmatrali i Euler-ove jednačine na koje smo primenili koncept uopštenih Young-ovih mera, i pomoću toga dobili aproksimativna rešenja Euler-ovih jednačina.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 17.11.2005.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsednik: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik dr Vojislav Marić, redovni profesor u penziju, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Mirjana Stojanović, redovni profesor, Prirodno-matematički

fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Jelena Aleksić
AU
Mentor: Academic Stevan Pilipović, PhD
MN
Title: Colombeau's and measure valued solutions to some classes of nonlinear equations
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Serbia and Montenegro
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2005.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics, Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 3/107/34/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Analysis and probability
SD
Subject / Key words: conservation laws, Euler's and Navier-Stokes's equations, Colombeau's solutions, measurevalued solutions, weak and strong convergence of solutions, Young measures, Colombeau's special algebra.
SKW
UC:
Holding data: library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: This thesis is devoted to the research of Colombeau's and measure-valued solutions of some classes of nonlinear partial differential equations. We have studied equation

$$\mathrm{div} f(u) = 0. \tag{3.37}$$

There is some kind of equivalence between two concepts mentioned above. We have shown that L^p-Young measures, as measure-valued so-

lutions of equation (3.37), induce approximate solutions of p-bounded type and vice versa. Before us, similar kind of equivalence was shown for L^∞-Young measures and approximate solutions of bounded type, [11]. Than we have studied Euler's equations, where we applied concept of generalized young measures to obtain approximate solutions of Euler's equations.
AB

Accepted by Scientific Board on: 17.11.2005.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
President: Marko Nedeljkov, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Academic Stevan Pilipović, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Academic Vojislav Marić, PhD, Full Professor, Faculty of technical sciences, University of Novi Sad

Member: Mirjana Stojanović, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
DB