4. Neka je $(G,\cdot)$ grupa. Dokazati da za sve $x,y\in G$ važi

$$\underline{x^{-1}yx=y^{-1}} \wedge \underline{y^{-1}xy=x^{-1}} \Rightarrow x^4=y^4=e.$$

$$x^{-1}yx=y^{-1} \quad /y$$

$$x\backslash \underline{x^{-1}yxy=y^{-1}y}$$

$$yxy=x$$

$$yxy=x \qquad y\backslash \underline{y^{-1}xy}=x^{-1}$$

$$\underline{xy}=yx^{-1}$$

$$yyx^{-1}=x \quad /x$$

$$yy=xx$$

$$\cancel{x}^{-1}yx=y^{-1}$$

$$y^{-1}xy=x^{-1} \longrightarrow x^{-1}yxxy=x^{-1}$$

$$y\,xx\,y=e$$

$$x^4=e \Leftarrow y^4=yyyy=e$$

5. Naći sve podgrupe Klajnove grupe

K:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$(\{e\},*)$, $(K,*)$ } trivijalne podgrupe

Dvoelementne:

$(\{e,a\},*)$

$(\{e,b\},*)$

$(\{e,c\},*)$

6 Dokazati da je presek dve (~~grupe~~) podgrupe grupe G takođe podgrupa od G.

$$H \leq G,\ K \leq G \Rightarrow H \cap K \leq G$$

0. $H \cap K \neq \emptyset$? $\quad e \in H \wedge e \in K \Rightarrow e \in H \cap K$ ✓✓

1. $a, b \in H \cap K \overset{?}{\Rightarrow} ab \in H \cap K$

$$\left.\begin{array}{l} a, b \in H \Rightarrow ab \in H \\ a, b \in K \Rightarrow ab \in K \end{array}\right\} ab \in H \cap K$$ ✓✓

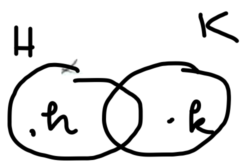
2. $a \in H \cap K \overset{?}{\Rightarrow} a^{-1} \in H \cap K$

$$\left.\begin{array}{l} a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \\ a \in K \Rightarrow a^{-1} \in K \end{array}\right\} a^{-1} \in H \cap K$$ ✓✓

7 Dokazati da je $H \cup K$ podgrupa grupe G, gde su H i K podgrupe od G ako i samo ako $H \subseteq K$ ili $K \subseteq H$.

$(\Leftarrow)$ Neka je, b.u.o., $H \subseteq K$
Tada $H \cup K = K \leq G$ ✓✓

$(\Rightarrow)$ Neka $H \cup K \leq G$. Želimo $H \subseteq K$ ili $K \subseteq H$



$h \in H \setminus K$
$k \in K \setminus H$

Pp. s. $H \nsubseteq K \wedge K \nsubseteq H$

Gde se nalazi hk? $\quad hk \in H \cup K$

↳ ako $hk \in H$: $h^{-1} \in H \Rightarrow h^{-1}hk = k \in H$ ↯

↳ ako $hk \in K$ $\quad k^{-1} \in K \Rightarrow hkk^{-1} = h \in K$ ↯

$\boxed{8}$ Razložiti sledeće permutacije iz S_4 na disjunktne cikluse

a) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = (1\,2\,3\,4) \; \big(= (2\,3\,4\,1) \ldots \big)$

b) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \beta = (1)(2\,3)(4) = (2\,3)$

c) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma = (1\,2)(3\,4) = (3\,4)(1\,2)$ ako su ciklusi disjunktni, nije bitan redosled

d) $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \delta = (1\,4)(2\,3)$

e) $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon = (1\,3\,2)$

$\boxed{9}$ u S_8 izračunati $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{111}$

$$\big((1\,8)(2\,3\,4)(5\,7\,6)\big)^{111} = (1\,8)^{111}(2\,3\,4)^{111}(5\,7\,6)^{111}$$

možemo jer su ciklusi disjunktni

$$= (1\,8)\cdot i \cdot i$$

$$= (1\,8) \quad \left(= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\boxed{10}$ Naći σ ako je

a) $(1\,3\,4)\,\sigma\,(3\,4\,1) = (2\,3\,4)$ u S_4

$(1,3,4)^{-1}$ $\quad (3\,4\,1)^{-1}$

$$\sigma = (1\,3\,4)^{-1}(2\,3\,4)(3\,4\,1)^{-1}$$

$f \circ g(x) = f(g(x))$

$$= (1\,4\,3)(2\,3\,4)(3\,1\,4)$$

$$= (1\,2)(3\,4)$$

6) $(5\,1\,3)^{10}(2\,3\,4\,6)^{10}\sigma^{-1}((1\,2\,3)(3\,6\,7))^{-1} = i$ u S_7

$(5\,1\,3)(2\,3\,4\,6)^2\sigma^{-1} = (1\,2\,3)(3\,6\,7)$

$(5\,1\,3)(2\,4)(3\,6)\,\sigma^{-1} = (1\,2\,3\,6\,7)$ $\quad /\,(5\,1\,3)^{-1}$

$(2\,4)(3\,6)\,\sigma^{-1} = (5\,3\,1)(1\,2\,3\,6\,7)$ $\quad /\,(2\,4)$

$(3\,6)\,\sigma^{-1} = (2\,4)(5\,3\,1)(1\,2\,3\,6\,7)$ $\quad /\,(3\,6)$

$(2\,4) = (2\,4)^{-1}$

$\sigma^{-1} = (3\,6)(2\,4)(5\,3\,1)(1\,2\,3\,6\,7)$

$\sigma^{-1} = (1\,4\,2)(3)(5\,6\,7) = (1\,4\,2)(5\,6\,7)$

$\sigma = (1\,4\,2)^{-1}(5\,6\,7)^{-1} = (1\,2\,4)(5\,7\,6)$

$\boxed{11.}$ Dokazati da je red elemenata u grupi $(G,\cdot)$ najmanji prirodan broj k za koji je $a^k = e$ ili je beskonačnog reda ako takav broj ne postoji.

Neka je k najmanji priv. broj za koji je $a^k = e$.

$|\langle a\rangle| \overset{?}{=} k \qquad \langle a\rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$

svi ovi elementi su različiti.

$a^m = a^n$ b.u.o. $m < n$ $\quad /\,a^{-m}$

$e = a^{n-m}$, $n-m < k$ $\quad \not\downarrow$

Šta ako ne postoji takvo k?

Želimo $|\langle a\rangle| = \infty \qquad \langle a\rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$

$a^n \neq a^m \quad \forall n,m$

$\boxed{12.}$ Dokazati da je grupa reda n ciklična ako i samo ako postoji elemenat reda n.

$(\Rightarrow)$ $G = \langle a \rangle$ $|G| = n \Rightarrow |\langle a \rangle| = n$ $\Rightarrow red(a) = n$

$(\Leftarrow)$ $\exists a$ $red(a) = n$ tj. $|\langle a \rangle| = n$

$\langle a \rangle \leq G$

$n = |\langle a \rangle|$ $|G| = n$ $\Rightarrow \langle a \rangle = G$

$\boxed{13.}$ Svake dve ciklične grupe istog reda su izomorfne. Dokazati.

$G_1 = \langle a \rangle$ $G_2 = \langle b \rangle$ $|G_1| = |G_2| = s$

Treba naći $f: G_1 \to G_2$: f izomorfizam ($<$ bijekcija, homomorfizam)

$G_1 = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{s-1}\}$ $G_2 = \{e, b, b^2, \dots, b^{s-1}\}$

$f(a^k) = b^k$ $\forall k$

bij: 1-1: $b^n = b^m$. na:

$n = m$ ✓ iz konstrukcije ✓

$a^n = a^m$

hom: $f(a^m \cdot a^n) \overset{?}{=} f(a^m) \cdot f(a^n)$

$f(a^{m+n}) \overset{?}{=} b^m \cdot b^n$

$b^{m+n} = b^{m+n}$

Za beskon. slučaj

$G \cong (\mathbb{Z}, +)$

$f: \mathbb{Z} \to G$

$f(k) = a^k$

$\boxed{14}$ Svaka podgrupa H Abelove grupe G je normalna podgrupa od G.

$$H \leq G \quad H \overset{?}{\triangleleft} G \longleftrightarrow \forall g \quad g \cdot H = Hg$$

$$gH = \{\underline{\underline{g \cdot h}} : h \in H\} = \{\underline{\underline{h \cdot g}} : h \in H\} = Hg$$

$\boxed{15.}$ Naći sve normalne podgrupe grupe $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$

* U konačnoj cikličnoj grupi reda n za svako k, $k \mid n$, postoji jedinstvena podgrupa reda k.

* Svaka podgrupa ciklične grupe je ciklična.

Kako je $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$ Abelova grupa, sledi da su sve njene podgrupe normalne (Z 14)

Delitelji od 15: 1, 3, 5, 15

$(\{\bar{0}\}, +_{15}) \triangleleft (\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$ $\quad (\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}, +_{15}) \triangleleft (\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$

$(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}) \triangleleft (\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$ $\quad (\{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}, +_{15}) \triangleleft (\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$

$\boxed{16.}$ Neka je $H \leq G$. Tada $H \triangleleft G$ ako i samo ako za svako $g \in G$, i svako $h \in H$ važi $g^{-1}hg \in H$.

$(\Rightarrow)$ Znamo $H \triangleleft G$, tj. $gH = Hg$ $\forall g$. Želimo: $\forall g \in G, \forall h \in H$ $g^{-1}hg \in H$

$$g^{-1}\overset{Hg = gH}{\widetilde{hg}} = g^{-1}gh_1 = h_1 \in H \quad \checkmark$$

za neko $h_1 \in H$

$(\Leftarrow)$ $\forall g \in G\ \forall h \in H\ g^{-1}hg \in H$. Želimo $gH = Hg$.

- $gH \subseteq Hg$ $\quad gh \in gH$

$$gh = ghg^{-1}g = \underbrace{(g^{-1})^{-1}hg^{-1}}_{=h_1}g = h_1 g \in Hg$$

- $Hg \subseteq gH$ $\quad hg \in Hg$

$$hg = g\underbrace{g^{-1}hg} = gh_2 \in gH$$ ✓

$\boxed{17.}$ Dokazati da je $Z(G) = \{x \in G : (\forall g \in G)(gx = xg)\}$ normalna podgrupa grupe $G = (G, \cdot)$. (Centar grupe)

0. $Z(G) \neq \emptyset$ jer $e \in Z(G)$ $(\forall g \in G\ eg = ge = g)$

1. $x, y \in Z(G) \overset{?}{\Rightarrow} x \cdot y \in Z(G)$

$$\left.\begin{array}{l} x \in Z(G) : \forall g\ xg = gx \\ y \in Z(G) : \forall g\ yg = gy \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall g: \\ x\underbrace{yg} = xgy = \underbrace{gxy} \end{array}$$

$\Rightarrow xy \in Z(G)$ ✓

2. $x \in Z(G) \overset{?}{\Rightarrow} x^{-1} \in Z(G)$

$x \in Z(G) : \forall g : \mathbf{xg = gx}$

želim $x^{-1}g \overset{?}{=} gx^{-1}$

$$x^{-1}g = (g^{-1} \cdot x)^{-1} = (x \cdot g^{-1})^{-1} = gx^{-1}$$ ✓

Da li je normalna?

$x \in Z(G)$ $g \in G$ $\overset{?}{\Rightarrow} g^{-1}xg \in Z(G)$

$$g^{-1}\underline{xg} = g^{-1}\underline{gx} = x \in Z(G)$$ ✓

(7)