Prebrojavanje pomoću stabala

1. Koliko ima trocifrenih brojeva kod kojih je zbir cifara jednak 4?

   Rešenje.

$$
\begin{cases}
1 - \begin{cases} 0-3\\ 1-2\\ 2-1\\ 3-0 \end{cases}\\
2 - \begin{cases} 0-2\\ 1-1\\ 2-0 \end{cases}\\
3 - \begin{cases} 0-1\\ 1-0 \end{cases}\\
4 - \begin{cases} 0-0 \end{cases}
\end{cases}
$$

   Ima 10 takvih trocifrenih brojeva.

2. Koliko ima prirodnih brojeva kod kojih je svaka cifra, počevsi od druge (za slučaj gde postoji druga cifra) veća od prethodne i deljiva sa njom?

   Rešenje.

$$
\begin{cases}
1 - *\\
2 - \begin{cases} 4-8\\ 6\\ 8 \end{cases}\\
3 - \begin{cases} 6\\ 9 \end{cases}\\
4\\
5\\
6\\
7\\
8\\
9
\end{cases}
$$

   Na mestu zvezdice možemo staviti sve ostalo još jednom. Ukupno imamo 1+15+15=31 takav broj.

3. Dokazati da su bar tri slova potrebna za konstruisanje beskonačne reči koja ne sadrži kvadrat.

   Jedno slovo očigledno nije dovoljno, jer najduža reč koja ne sadrži kvadrat a sastoji se samo od jednog slova je dužine jedan.

   Rešenje. Dokazaćemo da dva slova nisu dovoljna.

$$\begin{cases} 0 \begin{cases} 0 \text{ Dobili smo kvadrat. (00)} \\ 1 \begin{cases} 0 \begin{cases} 0 \text{ Dobili smo kvadrat. (00)} \\ 1 \text{ Dobili smo kvadrat. (0101)} \end{cases} \\ 1 \text{ Dobili smo kvadrat. (11)} \end{cases} \end{cases} \\ 1 \text{ Slično kao za granu kad smo počeli sa 0.} \end{cases}$$

Dakle, bar tri slova potrebna za konstruisanje beskonačne reči koja ne sadrži kvadrat. (Napomena: može se pokazati da su tri slova dovoljna za konstrukciju takve reči.)

Princip zbira

Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neprazni skupovi po parovima disjunktni (to jest $A_i \cap A_j = \emptyset$, za $1 \leqslant i < j \leqslant n$), onda važi

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| .$$

1. Koliko ima brojeva manjih od 10000 čiji je zbir cifara 4?

   Rešenje. Posmatrajmo sledeće slučajeve:

   - Učestvuju cifre 4 i 0. Imamo sledeće brojeve: 4, 40, 400, 4000, to jest, 4 broja.
   - Učestvuju cifre 3, 1 i 0. Imamo sledeće brojeve: 13, 31, 103, 130, 301, 310, 1003, 1030, 1300, 3001, 3010, 3100, to jest, 12 brojeva.
   - Učestvuju cifre 2, 2 i 0. Imamo sledeće brojeve: 22, 202, 220, 2002, 2020, 2200, to jest, 6 brojeva.
   - Učestvuju cifre 2, 1, 1 i 0. Imamo sledeće brojeve: 112, 121, 211, 1012, 1021, 1102, 1120, 1201, 1210, 2011, 2101, 2110, to jest, 12 brojeva.
   - Učestvuju cifre 1, 1, 1, 1. Imamo sledeći broj: 1111, to jest, 1 broj.

   Ukupno smo imali $4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$ brojeva.

2. Koliko ima prirodnih brojeva sa proizvodom cifara 60 u kojima se ne javlja cifra 1?

   Rešenje. Kako je $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, imamo sledeće slučajeve:

   - Učestvuju cifre 2, 2, 3 i 5. Imamo sledeće brojeve: 2235, 2253, 2325, 2352, 2523, 2532, 3225, 3252, 3522, 5223, 5232, 5322, to jest, 12 brojeva.
   - Učestvuju cifre 4, 3 i 5. Imamo sledeće brojeve: 345, 354, 435, 453, 534, 543, to jest, 6 brojeva.
   - Učestvuju cifre 2, 6 i 5. Imamo sledeće brojeve: 256, 265, 526, 562, 625, 652, to jest, 6 brojeva.

   Ukupno smo imali $12 + 6 + 6 = 24$ brojeva.

Princip proizvoda

Ako su $A_1, A_2, \dots, A_n$ konačni neprazni skupovi, onda važi

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n| .$$

1. Koliko ima četvorocifrenih brojeva čije su sve cifre različite?

   Rešenje. Imamo $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ mogućnosti. Na prvo mesto možemo birati sve cifre sem 0. Na drugo mesto možemo birati sve cifre, uključujući i 0, ali ne smemo birati onu cifru koju smo odabrali za prvo mesto. Na treće mesto ne možemo birati one cifre koje smo birali na prva dva mesta, a na poslednje mesto ne smemo birati one cifre koje smo birali na prva tri mesta.

2. Osam turista je odlučilo da prenoći u gradu u kome ima šest hotela. Na koliko načina turisti mogu da izaberu hotele?

   Rešenje. Mogu na 6^8 načina. Svaka osoba može da bira od 6 mogućih hotela.

3. Na zidu su tri kuke. Na koliko načina se na njih mogu okačiti četiri kaputa? (Na jednu kuku se može okačiti i više kaputa.)

   Rešenje. Odgovor je 3^4. Svaki kaput mozhemo na 3 mesta okačiti.

4. Koliko se parnih četvorocifrenih brojeva može zapisati pomoću cifara 1, 3, 4, 6 i 7, ako u zapisu svakog broja susedne cifre moraju biti različite?

   Rešenje. Na poslednje mesto imamo 2 opcije, jer poslednja cifra mora da bude parna. Za pretposlednje mesto imamo 4 opcije, možemo staviti bilo šta, samo ne ono, što stoji na poslednjem mestu. Na svako sledeće mesto uvek imamo po 4 opcije, uvek možemo staviti bilo šta, samo ne ono što stoji na prethodnom mestu. To su ukupno $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 128$ brojeva.

5. Koliko ima trocifrenih brojeva koji se zapisuju pomoću cifara $0, 1, 2, 3, 4, 5$, a deljivi su sa 3?

   Rešenje. Na prva dva mesta stavimo proizvoljnu cifru, jedino pazimo da prva cifra ne sme biti 0. To možemo uraditi na $5 \cdot 6 = 30$ načina. Pošto za svaki broj važi da je njegov ostatak pri deljenju sa tri isti koliki je zbir njegovih cifara pri deljenju sa tri, namestićemo poslednju cifru tako da broj bude deljiv sa tri. Ako zbir prve dve cifre po modulu tri 0, za poslednju cifru možemo birati cifre 0 ili 3. Ako zbir prve dve cifre po modulu tri 1, za poslednju cifru možemo birati cifre 2 ili 5. Ako zbir prve dve cifre po modulu tri 2, za poslednju cifru možemo birati cifre 1 ili 4. Primećujemo da kako god smo popunili prve dve cifre, uvek imamo dve opcije za treću cifru. To znači da imamo ukupno $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$ traženih brojeva.

Princip bijekcije

Dva skupa imaju isti broj elemenata ako i samo ako se između njih može uspostaviti bijekcija.

1. Posmatraju se svi nizovi dekadnih cifara dužine 6. Da li među njima ima više onih kod kojih je zbir cifara 27 ili onih kod kojih je zbir prve tri cifre jednak zbiru poslednje tri cifre?

   Rešenje. Označimo sa A skup onih nizova dužine 6 kod kojih je zbir cifara 27, a sa B skup onih nizova dužine 6 kod kojih je zbir prve tri cifre jednak zbiru poslednje tri cifre, to jest,

   $$\begin{aligned} A &= \{\overline{x_1x_2\ldots x_6} : \Sigma x_i = 27\}, \\ B &= \{\overline{x_1x_2\ldots x_6} : x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6\}. \end{aligned}$$

   Dokazaćemo $|A| = |B|$ tako što ćemo pokazati da postoji funkcija $f : A \to B$ koja je bijekcija. Funkciju f možemo definisati na sledeći način:

   $$f(\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}) = \overline{(9-x_1)(9-x_2)(9-x_3)x_4x_5x_6}.$$

   - Ova funkcija je dobro definisana. Svaka cifra se slika na cifru, i ako

     $$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 \in A,$$

     onda se lako proverava da

     $$\overline{(9-x_1)(9-x_2)(9-x_3)x_4x_5x_6} \in B.$$

     Naime, $9 - x_1 + 9 - x_2 + 9 - x_3 = x_4 + x_5 + x_6$ ako i samo ako $27 - x_1 - x_2 - x_3 = x_4 + x_5 + x_6$ ako i samo ako $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = 27$, a ovo imamo ako je original u skupu A.
   - Ova funkcija je injekcija. Naime, iz

     $$f(\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}) = f(\overline{y_1y_2y_3y_4y_5y_6})$$

     sledi

     $$\overline{(9-x_1)(9-x_2)(9-x_3)x_4x_5x_6} = \overline{(9-y_1)(9-y_2)(9-y_3)y_4y_5y_6},$$

     iz čega sledi $x_i = y_i$ za $i = 4, 5, 6$, a iz $9 - x_i = 9 - y_i$ dobijamo $x_i = y_i$ i za $i = 1, 2, 3$.
   - Ova funkcija je i sirjekcija. Za sliku $\overline{y_1y_2y_3y_4y_5y_6}$ možemo birati original $\overline{(9-y_1)(9-y_2)(9-y_3)y_4y_5y_6}$, što sledi iz činjece da $9-(9-y_i) = y_i$. Treba još proveriti da ako je slika iz B hoće li sigurno original biti iz A, što se proverava analogno kao kad smo pokazali da je preslikavanje dobro definisano.

2. Među nenegativnim celim brojevima koji su manji od 10^6 posmatraju se svi oni čiji je zbir cifara jednak 9 i svi oni čiji je zbir cifara jednak 10. Kojih ima više?

Rešenje. Svaki posmatrani broj može da se predstavi kao šestočlani niz ako dodamo potrebne nule na početak, Recimo broju 1991 odgovara niz 001991. Označimo sa A skup onih nizova dužine 6 kod kojih je zbir cifara 9, a sa B skup onih nizova dužine 6 kod kojih je zbir cifara 10, to jest,

$$A = \{\overline{x_1x_2\dots x_6} : \Sigma x_i = 9\},$$
$$B = \{\overline{x_1x_2\dots x_6} : \Sigma x_i = 10\}.$$

Dalje, neka za $k = 0, 1, \dots, 9$

$$A_k = \{\overline{kx_2\dots x_6} : \Sigma x_i = 9 - k\},$$
$$B_k = \{\overline{kx_2\dots x_6} : \Sigma x_i = 10 - k\}.$$

Primetimo da važi $A = \bigcup_{k=0}^{9} A_k$, kao i $B = \bigcup_{k=0}^{9} B_k$. Definišemo za $k = 0, 1, \dots, 8$ funkcije $f_k : A_k \to B_{k+1}$ na sledeći način:

$$f_k(\overline{kx_2\dots x_6}) = \overline{(k+1)x_2\dots x_6}.$$

Ove funkcije su očigledno dobro definisane i bijekcije. Na osnovu principa bijekcije imamo da za $k = 1, 2, \dots, 8$ imamo $|A_k| = |B_{k+1}|$, to jest, $\left|\bigcup_{k=0}^{8} A_k\right| = \left|\bigcup_{k=1}^{9} B_k\right|$. Za konačan zaključak ostaje da uporedimo kardinalnost skupova $A_9 = \{900000\}$ i $B_0 = \{000019, 000028, \dots, 910000\}$. Kako $|A_9| = 1$ a $|B_0|$ mnogo veće od 1, zaključimo da sveukupno važi $|A| < |B|$.

3. U jednoj školi se održava turnir u stonom tenisu. U svakom krugu učenici su raspoređeni u parove; svaki par igra meč i pobednik prolazi u sledeći krug (nema nerešenih mečeva). Ako u nekom krugu ima neparan broj učenika, jedan žrebom izabran učenik ide u naredni krug bez borbe. Kada ostane samo jedan učenik, on se proglašava pobednikom i turnir se završava. Koliko će ukupno mečeva biti odigrano, ako je učestvovalo:

   a) 2020 učenika,

   b) n učenika, gde je n proizvoljan prirodan broj?

Rešenje. Lako se izračuna da u slučaju 1001 učenika broj odigranih mečeva je $500 + 250 + 125 + 63 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 1000$. U slučaju n učenika (a zapravo i malopre) možemo razmišljati na sledeći način: svakom odigranom meču odgovara tačno jedan učenik koji je izgubio meč i obratno, prema tome broj odigranih mečeva je jednak broju učenika koji su u nekom trenutku izgubili. Broj takvih učenika je $n-1$ jer postoji samo jedan učenik koji je sve vreme pobedio. Dakle, broj odigranih mečeva je u opštem slučaju $n - 1$.

Dirihleov princip

1. U unutrašnjosti jednakostraničnog trougla stranice dužine 2 raspoređeno je 5 tačaka. Dokazati da među njima postoje dve čije je rastojanje manje od 1.

   Rešenje. Podelimo trougao pomoću srednjih linija na četiri dela. Kako imamo 5 tačaka, na osnovu Dirihleovog principa sledi da postoji oblast u kojoj su bar dve tačke. Kako je najveće rastojanje unutar jedne oblasti manje od 1, sledi da su uočene dve tačke tražene tačke.

2. Vojnik je, pucajući u metu oblika kvadrata veličine 70×70 pogodio 50 puta. Dokazati da su neka dva pogotka na rastojanju manjem od 15.

   Rešenje. Podelimo metu pomoću horizontalnih i vertikalnih linija na $7 \cdot 7 = 49$ delova. Kako imamo 50 tačaka, na osnovu Dirihleovog principa sledi da postoji oblast u kojoj su bar dve tačke. Kako je najveće rastojanje unutar jedne oblasti manje od $\sqrt{2} \cdot 10 \approx 14,1 < 15$, sledi da su uočene dve tačke tražene tačke.

3. U unutrašnjosti pravougaonika 3×4 raspoređeno je 6 tačaka. Dokazati da među njima postoje dve čije rastojanje nije veće od $\sqrt{5}$.

   Rešenje. Zamislimo da pravougaonik smešten u prvi kvadrant Dekartovog koordinatnog sistema tako da donji levi ćossšak stoji u tački $(0, 0)$. Podelimo pravougaonik na 5 (ne nužno podudarnih) delova pomoću sledećih duži: $(0, 2) - (1, 1)$, $(1, 1) - (2, 2)$, $(2, 2) - (3, 1)$, $(3, 1) - (4, 2)$, $(1, 0) - (1, 1)$, $(3, 0) - (3, 1)$, $(2, 2) - (2, 3)$. Kako imamo 6 tačaka, na osnovu Dirihleovog principa sledi da postoji oblast u kojoj su bar dve tačke. Kako je najveće rastojanje unutar jedne oblasti manje od $\sqrt{5}$, sledi da su očene dve tačke tražene tačke.

4. Da li je moguće u svako polje tablice $n \times n$ upisati po jedan od brojeva -1, 0 i 1 tako da zbirovi po svim vrstama, kolonama i dve dijagonale budu različiti?

   Rešenje. Nije moguće. Najvaći zbir koji možemo napraviti je n a najmanji je $-n$, to jest, ukupno možemo napraviti najviše $2n + 1$ različitih zbirova. Kako imamo n vrste, n kolone i 2 dijadonale, ukupno $2n + 2$ različitih zbirova bi trebalo napraviti. Ovde, po Dirihleovom principu sledi da bar na dva mesta imaćemo isti zbir.

5. Grupa od 21 studenta je uspešno položila 3 kolokvijuma. Moguće ocene su 7, 8 i 9. Dokazati da su bar tri studenta dobila iste ocene.

   Rešenje. Mogući multiskupovi ocena: $\{7, 7, 7\}$, $\{7, 7, 8\}$, $\{7, 7, 9\}$, $\{7, 8, 8\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{7, 9, 9\}$, $\{8, 8, 8\}$, $\{8, 8, 9\}$, $\{8, 9, 9\}$, $\{9, 9, 9\}$. Kako imamo 10 različitih mogućnosti, a 21 student, iz Dirihleovog principa sledi da postoje bar 3 studenta sa istim skupom ocena.

6. Jedan matematičar je u toku 11 nedelja svaki dan rešio barem jedan zadatak, ali ne postoji sedmica u toku koje je uradio više od 12 zadataka. Dokazati da se u tom periodu može naći nekoliko uzastopnih dana u toku kojih je on rešio tačno 20 zadataka.

   Rešenje. Za $i = 1, 2, \ldots, 77$ označimo sa S_i broj zadataka koji je posmatrani matematičar rešio do i-tog dana. Posmatrajmo sledeći (multi)skup:

$$\{S_1, S_2, \ldots, S_{77}, S_1 + 20, S_2 + 20, \ldots, S_{77} + 20\}.$$

   U ovom skupu smo fizički nabrajali $2 \cdot 77 = 154$ elementa. Najmanji broj u ovom skupu je najmanje 1, kako $S_1 \geqslant 1$ (on je svaki dan rešio barem jedan zadatak). Najveći broj u ovom skupu je $11 \cdot 12 + 20 = 152$ (ne postoji sedmica u toku koje je uradio više od 12 zadataka). To znači da postoje bar dva ista broja u posmatranom skupu. Oni ne mogu oba biti u prvom segmentu (prvih 77 elemenata), kako taj deo je strogo rastući niz (sledi isto iz činjenice da je on svaki dan rešio barem jedan zadatak). Ne mogu oba broja biti ni u drugom segmentu (poslednjih 77 elemenata), jer je i taj deo strogo rastući niz (isti kao prvi deo samo transliran za 20 nagore). Sledi da postoje brojevi i i j takvi da

$$S_i = S_j + 20.$$

   Ovo upravo znači da je naš matematičar od dana j do dana i uradio tačno 20 zadataka.

7. Dokazati da među bilo kojih $n+1$ različitih prirodnih brojeva ne većih od $2n$ postoje dva broja od kojih je jedan deljiv drugim.

   Rešenje. Zapišemo svaki od tih brojeva u obliku $2^p \cdot q$, gde $2 \nmid q$. Kako neparnih brojeva manjih od $2n$ ima n, sledi da među izabranih $n+1$ brojeva ima bar dva koja imaju istu vrednost za q. Neka su to $2^k \cdot q$ i $2^l \cdot q$, i neka je, bez umanjenja opštosti, $k < l$. Sledi $2^k \cdot q \mid 2^l \cdot q$.

Izbori

1. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, u kojima su elementi 1 i 2 susedni?

   Rešenje. Elemente 1 i 2 tretiramo kao jedan objekat. $n-1$ objekat možemo rasporediti na $(n-1)!$ načina. Kako elemeni 1 i 2 mogu stajati na dva načina (12 i 21), sledi da ukupno imamo $2 \cdot (n-1)!$ mogućnosti.

2. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, u kojima su elementi 1 i 2 susedni, a 1 i 3 nisu.

   Rešenje. U prethodnom zadatku smo odredili koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, u kojima su elementi 1 i 2 susedni. Od tog broja sad ćemo oduzeti broj onih permutacija u kojima dodatno i 1 i 3 su susedni. Dakle, ne odgovaraju nam permutacije u kojima se pojavljuju elementi 1, 2 i 3 u sledeća dva redosleda: 213 i 312. Ovakvih permutacija ima $2 \cdot (n-3)!$, pa sveukupno traženih permutacija ima $2 \cdot (n-1)! - 2 \cdot (n-3)!$.

3. a) Koliko ima binarnih relacija na skupu X od n elemenata?
   b) Koliko ima refleksivnih binarnih relacija na skupu X od n elemenata?
   c) Koliko ima simetričnih binarnih relacija na skupu X od n elemenata?
   d) Koliko ima antisimetričnih binarnih relacija na skupu X od n elemenata?

   Rešenje.

   a) Neka je $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Binarna relacija je podskup od skupa X^2 u kom nabrajamao elemente redosledu koji će nam biti zgodan za dalji rad.

   $$\{(a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n), (a_1, a_2), (a_2, a_1), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_{n-1})\}.$$

   Za svaki od n^2 elemenata skupa X^2 imamo 2 opcije: one pripadaju ili ne pripadaju našoj relaciji. Dakle, imamo ukupno 2^{n^2} opcija, to jest, toliko binarnih relacija na skupu X.

   b) Ako brojimo refleksivne relacije za prvih n elemenata nemamo izbora, njih moramo stavljati, dakle, refleksivnih relacija na skupu X imamo 2^{n^2-n}.

   c) Neka je posmatrana relacija simetrična. Ako stavimo da (a_1, a_2) pripada relaciji mora i (a_2, a_1) i obratno, dakle $\{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$ ili stavimo oba da pripadaju relaciji, ili nijedan, i slično za ostale parove. Ovakvih parova ima $\frac{n^2-n}{2}$. Za dijagonalne elemente možemo birati, da li ih želimo ili ne pojedinačno. Ovo je sveukupno $2^{n+\frac{n^2-n}{2}}$.

   d) Neka je posmatrana relacija antisimetrična. Za skup $\{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$ imamo sada tri opcije: možemo staviti samo (a_1, a_2), samo (a_2, a_1) ili nijedan, i slično za ostale parove. Ovakvih parova ima $\frac{n^2-n}{2}$. Za dijagonalne elemente možemo birati, da li ih želimo ili ne pojedinačno. Ovo je sveukupno $2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$.

4. Koliko se različitih reči, bez obzira na smisao, može napraviti od svih slova sadržanih u reči PARALELA?

   Rešenje. Odgovor je $\frac{8!}{3!\cdot 2!}$. Reč PARALELA sadrži 8 slova, njih možemo rasporediti na 8! načina, ali pošto imamo tri puta slovo A i dva puta slovo L, ovaj broj treba da podelimo sa $3! \cdot 2!$.

5. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^6 kod kojih je proizvod njihovih cifara jednak dvostrukom zbiru tih cifara?

   Rešenje. najpre nalazimo kolekcije cifara od kojih će biti sačinjeni brojevi. To su:

   $$\{2,2,2,2\}, \{4,4\}, \{2,2,4\}, \{3,6\}, \{1,2,3,3\}, \{1,2,2,5\},$$
   $$\{1,4,5\}, \{4,2,3,1,1,1\}, \{8,3,1\}, \{2,2,6,1,1\}, \{4,6,1,1\},$$
   $$\{2,2,7,1,1,1\}, \{4,7,1,1,1\}, \{6,5,1,1,1,1\}, \{8,4,1,1,1,1\}.$$

Koristeći formulu za permutacije sa ponavljanjem određujemo za datu kolekciju koliko imamo različitih rešenja. Imaćemo (redom) $1+1+3+2+12+12+6+120+6+30+12+60+20+30+30=345$ rešenja.

6. Odrediti maksimalni mogući broj pravih određenih sa n zadatih tačaka u ravni.

   Rešenje. Svaku pravu jednoznačno određuju dve različite tačke. Maksimalan broj se postiže ako za svaku tačku važi da kroz nje prolazi samo jedna prava. Dakle, zadatak je da odredimo na koliko načina možemo odabrati 2 različite tačke od n zadatih. To možemo uraditi na $\binom{n}{2}$ načina.

7. Na kružnici je dato n tačaka ($n \in \mathbb{N}$) i svake dve su spojene tetivom. Odrediti maksimalni kardinalni broj presečnih tačaka.

   Rešenje. Maksimalni broj se postiže ako za svaku presečnu tačku važi da samo dve tetive prolaze kroz nju. No, u tom slučaju problem postaje ekvivalentan sledećem problemu: na koliko načina možemo odabrati 4 različite tačke od n zadatih (jer četiri tačke određuju dve duži koji imaju tačku preseka). Prema tome, odgovor je $\binom{n}{4}$.

8. Odrediti broj reči dužine n nad alfabetom $\{0,1\}$ sa tačno m nula, $m \leqslant n$.

   Rešenje. Problem možemo posmatrati na sledeći način: imamo n pozicija, među njima treba odabrati m i na ta mesta stavljati nule, na ostala mesta jedinice. Prema tome, odgovor je $\binom{n}{m}$.

9. Po šahovskoj tabli se kreće top od jednog ugla table do dijametralno suportonog po najkraćem mogućem putu. Na koliko načina to može da izvede?

   Rešenje. svako najkraće putanje se sastoji od 7 koraka nadesno i 7 koraka nagore. Znači top treba da napravi ukupno 14 koraka, od kojih 7 puta treba da ide nagore. Prema tome, rešenje je $\binom{14}{7}$.

10. Koliko ima četvorocifrenih brojeva u kojima je svaka cifra

    a) manja od prethodne;

    b) veća od prethodne?

    Rešenje.

    a) Ako odaberemo 4 cifre, to nam jednoznačno određuje broj. Recimo cifre $\{3,1,7,2\}$ određuju broj 7321. Dakle, pitanje je na koliko načina možemo od 10 cifara da odaberemo 4, a to možemo na $\binom{10}{4}$ načina.

    b) Isto kao malopre, samo treba da pazimo da sada nulu ne smemo odabrati, jer ako nula bude među odabranim ciframa, odgovarajući četvorocifreni broj će počinjati sa nulom, što je nemoguće. Prema tome, rezultat je $\binom{9}{4}$.

11. Koliko ima nizova od n nula i k jedinica, takvih da nikoje dve jedinice nisu susedne, $(k \leqslant n+1)$?

    Rešenje. poređamo nule u niz. Sada imamo $n+1$ potencijalno mesto za jedinice: dva s kraja i $n-1$ između. Od tih mesta odaberemo k i tamo stavimo jedinicu. Dakle, rezultat je $\binom{n+1}{k}$.

12. Za okruglim stolom kralja Artura sedi 12 vitezova. Poznato je da je svaki od njih u svađi sa svojim neposrednim susedima za stolom. Na koliko načina se može izabrati 5 vitezova, tako da nikoja dva među njima nisu u svađi?

    Rešenje. Označimo njih sa $1, 2, \ldots, 12$, i poređamo ih u krug oko stola. Razmotrimo dva slučaja:

    1. Ako broj 12 smo odabrali. Biramo još 4 broja iz skupa $\{2, 3, \ldots, 10\}$. Neka nula predstavlja neizabrani broj, a jedinica izabrani broj. Ovim smo sveli zadatak na predhodni sa 5 nula i 4 jedinice. Prema tome za ovaj slučaj imamo $\binom{6}{4}$ načina.
    2. Ako broj 12 nismo odabrali. Biramo još 5 broja iz skupa $\{1, 2, \ldots, 11\}$. Slično, kao malopre to je kao prethodni zadatak sa 6 nula i 5 jedinica. Za ovaj slučaj imamo $\binom{7}{5}$ načina.

    Ukupan broj: $\binom{6}{4} + \binom{7}{5}$.

13. Grupa od 21 studenata je uspešno položila 3 kolokvijuma. Moguće ocene su 7, 8 i 9. Odrediti broj mogućih multiskupova ocena.

    Rešenje. Od tri moguće ocene 7, 8 i 9 biramo tri sa ponavljanjem. To možemo uraditi na $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$ načina.

14. Koliko ima četvorocifrenih brojeva u kojima je svaka cifra

    a) manja od prethodne ili jednaka njoj;
    b) veća od prethodne ili jednaja njoj?

    Rešenje: Zadatak se rešava slično kao 2. zadatak, samo što ovde jednu cifru možemo više puta odabrati, dakle, u pitanju su kombinacije sa ponavljanjem.

    a) $\binom{10+4-1}{4} - 1 = \binom{13}{4} - 1$;
    b) $\binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4}$.

    Pod a) smo oduzeli jedan, jer bismo inače računali i 0000.

15. Koliko celobrojnih rešenja ima jednačina $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23$ uz uslov $x_i > i$?

    Rešenje. Podsetimo se, jednačina $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ ima $\binom{n+k-1}{k}$ rešenja u skupu nenegativnih celih brojeva. Uslov $x_i > i$ je ekvivalentan sa $x_i \geqslant i+1$, to jest, sa $x_i - i - 1 \geqslant 0$. Uvedemo smenu $y_i = x_i - i - 1$, to jest,

$x_i = y_i+i+1$. Posle ove smene jednačina se svodi na $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 3$ gde $y_i \geqslant 0$. Sada znamo da ova jednačina ima $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$ rešenja.

Binomna formula, binomni koeficijenti

1. Pokazati da važi sledeći identitet:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}.$$

Rešenje.

- Baza indukcije. Za $r = 0$ tvrđenje je tačno, $\binom{n}{0} = 1$ a i $\binom{n+1}{0} = 1$. Za $r = 1$ tvrđenje je takođe tačno. Na levoj strani identiteta imamo $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1} = 1+n+1 = n+2$, a na desnoj strani imamo $\binom{n+2}{1} = n+2$.
- Indukcijska hipoteza. Pretpostavimo da je tvđenje tačno za r.
- Indukcijski korak. Dokazujemo tvrđenje za $r+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r+1} \binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} + \binom{n+r+1}{r} \\ &= \binom{n+r+1}{r} + \binom{n+r+1}{r+1} = \binom{n+r+2}{r+1}.\end{aligned}$$

Pri čemu kod druge jednakosti smo koristili indukcijsku hipotezu a kod treće jednakosti identitet $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

2. Koliko rešenja u skupu nenegativnih celih brojeva ima nejednačina

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leqslant n?$$

Rešenje.

1. način. Razdvojimo na n slučajeva.

- Jednačina $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leqslant 0$ ima $\binom{m-1+0}{0}$ rešenja.
- Jednačina $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leqslant 1$ ima $\binom{m-1+1}{1}$ rešenja.

$\vdots$

- Jednačina $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leqslant n$ ima $\binom{m-1+n}{n}$ rešenja.

Pa sveukupno imamo $\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+k}{k} = \binom{m+n}{n}$ rešenja.

2. način. Nejednačinu $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leqslant n$ transformišemo u jednačinu $x_1 + x_2 + \cdots + x_m + A = n$, gde je A neki nenegativan ceo broj. Broj rešenja ove jednačine je $\binom{m+2+n-1}{n} = \binom{m+n}{n}$.

3. Odrediti broj rešenja nejednačine $7 \leqslant x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 11$ u skupu $\mathbb{N}$.

   Rešenje. Prvo stavimo smenu: $x_i = y_i + 1$, za $i = 1, 2, 3$. Time se nejednačina svodi na: $4 \leqslant y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 8$. Izračunajmo koliko ima rešenja nejednačina $y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 8$. Uvedemo jednu novu promenljivu A, i zaključimo da jednačina $y_1 + y_2 + y_3 + A = 8$ ima isti broj rešenja kao nejednačina $y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 8$. Jednačina $y_1 + y_2 + y_3 + A = 8$ ima $\binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8}$ rešenja. Na sličan način izračunamo da nejednačina $y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 3$ ima $\binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$ rešenja. Konačan rezultat se dobija oduzimanjem broja rešenja nejednačine $y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 3$ od broja rešenja nejednačine $y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 8$, što je $\binom{11}{8} - \binom{6}{3} = 165 - 20 = 145$.

4. Zbir binomnih koeficijenata pri razvoju $(1 + x)^n + (1 + x)^{n+1}$ jednak je 1536. Odrediti koeficijent uz x^6.

   Rešenje. Jednačina $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 1536$ je ekvivalentna sa jednačinom $2^n + 2^{n+1} = 1536$ koja se svodi na $3 \cdot 2^n = 1536$, $2^n = 512$, dakle, $n = 9$. Zaključimo da je traženi broj $\binom{9}{6} + \binom{10}{6} = 84 + 210 = 294$.

5. Odrediti broj reči dužine n nad alfabetom $\{1, 2, 3, 4\}$ u kojima se cifra 2 javlja neparan broj puta.

   Rešenje: Označimo traženi broj sa $A(n)$. Ako postoji samo jedna dvojka, njeno mesto možemo odabrati na $n = \binom{n}{1}$ način. Na preostala mesta možemo birati slova na 3^{n-1} načina (imamo $n - 1$ mesto i na svako mesto možemo staviti 3 slova), prema tome reči sa jednom dvojkom imamo $\binom{n}{1}3^{n-1}$. Na sličan način zaključimo da ako imamo tri dvojke u datoj reči, takvih imamo $\binom{n}{3}3^{n-3}$. Nastavljajući ovo, možemo zaključiti da

$$A(n) = \binom{n}{1}3^{n-1} + \binom{n}{3}3^{n-3} + \binom{n}{5}3^{n-5} \dots$$

   Označimo sada sa $B(n)$ broj reči dužine n u kojima se cifra 2 javlja paran broj puta (dakle, 0, 2, 4...). Slično kao malopre, zaključimo

$$B(n) = \binom{n}{0}3^{n} + \binom{n}{2}3^{n-2} + \binom{n}{4}3^{n-4} \dots$$

   $A(n) + B(n)$ prebroji sve nizove dužine n, dakle,

$$A(n) + B(n) = 4^n. \tag{1}$$

   Dalje, važi

$$\begin{aligned} -A(n) + B(n) &= \binom{n}{0}3^{n} - \binom{n}{1}3^{n-1} + \binom{n}{2}3^{n-2} \dots - \binom{n}{3}3^{n-3} \\ &= (3-1)^n = 2^n. \end{aligned} \tag{2}$$

   Oduzimajući drugu jednačinu iz prve dobijamo $2A(n) = 4^n - 2^n = 2^{2n} - 2^n$, prema tome, $A(n) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$.

6. Odrediti šest poslednjih cifara broja 57^{57}.

   Rešenje. Direktno izračunamo da $57^4 = 10556001$. Označimo ovaj broj sa $1000X + 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} 57^{57} &= 57^{4\cdot 14+1} = (57^4)^{14} \cdot 57 = (1 + 1000X)^{14} \cdot 57 \\ &= (1 + 14 \cdot 1000X + \binom{14}{2}(1000X)^2 + \dots) \cdot 57 \end{aligned}$$

   Primetimo da u prethodnoj zagradi od trećeg sabirka, pa nadalje ništa ne utiče na poslednjih 6 cifara traženog broja. Dakle, nas zanima 6-tocifreni završetak broja

$$(1 + 14 \cdot 10556000) \cdot 57 = 8423688057,$$

   a to je 688057.

7. Odrediti slobodan član u izrazu $(x^2 - \frac{1}{x^3} + 2)^{10}$.

   Rešenje.

$$(x^2 - \frac{1}{x^3} + 2)^{10} = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=10 \\ n_1,n_2,n_3\geqslant 0}} \frac{10!}{n_1!n_2!n_3!}(x^2)^{n_1}(-1)^{n_2}(x^{-3})^{n_2}2^{n_3}.$$

   Iz $x^{2n_1} \cdot x^{-3n_2} = 1$ sledi $x^{2n_1-3n_2} = x^0$, to jest, $2n_1 - 3n_2 = 0$, odakle $n_2 = \frac{2}{3}n_1$. Imamo, dakle, sledeće opcije.

   - Ako $n_1 = 0$, onda $n_2 = 0$ i $n_3 = 10$, pa je traženi koeficijent
$$\frac{10!}{0!0!10!}2^{10}(-1)^0.$$
   - Ako $n_1 = 3$, onda $n_2 = 2$ i $n_3 = 5$, pa je traženi koeficijent
$$\frac{10!}{3!2!5!}2^5(-1)^2.$$
   - Ako $n_1 = 6$, onda $n_2 = 4$ i $n_3 = 0$, pa je traženi koeficijent
$$\frac{10!}{6!4!3!}2^0(-1)^4.$$

Princip uključenja i isključenja

1. Odrediti broj permutacija cifara $1, 2, \dots, 9$ u kojima cifra 1 nije na prvom, a cifra 9 na poslednjem mestu.

   Rešenje.

   - Ukupan broj permutacija je 9!.
   - Ako je 1 na prvom mestu, imamo 8! mogućnosti.

- Ako je 9 na poslednjem mestu, imamo takođe 8! mogućnosti.
- Ako je istovremeno 1 na prvom mestu a 9 na poslednjem mestu, imamo 7! mogućnosti.

Prema PIU ukupan broj permutacija je

$$9! - 2 \cdot 8! + 7! = 287280.$$

2. Koliko ima permutacija cifara $0, 1, \ldots, 9$ u kojima je prva cifra manja od 8, a poslednja cifra veća od 1?

   Rešenje.

   - Ukupan broj permutacija je 10!
   - Ako je prva cifra 8 ili 9 imamo $2 \cdot 9!$ mogućnosti.
   - Ako je poslednja cifra 0 ili 1 imamo takođe $2 \cdot 9!$ mogućnosti.
   - Ako je prva cifra 8 ili 9 i istovremeno poslednja cifra 0 ili 1 imamo $4 \cdot 8!$ mogućnosti.

   Prema PUI ukupan broj permutacija je

$$10! - 2(2 \cdot 9!) + 4 \cdot 8! = 2338560.$$

3. Na koliko načina se u vrstu mogu poređati tri Engleza, tri Francuza i tri Turčina tako da nikoja tri iz iste zemlje ne stoje zajedno?

   Rešenje. Ako tri Engleza stoje zajedno: 7!3!. Prvo tri Engleza tretiramo kao da su jedna osoba, pa tako imamo 7 osobe za rasporediti. To možemo na 7! načina. Međutim i tri Engleza u grupi takođe mogu na 3! načina da se rasporede. Tako smo dobili 7!3!. Isto 7!3! načina imamo ako tri Francuza ili tri Turčina stoje zajedno.

   Ako su i Englezi i Francuzi zajedno, to je kao da imamo 5 osobe (3 prave i 2 grupice) njih možemo rasporediti na 5! načina, a te grupice dodaju još 3!3! načina, tj. ukupno imamo 5!3!3! načina. Isto toliko za druga dva uparivanja.

   Ako su svi iste nacionalnosti zajedno, to je kao da imamo 3 osobe, njih rasporedimo na 3! načina. I to još množimo sa 3!3!3! jer sve 3 grupice imaju 3! mogućnosti kako da se rasporede.

   Ukupan broj načina je 9! za 9 ljudi. Sada prema PUI konačan rezultat je

$$9! - 3(3!7!) + 3(5!3!3!) - 3!3!3!3! = 283824.$$

4. Na koliko načina top može preći najkraći put na šahovskoj tabli od polja $a1$ do polja $h8$ ako ne sme da pređe

   a) preko polja $c3$;

b) ni preko polja $c3$, ni preko polja $f5$;

c) ni preko polja $c3$, ni preko polja $d7$, ni preko polja $f5$?

Rešenje.

a)

$$\binom{14}{7} - \binom{4}{2}\binom{10}{5} = 1920.$$

$\binom{14}{7}$ je ukupan broj načina od $a1$ do $h8$, $\binom{4}{2}$ je broj načina od $a1$ do $c3$, a $\binom{10}{5}$ je broj načina od $c3$ do $h8$. Dakle, od ukupnog broja mogućnosti smo oduzeli one koje prolaze kroz $c3$.

b)

$$\binom{14}{7} - \underbrace{\binom{4}{2}\binom{10}{5}}_{\text{preko } c3} - \underbrace{\binom{9}{4}\binom{5}{2}}_{\text{preko } f5} + \underbrace{\binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}}_{\text{preko } c3 \text{ i } f5} = 1260.$$

c)

$$\binom{14}{7} - \underbrace{\binom{4}{2}\binom{10}{5}}_{\text{preko } c3} - \underbrace{\binom{9}{4}\binom{5}{2}}_{\text{preko } f5} - \underbrace{\binom{9}{3}\binom{5}{4}}_{\text{preko } d7}$$
$$+ \underbrace{\binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}}_{\text{preko } c3 \text{ i } f5} + \underbrace{\binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{5}{1}}_{\text{preko } c3 \text{ i } d7} + 0 - 0 = 990$$

Nule smo dobili jer jasno ne postoji najkraća putanja koja istovremeno i preko $f5$ i preko $d7$.

Rastroj poretka

Za permutaciju $a_1 a_2 \dots a_n$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ kažemo da je rastroj poretka ako za sve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi $a_i \neq i$.

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

1. Dokazati da važe sledeći identiteti:

a) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, $n \geqslant 2$.

b) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, $n \geqslant 3$.

Rešenje.

a) Važi sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} nD_{n-1} + (-1)^n &= n(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!} + \frac{(-1)^n n!}{n!} \\ &= n! \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

b) Važi sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) &= (n-1)D_{n-1} + D_{n-1} - (-1)^{n-1} \\ &= nD_{n-1} + (-1)^n = D_n. \end{aligned}$$

2. Koliko ima deranžmana skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ u kojima se skup $\{1, 2, 3, 4\}$ preslikava na sebe?

   Rešenje. Cifre $1, 2, 3, 4$ moraju biti na prva četiri mesta. Možemo ih smestiti na D_4 načina. Ostaje da rasporedimo $5, 6, 7, 8$ na preostala četiri mesta. To takođe možemo učiniti na D_4 načina. Dakle, imamo ukupno D_4^2 načina. Izračunajmo D_4. Lako se uoči da $D_2 = 1$. Isto brzo možemo videti da $D_3 = 2$. Sada D_4 računamo na osnovu dela b) prvog zadatka:

$$D_4 = (4-1)(1+2) = 3 \cdot 3 = 9.$$

   Dakle, konačno rešenje je 81.

3. Neka je $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima se tačno k elemenata preslikava na sebe.

   Rešenje. Odgovor je $\binom{n}{k} D_{n-k}$. Prvo odaberemo k mesta na koje ćemo smestiti elemente sa datog mesta (to možemo učiniti na $\binom{n}{k}$ načina), a ostale elemenente rasporedimo tako što pazimo da niko među njima ne bude na svom originalnom mestu (to možemo učiniti na D_{n-k} načina).

4. Na koliko načina se može popuniti tabla dimenzije 2×8 brojevima iz skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ tako da ni u jednoj koloni i ni u jednoj vrsti ne budu dva ista broja?

   Rešenje: Prvi red jasno možemo popuniti na 8! načina. Kod drugog reda treba da pazimo da u i-tu kolonu ne stavljamo onaj elemenat koji je u prvoj vrsti na i-tom mestu. Dakle, drugi red možemo popuniti na D_8 načina.

$$D_8 = 8! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{7!} \right) = 14833.$$

   Dakle, konačno rešenje je $8! \cdot D_8 = 40320 \cdot 14833 = 598066560$.

Rekurentne formule

1. Teleskopiranjem rešiti rekurentnu rekalciju: $f_n = 2f_{n-1} + 3,\ f_0 = 1$.

   Rešenje:

$$\begin{aligned}
f_n &= 2f_{n-1} + 3\\
f_{n-1} &= 2f_{n-2} + 3\\
f_{n-2} &= 2f_{n-3} + 3\\
&\vdots\\
f_2 &= 2f_1 + 3\\
f_1 &= 2f_0 + 3\\
f_0 &= 1.
\end{aligned}$$

   Sada pomnožimo i-ti red sa 2^{i-1}. Tako dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}
f_n &= 2f_{n-1} + 3\\
2f_{n-1} &= 2^2 f_{n-2} + 2\cdot 3\\
2^2 f_{n-2} &= 2^3 f_{n-3} + 2^2\cdot 3\\
&\vdots\\
2^{n-2} f_2 &= 2^{n-1} f_1 + 2^{n-2}\cdot 3\\
2^{n-1} f_1 &= 2^n f_0 + 2^{n-1}\cdot 3\\
2^n f_0 &= 2^n\\
\hline
f_n &= 3 + 2\cdot 3 + 2^2\cdot 3 + \cdots + 2^{n-1}\cdot 3 + 2^n\\
&= 3\cdot(1 + \cdots + 2^{n-1}) + 2^n = 3\cdot\frac{2^n - 1}{2-1} + 2^n\\
&= 3\cdot 2^n - 3 + 2^n = 2^n(3+1) - 3 = 2^{n+2} - 3.
\end{aligned}$$

2. Odrediti maksimalan broj oblasti na koje je razbijena ravan sa n kružnica.

   Rešenje: pretpostavimo da imamo nacrtano $n-1$ kružnicu i upravo crtamo n-tu. Maksimalni broj oblasti ćemo dobiti ako svaka novo nacrtana kružnica seče sve već nacrtane kružnice (ne samo dodiruje ili je disjunktno s njima). Na toj n-toj kružnici ovako nastaće $2(n-1)$ presečna tačka, i možemo primetiti da je to upravo broj novodobijenih oblasti. Dakle, ako označimo sa k_n traženi broj, dobili smo rekurentnu relaciju

$k_n = k_{n-1} + 2(n-1)$. Sad primenimo teleskopiranje.

$$\begin{aligned}
k_n &= k_{n-1} + 2(n-1)\\
k_{n-1} &= k_{n-2} + 2(n-3)\\
&\vdots\\
k_2 &= k_1 + 2 \cdot 1\\
k_1 &= 2 \text{ (Ovo smo odredili direktno.)}\\
\hline
k_n &= 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + \cdots + 2(n-1)\\
&= 2 + 2(1 + 2 + \cdots + (n-1))\\
&= 2 + 2\frac{(n-1)n}{2}\\
&= n^2 - n + 2.
\end{aligned}$$

3. Naći opšte rešenje rekurentne relacije: $f_{n+2} - 7f_{n+1} + 12f_n = 0$.

   Rešenje: Karakteristična jednačina $x^2 - 7x + 12 = 0$ ima dva različita realna rešenja $x_1 = 4$ i $x_2 = 3$, prema tome opšte rešenje je

   $$f_n = A \cdot 4^n + B \cdot 3^n$$

   .

4. Naći opšte rešenje rekurentne relacije: $f_{n+2} - 4f_{n+1} + 13f_n = 0$.

   Rešenje: Karakteristična jednačina $x^2 - 4x + 13 = 0$ ima dva kompleskna rešenja $x_1 = 2 + 3i$ i $x_2 = 2 - 3i$, prema tome opšte rešenje je

   $$f_n = A \cdot (2+3i)^n + B \cdot (2-3i)^n.$$

5. Naći opšte rešenje rekurentne relacije: $f_{n+2} + 4f_{n+1} + 4f_n = 0$.

   Rešenje: Karakteristična jednačina $x^2 + 4x + 4 = 0$ tj. $(x+2)^2 = 0$ ima jedno dvostruko rešenje $x_{1/2} = -2$, prema tome opšte rešenje je

   $$f_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot n \cdot (-2)^n.$$

6. Naći opšte rešenje rekurentne relacije: $f_{n+3} + 3f_{n+2} + 3f_{n+1} + f_n = 0$.

   Rešenje: Karakteristična jednačina $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, tj. $(x+1)^3 = 0$ ima jedno trostruko rešenje $x_{1/2/3} = -1$, prema tome opšte rešenje je

   $$f_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot n \cdot (-1)^n + C \cdot n^2 \cdot (-1^n).$$

7. Naći opšte rešenje rekurentne relacije: $f_{n+4} + 4f_n = 0$.

   Rešenje: Karakteristična jednačina $x^4 + 4 = 0$ tj. ima četiri razlitičita rešenja $x_1 = 1+i$, $x_2 = 1-i$, $x_3 = -1+i$ i $x_4 = -1-i$ prema tome opšte rešenje je

   $$f_n = A \cdot (1+i)^n + B \cdot (1-i)^n + C \cdot (-1+i)^n + D \cdot (-1-i)^n.$$

8. Rešiti rekurentnu relaciju: $f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2}$ za $n \geqslant 1$ i početne uslove $f_0 = 1$, $f_1 = 2$.

   Rešenje: Karakteristična jednačina $x^2 - 5x + 6 = 0$ tj. ima dva različita rešenja $x_1 = 3$ i $x_2 = 2$ prema tome opšte rešenje je

$$f_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n.$$

   Iskoristimo sada početne uslove:

$$n = 0 : f_0 = A \cdot 3^0 + B \cdot 2^0 = 1$$
$$n = 1 : f_1 = A \cdot 3^1 + B \cdot 2^1 = 2,$$

   tj. dobili smo sistem

$$A + B = 1$$
$$3A + 2B = 2.$$

   Rešenje ovog sistema je $A = 0$ i $B = 1$. Dakle, konačno rešenje:

$$f_n = 2^n.$$

Rekurentne formule - sistemi, trikovi, primena

1. Zadati jednu linearnu homogenu rekurentnu formulu sa početnim uslovima koju zadovoljava sledeći niz:

$$a_n = 2^n + 3 \cdot (-1)^n.$$

   Rešenje. Iz rešenja vidimo da su rešenja karakteristične jednačine 2 i -1. Dakle, karakterističnu jednaǐnu možemo zapisati kao $(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$. Odavde tražena rekurentna formula može biti:

$$a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = 0.$$

   Početne uslove lako računamo. Za $n = 0$ imamo

$$a_0 = 2^0 + 3(-1)^0 = 1 + 3 = 4,$$

   dok za $n = 1$ imamo

$$a_1 = 2^1 + 3(-1)^1 = 2 - 3 = -1.$$

2. Rešiti sistem rekurentnih relacija:

$$f_{n+1} = 2f_n - g_n$$
$$g_{n+1} = f_n + 4g_n$$

   za početne uslove $f_0 = 2$ i $g_0 = 1$.

Rešenje: Iz $f_{n+1} = 2f_n - g_n$ izrazimo $g_n = -f_{n+1} + 2f_n$ i odavde vidimo da je $g_{n+1} = -f_{n+2} + 2f_{n+1}$, pa kad ubacimo ove dve veze u drugu jednačinu, dobijamo $-f_{n+2} + 2f_{n+1} = f_n - 4f_{n+1} + 8f_n$, tako da imamo rekurentnu formulu:

$$f_{n+2} - 6f_{n+1} + 9f_n = 0,$$

uz početne uslove $f_0 = 0$ i $f_1 = 2f_0 - g_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Rešimo ovu rekurentnu relaciju i dobijamo $f_n = (2-n) \cdot 3^n$. Sad možemo izračunati i g_n kao

$$\begin{aligned} g_n &= -f_{n+1} + 2f_n = (n+1-2) \cdot 3^{n+1} + 2(2-n) \cdot 3^n \\ &= (n-1) \cdot 3^{n+1} + (4-2n) \cdot 3^n = 3^n(3n - 3 + 4 - 2n) \\ &= 3^n(n+1). \end{aligned}$$

3. Dokazati da je $2\cos\frac{n\pi}{3}$ rešenje rekurentne relacije $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ za početne uslove $x_0 = 2$ i $x_1 = 1$.

   Rešenje: rešavanjem rekurentne relacije lako dođemo do

$$f_n = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n.$$

   Posmatrajmo sad kompleksan broj $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Njegov trigonometrijski oblik je $\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})$, dok trigonometrijski oblik kompleksnog broja $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ je $\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$. Sada

$$\begin{aligned} f_n &= (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))^n + (\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))^n \\ &= (\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})^n + (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n \\ &= \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3} \\ &= 2\cos\frac{n\pi}{3}. \end{aligned}$$

4. Rešiti rekurentnu relaciju $x_{n+1} = \frac{1-4x_n}{1-6x_n}$ za početni uslov $x_0 = 1$.

   (Uputstvo: uvesti smenu $x_n = \frac{y_n}{z_n}$.)

   Rešenje: nakon smene imamo:

$$\frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{1 - 4\frac{y_n}{z_n}}{1 - 6\frac{y_n}{z_n}} = \frac{\frac{z_n - 4y_n}{z_n}}{\frac{z_n - 6y_n}{z_n}} = \frac{z_n - 4y_n}{z_n - 6y_n}.$$

   Rešavaćemo sistem

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= z_n - 4y_n \\ z_{n+1} &= z_n - 6y_n, \end{aligned}$$

uz početne uslove $y_0 = 1$ i $z_0 = 1$.

Iz prve jednačine zaključimo: $z_n = y_{n+1} + 4y_n$ i $z_{n+1} = y_{n+2} + 4y_{n+1}$, i ako to vratimo u drugu jednačinu, dobijamo: $y_{n+2} + 4y_{n+1} = y_{n+1} + 4y_n - 6y_n$, tako da imamo rekurentnu formulu

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 0,$$

uz početne uslove $y_0 = 1$ i $y_1 = z_0 - 4y_0 = 1 - 4 \cdot 1 = 3$.

Rešimo ovu rekurentnu relaciju i dobijamo $y_n = 2 \cdot (-2)^n - 1 \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}$. Sada imamo i

$$\begin{aligned} z_n = y_{n+1} + 4y_n &= (-1)^{n+2} - (-2)^{n+2} + 4 \cdot (-1)^{n+1} - 4(-2)^{n+1} \\ &= 3 \cdot (-1)^{n+1} - (-2)^{n+2} - (-2)^{n+3} = 3 \cdot (-1)^{n+1} + (-2)^{n+2}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x_n = \frac{y_n}{z_n} = \frac{(-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}}{3 \cdot (-1)^{n+1} + (-2)^{n+2}}.$$

5. Rešiti rekurentnu relaciju $x_{n+2} = x_{n+1}^3 \cdot x_n^{-2}$ za početne uslove $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$.

   (Uputstvo: uvesti smenu $x_n = m^{y_n}$.)

   Rešenje: nakon te smene imamo sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} m^{y_{n+2}} &= (m^{y_{n+1}})^3 (m^{y_n})^{-2} \\ m^{y_{n+2}} &= m^{3y_{n+1} - 2y_n} \\ y_{n+2} &= 3y_{n+1} - 2y_n. \end{aligned}$$

   Treba da vidimo za početne uslove. Ono što treba da važi: $m^{y_0} = 1$ i $m^{y_1} = 2$. Ovo je zadovoljeno u slučaju $m = 2$, $y_0 = 0$ i $y_1 = 1$. Sad možemo rešiti dobijenu rekurentnu relaciju, kao rešenje dobićemo $y_n = 2^n - 1$. Konačno rešenje je, dakle:

$$x_n = 2^{2^n - 1}.$$

6. Koliko ima reči dužine n nad alfabetom $\{1, 2, 3\}$ u kojima se ne pojavljuje podreč 11?

   Rešenje. Označimo taj broj sa f_n. Za jednu reč imamo tri opcije.

   - Ako počinje sa 1: drugo slovo mora biti 2 ili 3, a preostalih $n - 2$ slova možemo popuniti na f_{n-2} načina, jer to su u suštini reči dužine $n - 2$ nad alfabetom $\{1, 2, 3\}$ u kojima se ne pojavljuje podreč 11.
   - Ako počinje sa 2: preostala mesta možemo popuniti na f_{n-1} način.
   - Ako počinje sa 3: preostala mesta možemo popuniti na f_{n-1} način.

Pošto su u pitanju disjunktni slučaji, na osnovu principa zbira možemo ustanoviti rekurentnu relaciju:

$$f_n = 2f_{n-1} + 2f_{n-2}.$$

Opšte rešenje ove rekurentne relacije je

$$f_n = A(1-\sqrt{3})^n + B(1+\sqrt{3})^n.$$

Treba da odredimo početne uslove. Važi $f_0 = 1$ (prazna reč) kao i $f_1 = 3$. Odavde možemo rešavati sledeći sistem:

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 3 &= A(1-\sqrt{3}) + B(1+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema je $A = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$ i $B = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$, pa konačno rešenje je:

$$f_n = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n + \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n.$$

7. Pravougaonik veličine $2 \times n$ izdeljen je na $2n$ jediničnih kvadratića. Raspolažemo sa dovoljnim brojem pločica pravougaonog oblika veličine 2×1 i 2×2. Na koliko načina se ceo pravougaonik $2 \times n$ može prekriti sa ovim pločicama?

Rešenje. Označimo sa f_n broj načina kako možemo prekriti pravougaonik $2 \times n$. Polje u gornjem levom ćošku mora biti prekriveno. Njega možemo prekriti na 3 načina.

- Ako prekrijemo pločicom 2×2, ostatak pravougaonika možemo prekriti na f_{n-2} načina.
- Ako prekrijemo pločicom 2×1, ostatak pravougaonika možemo prekriti na f_{n-1} načina.
- Ako prekrijemo pločicom 1×2, tačno ispod moramo još jednu takvu pločicu smestiti, a ostatak pravougaonika možemo prekriti na f_{n-2} načina.

Otuda imamo rekurentnu relaciju:

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}.$$

Početne uslove određujemo direktno: $f_1 = 1$, $f_2 = 3$. Konačno rešenje će biti

$$f_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$$