LINEARNE PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE
SKRIPTA ZA DRUGI DEO KURSA

MARKO NEDELJKOV

Ova skripta pokriva deo gradiva iz predmeta parcijalne diferencijalne jednačine za studente matematike.

Predznanje koje se očekuje od čitalaca je linearna algebra, matematička analiza u $\mathbb{R}^n$, obične diferencijalne jednačine i preskočeni delovi standardnog kursa iz PDJ:

- Klasifikacija sistema i jednačina
- Karakteristične mnogostrukosti
- Klasični metodi za rešavanje talasne jednačine
- Integral energije
- Princip maksimuma za parabolične i eliptične jednačine
- Elementarne metode rešavanja paraboličnih i eliptičnih PDJ
- Fourier-ova metoda razdvajanja promenljivih

U skripti su što je više moguće na elementarniji način opisani pojmovi slabog rešenja, distribucija, kao i razni primeri njihove primene.

Sadržaj

1. Uvodni pojmovi i definicije

1.1. **Klasični prostori funkcija.**

1.1.1. *Prostori diferencijabilnih funkcija.* Označimo sa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, sa $\overline{\Omega}$ njegovo zatvorenje, a sa $\partial\Omega$ njegovu granicu.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ je skup svih funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$, što kasnije nećemo naznačavati) koja ima sve neprekidne izvode zaključno sa redom $0 \leq k \leq \infty$.

$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ je skup svih funkcija $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ za koje postoji funkcija $\phi \in \mathcal{C}^k(\Omega')$, $u \equiv \phi$ na $\overline{\Omega} \subset \Omega'$, Ω' je otvoren skup.

$\mathcal{C}_b^k(\Omega)$ je skup svih ograničenih funkcija, zajedno sa svim svojim izvodima, iz $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Važi:

$$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)|_\Omega \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^k(\Omega).$$

Ako je Ω ograničen skup, tada je $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}_b^k(\Omega)$.

Označimo sa $\operatorname{supp} u$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, kao komplement najvećeg otvorenog skupa Ω' na kom je u identički jednako nuli. Skup $\operatorname{supp} u$ zovemo nosačem funkcije u. Kako je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : \; u(x) \neq 0\}}.$$

Oznaka $A \subset\subset B$ znači da postoji kompaktan skup K, takav da važi $A \subset K \subset B$.

$\mathcal{C}_0^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \; \operatorname{supp} u \subset\subset \Omega\}$.

Skup $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ćemo zvati prostor test funkcija.

1.1.2. *L^p-prostori.* Kažemo da je $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebegove mere nula, u oznaci $\mathcal{L}(A) = 0$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prebrojiva unija C_i paralelopipeda u $\mathbb{R}^n$ takva da je

$$\operatorname{mes} \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i < \varepsilon \text{ (mera paralelopipeda je proizvod njegovih stranica).}$$

Na primer, prebrojiv skup tačaka je Lebegove mere nula u jednodimenzionalnom slučaju, regularne krive su mere nula u dvodimenzionalnom slučaju,...

Među funkcijama $u : \Omega \to \mathbb{R}$ koje su Lebeg merljive (sve elementarne funkcije i njihove kompozicije su Lebeg merljive, na primer) uvodimo relaciju ekvivalencije "jednake skoro svuda na Ω", u oznaci $f \sim g$, ako je

$$\mathcal{L}(\{x : \; f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Primedba 1. Ovde nećemo tačnu definiciju Lebeg merljivih funkcija, jer je to netrivijalan pojam koji se intenzivno izučava u posebnom kursu o teoriji mera. Koristićemo samo skupove Lebegove mere nula.

Neka je $1 \leq p < \infty$. Od sada će Ω uvek označavati otvoren, povezan skup.

$$L^p(\Omega) = \{f/\sim : \Omega \to \mathbb{R} : \; f \text{ je merljiva }, \; \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\}.$$

Ovo je Banahov prostor sa normom

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \Big)^{1/p}.$$

Prostor $L^2(\Omega)$ je osim toga i Hilbertov, sa unutrašnjim proizvodom $(f|g)$ definisanim sa

$$(f|g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x,$$

gde oznaka $\overline{g(x)}$ označava kompleksno konjugovanu vrednost od $g(x)$. Naravno, ako radimo sa realno-vrednosnim funkcijama, što će i biti slučaj ako se ne napomene drugačije, onda je unutrašnji proizvod $(f|g)$ definisan sa

$$(f|g) = \int_\Omega f(x)g(x) \mathrm{d}x.$$

Za $p = \infty$ imamo malo drugačiju definiciju:

$$
\begin{aligned}
L^\infty(\Omega) =& \{f/\sim : \Omega \to \mathbb{R} : \ f \text{ je merljiva i postoji realno } M \\
& \quad \text{tako da važi } |f(x)| \le M, \ \text{za svako } x \in \Omega\}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

$L^\infty(\Omega)$ je takođe Banahov prostor sa normom

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf M, \ \text{gde je konstanta } M \text{ iz (1)}.$$

Najvažniji prostori za nas su L^2-prostori, kao i L^1_{loc}-prostori, koje ćemo sada definisati.

$$
\begin{aligned}
L^p_{loc}(\Omega) =& \{f/\sim : \Omega \to \mathbb{R} : \ f \text{ je merljiva i za svako } K \subset\subset \Omega \\
& \int_K |f(x)|^p \mathrm{d}x \le \infty\}.
\end{aligned}
$$

Funkcije iz L^1_{loc} zovemo lokalno integrabilnim funkcijama.

Često ćemo koristiti Helderovu nejednakost:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\mathrm{d}x \le \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}, \ u \in L^p(\Omega), \ v \in L^q(\Omega), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2}$$

Specijalan slučaj ove nejednakosti, $p = q = 2$ se zove Švarcova nejednakost.

Posledice Helderove nejednakosti:

1. $$\mathrm{mes}(\Omega)^{-1/p}\|u\|_{L^p} \le \mathrm{mes}(\Omega)^{-1/q}\|u\|_{L^q}, \ u \in L^q(\Omega), \ p \le q.$$
2. $$\|u\|_{L^q} \le \|u\|^\lambda_{L^p}\|u\|^{1-\lambda}_{L^r}, \ u \in L^r(\Omega), \ p \le q \le r, \ \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$
3. $$
\begin{aligned}
&\int_\Omega u_1 ... u_m \mathrm{d}x \le \|u\|_{L^{p_1}} ... \|u\|_{L^{p_m}}, \\
&u_i \in L^{p_i}(\Omega), \ i = 1, ..., m, \ \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1.
\end{aligned}
$$

1.2. **Slabi izvodi i slaba rešenja.**

1.2.1. *Slabi izvodi.* Uvedimo oznaku $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ za multiindeks $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Koristićemo oznaku

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Ako je $\alpha_i = 0$ za neko i, to znači da nemamo izvoda po promenljivoj x_i.

Definicija 1. Funkcija $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ima slabi izvod reda α, $|\alpha| \le m$, koji ćemo opet označavati sa $\partial^\alpha f$, ako postoji funkcija $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da za svako $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ važi

$$\int_\Omega f(x)\partial^\alpha \phi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Funkciju g ćemo zvati slabim izvodom reda α od f.

Sada ćemo probati pomoću jednostavnih primera pokazati šta su to u stvari slabi izvodi.

Primer 1. Uzmimo $\Omega = \mathbb{R}$ i $f(x) = |x|$. Ova funkcija nije diferencijabilna u nuli, ali ćemo pokazati da postoji njen prvi izvod.

(a) Neka je $\phi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)\mathrm{d}x \\
=& -\int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&\text{sada koristimo parcijalnu integraciju} \\
=& -(x\phi(x))|_{x=-\infty}^{x=0} + \int_{-\infty}^{0}\phi(x)\mathrm{d}x + (x\phi(x))|_{x=0}^{x=-\infty} - \int_{0}^{\infty}\phi(x)\mathrm{d}x \\
=& -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

gde je

$$
g(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.
$$

Ovde smo koristili da je $(x\phi(x))$ jednaka nuli za $x = 0$, i $(x\phi(x))$ je nula za $x = \pm\infty$, jer ϕ ima kompaktan nosač (tj. limes ovog člana je 0 kada $x \to \pm\infty$.

Primetimo da nismo imali problema sa domenom integracije, jer ϕ, a samim tim i ϕ' imaju kompaktne nosače.

(b) Potražimo sada drugi slabi izvod funkcije f, tj. slabi izvod funkcije g.

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \\
=& -\int_{-\infty}^{0}\phi'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&\text{sada koristimo parcijalnu integraciju} \\
=& -(\phi(x))|_{x=-\infty}^{x=0} + \int_{-\infty}^{0} 0\cdot\phi(x)\mathrm{d}x \\
&+ (\phi(x))|_{x=0}^{x=\infty} - \int_{0}^{\infty} 0\cdot\phi(x)\mathrm{d}x = -2\phi(0).
\end{aligned}
$$

Kako ne postoji lokalno integrabilna funkcija h takva da je

$$
\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 2\phi(0)
$$

(jer je skup $\{0\}$ Lebegove mere nula), ne postoji drugi izvod funkcije f.

Primer 2. Uzmimo sada dvodimenzionalni slučaj. Neka je $\Omega = L_0(1)$ (otvorena lopta sa centrom u 0 poluprečnika 1) i funkcija f je data sa

$$
f(x,y) = \begin{cases} a, & y < 0 \\ b, & y > 0 \end{cases},
$$

$a \neq b$. Kako funkcija ne zavisi od x, lako je pokazati da svaki izvod po x postoji, tako da ćemo posmatrati samo izvod po y-u. Zbog kompaktnosti nosača test funkcije ϕ

možemo koristiti Fubinijevu teoremu.

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} a\partial_y\phi(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^{\sqrt{1-x^2}} b\partial_y\phi(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\\ &=\int_{-1}^{1}(b-a)\phi(x,0)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Kako duž $[-1,1]$ ima Lebegovu meru nula u dvodimenzionalnom prostoru, a ϕ ima proizvoljnu vrednost na tom intervalu, kao i u prethodnom slučaju zaključujemo da ne postoji izvod ove funkcije po y.

Sledeća teorema je veoma važna za traženje slabog izboda, ali je nećemo dokazivati.

Teorema 1. *Ako postoji slabi izvod za lokalno integrabilnu funkciju u, tada je funkcija u skoro svuda diferencijabilna, i u tim tačkama je jaki jednak slabom izvodu.*

Koristeći ovu teoremu, odmah vidimo da je $|x|' = \mathrm{sgn}(x)$ (samo nam još treba dokaz da je to zaista slabi izvod).

1.2.2. *Slabo rešenje parcijalne diferencijalne jednačine.* Pojam slabog rešenja nije jedinstveno definisan, tj. definiše se tako da što je više moguće odgovara fizičkom modelu koji jednačina opisuje.

Mi ćemo ovde dati prvo definiciju za jednačinu prvog reda u divergentnom obliku. Kasnije ćemo koristiti i jednačine višeg reda, kao i sisteme jednačina.

Kažemo da je jednačina prvog reda data u divergentnom obliku ako se može zapisati kao

$$\partial_t a_0(t,x,u)+\partial_{x_1}a_1(t,x,u)+...+\partial_{x_n}a_n(t,x,u)=b(t,x,u), \tag{3}$$

gde je nepoznata funkcija $u=u(t,x_1,...,x_n)$. Pretpostavimo da funkcija u zadovoljava početni uslov $u(x,0)=u_0(x)$. Kažemo da je

$$u\in L^1_{loc}([0,T)\times\Omega)$$

Slabo rešenje jednačine (3) uz dati početni uslov, ako važi

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\int_\Omega \partial_t\phi(t,x)a_0(t,x,u)+\partial_{x_1}\phi(t,x)a_1(t,x,u)+...\\ &+\partial_{x_n}\phi(t,x)a_n(t,x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_\Omega u_0(x)\phi(0,x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^T\int_\Omega b(t,x,u)\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{4}$$

za svako $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty((-\infty,T)\times\Omega)$. Kao što vidimo, za slabo rešenje nije potrebno da funkcija u bude diferencijabilna, pa joj otud i naziv.

Osim ovoga, lako je proveriti (parcijalnom integracijom) da svako $\mathcal{C}^1$ rešenje od (3) istovremeno zadovoljava i relaciju (4), tj. ono je automatski i slabo rešenje.

U praksi se često, radi jednostavnosti, koristi i slabiji uslov

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & -\int_0^T \int_\Omega \partial_t \phi(t,x) a_0(t,x,u) \partial_{x_1} \phi(t,x) a_1(t,x,u) + ... \\
& + \partial_{x_n} \phi(t,x) a_n(t,x,u) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
& = \int_0^T \int_\Omega b(t,x,u) \phi(t,x) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
& \lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0 \text{ skoro svuda na } \Omega,
\end{aligned}
$$

za svako $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,T)\times\Omega)$, kao definicija slabog rešenja. Obratimo pažnju da je sada ϕ definisano na manjem domenu, odnosno da je jednako 0 na x-osi ($t=0$).

Svi gornji integrali su Lebegovi. No, za one studente koji se još nisu sreli sa tim pojmom, ovi integrali skoro uvek mogu da se zamene se Rimanovim, što ćemo mi i raditi u konkretnim primerima.

Primedba 2. Ako jednačina nije data u divergentnom obliku, tada je definicija slabog rešenja mnogo teža i specifičnija, ukoliko je uopšte moguća. Na kraju ovog teksta se nalaze dve mogućnosti kako se može prići tom problemu. Sada ćemo dati dva karakteristična jednodimenzionalna primera, $\Omega \subset \mathbb{R}$, a promenljiva t je vremenska promenljiva. Inače, jednačine gde je vreme izdvojena promenljiva zovemo evolucionim jednačinama, i obično nas interesuje slučaj $t > 0$.

Na ovom mestu čemo dati dva ilustrativna primera. U oba primera se koristi definicija (5).

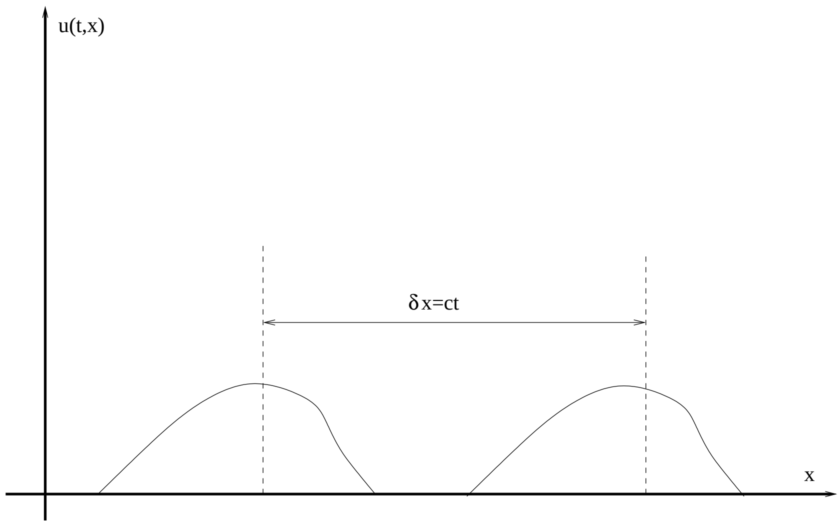
Primer 3. (Kretanje konstantnom brzinom) Posmatrajmo jednačinu sa početnim uslovom

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad & \partial_t u(t,x) + c\partial_x(t,x) = 0,\ c \in \mathbb{R} \\
& u(t,0) = a(x).
\end{aligned}
$$

Ova jednačina, između ostalog, pretstavlja model migracije konstantnom brzinom bez uticaja okoline.

Ako je $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tada se lako može videti da je klasično rešenje dato sa

$$u(t,x) = a(x-ct) \text{ (vidi sliku 1)}$$



Sl. 1. Migracija konstantnom brzinom

Pretpostavimo sada da je funkcija a samo lokalno integrabilna. Tada gore napisano klasično rešenje nema smisla. No, pokazaćemo da je to slabo rešenje.

Koristimo definiciju slabog rešenja datog sa (5). Očigledno je

$$\lim_{t\to 0} a(x-ct) = a(x)$$

skoro svuda. Koristeći pomenutu definiciju, imamo

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty a(x-ct)(\partial_t\phi(t,x) + c\partial_x\phi(t,x))\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad \text{(posle smene promenljivih:} \xi = x-ct,\ \tau = t) \\
&= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty a(\xi)(\partial_t\phi(\tau,\xi+c\tau) + c\partial_x\phi(\tau,\xi+c\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&\quad \text{(koristeći Fubinijevu teoremu)} \\
&= -\int_{-\infty}^\infty a(\xi)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\phi(\tau,\xi+c\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi \\
&= -\int_{-\infty}^\infty a(\xi)\phi(\tau,\xi+c\tau)\big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} = 0,
\end{aligned}$$

jer je $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$. Tako smo pokazali da funkcija $u = a(x-ct)$ ostaje slabo rešenje, iako a nije dovoljno glatka funkcija.

U sledećem primeru ćemo videti slabo rešenje koje je tipično za zakone održanja (kada je $b \equiv 0$ u (4) i (5)).

Posmatrajmo sledeći početni problem. Ona se zove Burgersova bezviskozna jednačina i fizički je zakon održanja brzine (što je inače veštačka tvorevina), no njena prava uloga je kada je samo jedna od jednačina u nekom realnom fizičkom modelu opisanim sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Teorema 2. *Rimanov problem (početni uslov je stepenasta funkcija)*

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$$
$$u(0,x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_d, & x > 0 \end{cases}$$

ima slabo rešenje oblika

$$u(t,x) = \begin{cases} u_l, & x < ct \\ u_d, & x > ct \end{cases},$$

gde je $c = (u_l + u_d)/2$.

Dokaz. Početni uslov je očigledno zadovoljen. Imamo

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u(t,x)\partial_t\phi(t,x) + (u^2/2)\partial_x\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^{ct} (u_l\partial_t\phi(t,x) + (u_l^2/2)\partial_x\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad -\int_0^\infty \int_{ct}^\infty (u_d\partial_t\phi(t,x) + (u_d^2/2)\partial_x\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Kako važi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{ct} \partial_t\phi(t,x)\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{-\infty}^{ct}\phi(t,x)\mathrm{d}x\Big) - c\phi(t,ct) \\ \int_{ct}^{\infty} \partial_t\phi(t,x)\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{ct}^{\infty}\phi(t,x)\mathrm{d}x\Big) + c\phi(t,ct) \end{aligned}$$

imamo

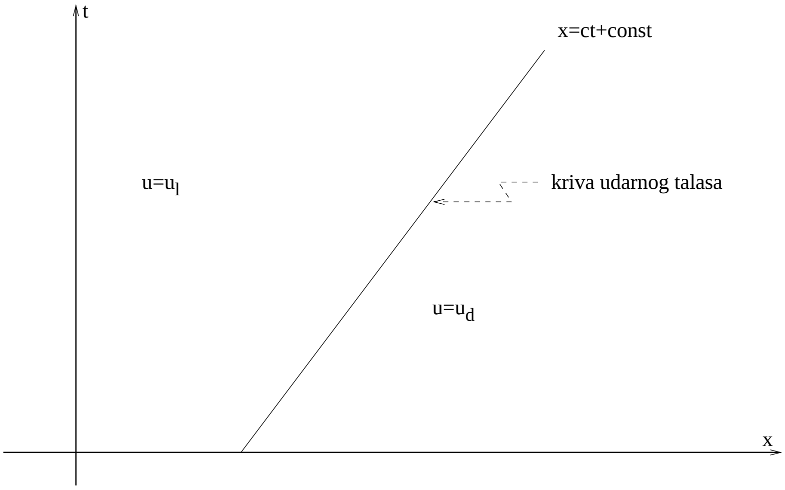
$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty (u_l c\phi(t,ct) - (u_l^2/2)\phi(t,ct))\mathrm{d}t \\ &\quad - \int_0^\infty (u_d c\phi(ct,t) - (u_d^2/2)\phi(t,ct))\mathrm{d}t \\ &\quad \Big(\text{jer je} \\ &\quad \int_{-\infty}^{ct}\phi(t,x)\mathrm{d}x|_{t=0}^{t=\infty} = 0 \text{ i } \int_{ct}^{\infty}\phi(t,x)\mathrm{d}x|_{t=0}^{t=\infty} = 0\Big) \\ &= \int_0^\infty (c(u_l - u_d) - (u_l^2 - u_d^2)/2)\phi(t,ct)\mathrm{d}t = 0, \end{aligned}$$

za

$$c = \frac{u_l + u_d}{2}. \tag{7}$$

□

Primedba 3. Rešenje u ovog oblika zovemo udarni talas sa brzinom c. Uslov (7) se zove Rankin-Igonoov uslov. Ovde je data specijalan slučaj, a opšti oblik Rankin-Igonoovog uslova se kasnije može videti u relaciji (**??**).



Sl. 2. Udarni talas

Čitaocu ostavljamo za vežbu da pokaže sledeće: Rimanov problem za jednačinu

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

ima rešenje u u obliku udarnog talasa sa brzinom

$$c = \frac{[f(u)]}{[u]} := \frac{f(u_d) - f(u_l)}{u_d - u_l}.$$

Postupak dokazivanja je isti kao kod prethodne teoreme.

2. Distribucije i Furijeova transformacija

2.1. **Prostor distribucija.** U ovoj glavi ćemo dati uprošćenu definiciju prostora distribucija. Nećemo koristiti topologiju (vektorsko topološke prostore), već će njeno mesto zauzeti odgovarajuća konvergencija u vektorskim prostorima.

Funkciju iz nekog vektorskog prostora nad određenim vektorskim poljem, u to isto polje (najčešće $\mathbb{R}$, ili $\mathbb{C}$) zovemo funkcionela.

Prvo uvedimo konvergenciju u prostoru $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Definicija 2. Kažemo da niz $\{\phi_j\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ konvergira nuli, ako važi

- Postoji kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$ takav da je $\operatorname{supp} \phi_j \subset K$, za svako $j \in \mathbb{N}$.
- Za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\|\partial^\alpha \phi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$, kada $j \to \infty$.

Ovu konvergenciju označavamo sa $\stackrel{\mathcal{D}}{\to}$.

Skup $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ sa ovako definisanom konvergencijom, ćemo označavati sa $\mathcal{D}(\Omega)$. Elemente ovog prostora zovemo test funkcije.

Definicija 3. Linearnu neprekidnu funkcionelu S na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ zovemo distribucijom. Njeno delovanje na test funkciju ϕ označavamo sa $\langle S, \phi \rangle$.

Neprekidnost posmatramo u smislu konvergencije: Kažemo da je S neprekidna ako za svaki niz test funkcija $\{\phi_j\}_j$ koji konvergira ka nuli važi $\langle S, \phi_j \rangle \to 0$, kada $j \to \infty$

Vektorski prostor ovih distribucija označavamo sa $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Sada ćemo dati neke važnije primere distribucija. Prvi primer nam daje injektivno preslikavanje prostora lokalno integrabilnih funkcija u prostor distribucija, a drugi nam daje primer distribucije koja nije slika neke (lokalno integrabilne) funkcije.

Primer 4. Neka je $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, a ϕ test funkcija. Tada preslikavanje is $\mathcal{D}$ u $\mathbb{R}$

$$S_f : \langle S_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

definiše distribuciju, jer je funkcionela S_f očigledno linearna i važi

$$|\langle S_f, \phi \rangle| \leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\operatorname{supp}\phi} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Ovo znači da ako niz $\{\phi_j\}$ teži nuli, tada i $\langle S_f, \phi_j \rangle \to 0$, kada $j \to \infty$, to jest S_f je distribucija.

Primer 5. Neka je $a \in \Omega$. Izraz

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$$

definiše Dirakovu delta distribuciju u tački a. Ako je $a = 0$, onda pišemo samo δ umesto δ_a.

2.1.1. *Osobine i operacije sa distribucijama.* Sada ćemo navesti neke osobine distribucija, pojmove i operacije sa distribucijama, bez dubljeg ulaženja u suštinu i dokaze.

(1) Za niz distribucija $\{S_j\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ kažemo da *konvergira ka nuli* ako za svaku test funkciju $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi

$$\langle S_j, \phi \rangle \to 0, \text{ kada } j \to \infty.$$

Konvergenciju u prostoru distribucija označavamo sa $\stackrel{\mathcal{D}'}{\to}$. (U teoriji distribucija se ova konvergencija naziva šlaba"). Kako je prostor distribucija vektorski prostor, ovo je dovoljno za definiciju konvergencije na celom prostoru distribucija. Naime $S_j \to T$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ako i samo ako za svaku test funkciju ϕ važi

$$\langle S_j - T, \phi \rangle \to 0, \text{ kada } j \to \infty.$$

(2) Za $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ kažemo da je nula na $\omega \subset \Omega$, ako je

$$\langle S, \phi \rangle = 0$$

za svaku test funkciju ϕ sa nosačem u ω.

Definicija 4. *Nosač distribucije* $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} S$, je komplement najvećeg otvorenog skupa na kome je $S = 0$ (odnosno skup tačaka iz Ω za koje ne postoji otvorena okolina ω na kojoj je $S = 0$).

Definicija 5. Označimo sa $\mathcal{E}(\Omega)$ prostor glatkih funkcija $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ sa konvergencijom definisanom na sledeći način:

Niz $\{\phi_j\}$ konvergira nuli ako i samo ako važi

$$\lim_{j \to 0} \|\partial^\alpha \phi_j\|_{L^\infty(\Omega)} = 0,$$

za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Dual top prostora, $\mathcal{E}'(\Omega)$, ćemo zvati *prostor distribucija sa kompaktnim nosačem.* Svaki element ovog prostora se može identifikovati sa distribucijom (elementom iz $\mathcal{D}'(\Omega)$) koja zaista ima kompaktan nosač prema prethodnoj definiciji.

Primer 6. $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$, jer za svako $x \in \Omega$, $x \neq 0$, postoji okolina te tačke ω koja ne sadrži tačku nula i postoji test funkcija ϕ sa nosačem u ω. To u stvari znači da je

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 0.$$

Definicija 6. *Izvod distribucije S reda $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definišemo sa*

$$\langle \partial^\alpha S, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle S, \partial^\alpha \phi \rangle, \text{ za svako } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Kako je $\partial^\alpha \phi$ takođe u $\mathcal{D}(\Omega)$, vidimo da definicija uvek ima smisla, to jest svaka distribucija ima izvod proizvoljnog reda. Ova činjenica je i razlog korišćenja distribucija u PDJ.

Lema 1. *Operacija diferenciranja je neprekidna u prostoru distribucija.*

Dokaz. Neka niz distribucija $S_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$, $j \to \infty$, što znači da

$$\lim_{j \to \infty} \langle S_j, \phi \rangle \to 0,$$

za svaku test funkciju ϕ. Tada i

$$\lim_{j \to \infty} \langle \partial^\alpha S_j, \phi \rangle = \lim_{j \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle S_j, \partial^\alpha \phi \rangle \to 0,$$

jer je $\partial^\alpha \phi$ takođe test funkcija. □

Primer 7. Lako možemo izračunati svaki izvod delta distribucije,

$$\langle \partial^\alpha \delta, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, \partial^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \phi(0).$$

Ako pogledamo definiciju slabog izvoda za lokalno integrabilne funkcije, odmah vidimo da se on slaže sa izvodom distributivne slike te funkcije. Naime, ako je $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ slabi izvod reda α od $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, tada je $S_g = \partial^\alpha S_f$, gde je S_f (ili S_g) označena distributivna slika od f (ili g).

Primer 8. Definišimo takozvanu Hevisajdovu funkciju

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Kako je H lokalno integrabilna funkcija, možemo je poistovetiti sa distribucijom na $\mathbb{R}$. Pokazaćemo da je njen izvod δ. Neka je ϕ proizvoljna test funkcija na $\mathbb{R}$. Tada

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x) \mathrm{d}x = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Sada vidimo da je u distributivnom smislu

$$|x|'' = 2\delta.$$

(Podsetimo se da slabi izvod $|x|''$ nije postojao.)

Sledeća dva primera ostavljamo za vežbu.

- Pokažite da je drugi distributivni izvod od $|x|$ jednak sa 2δ.

- Definišimo
$$K_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^n/n!, & x > 0. \end{cases}$$
Nađite sve distribucione izvode ove funkcije.

Ako sa $W^k(\Omega)$ označomo prostor lokalno integrabilnih funkcija na Ω koje imaju sve slabe izvode reda zaključno sa k, onda možemo reći da važi
$$\mathcal{C}^k(\Omega) \subset W^k(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$
U ovoj relaciji smo poistovetili funkciju sa njenom slikom.

Ako je $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, tada možemo definisati proizvod distribucije S sa f, $T = Sf$, na sledeći način
$$\langle T, \phi \rangle := \langle S, f\phi \rangle, \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$
Dokazaćemo da je ova definicija dobra. Preslikavanje T je očigledno linearna funkcionela. Takođe se lako vidi (koristeći samo definiciju konvergencije) da $f\phi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$ kada niz $\phi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} 0$. Dovoljno je da primenimo pravilo diferenciranja proizvoda funkcija i da primetimo da je $\operatorname{supp}(f\phi) \subset \operatorname{supp}\phi$.

Na isti način kao i za izvod distribucije, lako se pokazuje da je i operacija množenja glatkom funkcijom neprekidna operacija u prostoru distribucija.

Na žalost, za dobru definisanost proizvoda neke funkcije koja nije glatka i distribucije ne postoji uniformna formula (a pogotovo za proizvod dve distribucije). Ovo je glavna prepreka korišćenju distribucija u nelinearnim problemima.

2.1.2. *Konvolucija distribucija.* Prvo ćemo dati klasičnu definiciju konvolucije. Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Tada definišemo konvoluciju ove dve funkcije sa
$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y, \ x \in \mathbb{R}.$$
Smenom promenljivih odmah vidimo da je $f * g = g * f$. Na osnovu Fubinijeve leme vidimo da je i $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Štaviše,
$$\|f * g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

Sada ćemo dati motiv za definisanje *konvolucije distribucija.* Neka je data proizvoljna funkcija $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tada važi
$$\begin{aligned}
\langle f * g, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\phi(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\phi(z+y)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y \\
&= \langle f(y), \langle g(z), \phi(z+y)\rangle\rangle \\
&= \langle g(y), \langle f(z), \phi(z+y)\rangle\rangle \\
&\quad \text{(jer je } f * g = g * f).
\end{aligned}$$

Definicija 7. Za $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ definišemo konvoluciju distribucija

$$\langle T * S \rangle := \langle T(x), \langle S(y), \phi(x+y) \rangle \rangle, \ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Definicija je dobra, jer $\langle S(y), \phi(x+y) \rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, zbog činjenice da je $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Istim rezonovanjem vidimo da i definicija

$$\langle S * T \rangle := \langle S(x), \langle T(y), \phi(x+y) \rangle \rangle, \ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

ima smisla, jer je $\langle T(y), \phi(x+y) \rangle \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

U sledećoj teoremi su date osnovne osobine konvolucije distribucija. Za dokazivanje nekih delova ove teoreme je potrebno dublje znanje funkcionalne analize i teorije distribucija, pa je nećemo dokazivati. Samo ćemo koristiti trvđenja teoreme.

Teorema 3. *Neka $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ i $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tada važe sledeća tvrđenja*

(a) $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
(b) $T * S = S * T$.
(c) $(T * S) * U = T * (S * U)$.
(d)
$$\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$$
$$(A + B = \{x : \ x = y + z, \ y \in A, \ z \in B\}).$$
(e) $(S * f)(x) = \langle S(y), f(x-y) \rangle \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Posledica 1. *Neka $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Tada je*

$$\partial^\alpha (T * S) = \partial^\alpha T * S = T * \partial^\alpha S.$$

Dokaz. Neka je ϕ proizvoljna test funkcija. Tada važi

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha (T * S), \phi \rangle =& (-1)^{|\alpha|} \langle T * S, \partial^\alpha \phi \rangle \\ =& (-1)^{|\alpha|} \langle T(x), \langle S(y), \partial^\alpha \phi(x+y) \rangle \rangle \\ =& \langle T(x), \langle (-1)^{|\alpha|} S(y), \partial^\alpha \phi(x+y) \rangle \rangle \\ =& \langle T(x), \langle \partial^\alpha S(y), \phi(x+y) \rangle \rangle \\ =& \langle T * \partial^\alpha S, \phi \rangle.\end{aligned}$$

Ovo znači da je $\partial^\alpha (T * S) = T * \partial^\alpha S$. Drugi deo tvrđenja sledi iz (b) kod prethodne teoreme. □

Primer 9. Neka je $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Kako je $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, važi

$$S * \delta = \delta * S = S,$$

jer za svaku test funkciju ϕ važi

$$\begin{aligned}\langle S * \delta, \phi \rangle =& \langle S(x), \langle \delta(y), \phi(x+y) \rangle \rangle \\ =& \langle S(x), \phi(x) \rangle = \langle S, \phi \rangle.\end{aligned}$$

Generalno je

$$S * \partial^\alpha \delta = \partial^\alpha S,$$

jer prema prethodnoj teoremi važi

$$S * \partial^\alpha \delta = \partial^\alpha S * \delta = \partial^\alpha S.$$

Pre uvođenja pojma Furijeove transformacije, definisaćemo novi potprostor prostora distribucija, temperirane distribucije. Razlog za njihovo uvođenje će biti vrlo brzo objašnjen, kada budemo dali definiciju Furijeove transformacije.

Definicija 8. Vektorski prostor brzoopadajućih funkcija je definisan skupom

$$\mathcal{S} = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| = 0, \text{ za svako } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

i konvergencijom koja je opisana na sledeći način. Kažemo da niz $\{\phi_j\}_j \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergira ka nuli u $\mathcal{S}$, $S_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, kada $j \to \infty$, ako važi

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)| = 0, \text{ za svako } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Definicija 9. Vektorski prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zovemo prostor temperiranih (sprororastućih) distribucija i označavamo ga sa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2.1.3. *Furijeova transformacija.* Definišimo prvo klasičnu Furijeovu transformaciju na prostorima $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$ na sledeći način. Neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int f(y) e^{ix\cdot y} \mathrm{d}y \in L^q(\mathbb{R}^n),$$

gde je q određeno iz relacije $1/p+1/q = 1$ (podsetimo se da je $x\cdot y = x_1y_1+...+x_ny_n$). Nadalje ćemo izostavljati simbol $\mathbb{R}^n$ ili Ω kod oznaka za normu, ako je jasno u kom smo osnovnom domenu. Važi sledeće tvrćenje

Teorema 4. (a) *Ako je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tada je $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Ako je $y_j f(y) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \ge 1$, tada postoji $\partial_{x_j}\hat{f}$, $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1/p+1/q = 1$, i važi*

$$\partial_{x_j}\hat{f}(x) = -i(\widehat{y_j f(y)})(x), \; x \in \mathbb{R}^n.$$

(c) *Ako je $\partial_{y_j} f(y) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$, tada je*

$$(\widehat{\partial_{y_j} f(y)})(x) = ix_j \hat{f}(x), \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Za $f \in L^2$, važi još i $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(x))) = (2\pi)^{-n} f(-x)$. Kako je $\mathcal{S} \subset L^2$, ovo tvrđenje važi i za $f \in \mathcal{S}$.

Sledeća teorema se koristi kod definisanja Furijeove transformacije temperiranih distribucija.

Teorema 5. *Neka su $\phi, \psi \in \mathcal{S}$. Tada važi*

- *$\phi \mapsto \hat{\phi}$ je injektivno i neprekidno iz $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$.*
- *$(\widehat{\hat{\phi}})(x) = (2\pi)^{-n}\phi(-x)$.*
- *$(-i\widehat{\partial_{x_j}\phi(x)})(y) = y_j \hat{\phi(x)}(y)$.*
- *$(\widehat{x_j\phi(x)})(y) = i\partial_{y_j}\hat{\phi(x)}(y)$.*
- *$(\widehat{\phi * \psi}) = (2\pi)^{n/2}\hat{\phi}\hat{\psi}$, ako postoji konvolucija $\phi * \psi$.*
- *$\widehat{(\phi\psi)} = (2\pi)^{n/2}\hat{\phi} * \hat{\psi}$, ako postoji konvolucija $\hat{\phi} * \hat{\psi}$.*

Sada možemo definisati Furijeovu transformaciju temperirane distribucije.

Definicija 10. Ako je $S \in \mathcal{S}$, tada definišemo njenu Furijeovu transformaciju $\hat{S}$ sa

$$\langle \hat{S}, \phi \rangle := \langle S, \hat{\phi} \rangle, \text{ za svako } \psi \in \mathcal{S}.$$

Definicija je dobra, jer ako $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, tada $\langle \hat{S}, \hat{\phi_j} \rangle = \langle S, \hat{\phi_j} \rangle \to 0$, zbog (i).

Primer 10. Ako je $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tada imamo

$$\langle \hat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \hat{\phi} \rangle = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i0\cdot x} \phi(x) \mathrm{d}x = (2\pi)^{-n/2} \langle \mathbf{1}, \phi \rangle,$$

odnosno $\hat{\delta} = (2\pi)^{-n/2}\mathbf{1}$.

Na sličan način se može pokazati da je

$$\begin{aligned}
&\langle \widehat{e^{ia\cdot x}}(y), \phi(y) \rangle = \langle e^{ia\cdot x}, \hat{\phi}(x) \rangle = \int e^{ia\cdot x} \hat{\phi}(x) \mathrm{d}x \\
=&(2\pi)^{-n/2} \int \int e^{-ix\cdot (y-a)} \phi(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&\text{(posle smene promenljivih)} \\
=&(2\pi)^{-n/2} \int \int e^{-ix\cdot y} \phi(y+a) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
=&(2\pi)^{-n/2} \langle \mathbf{1}, \widehat{\phi(y+a)} \rangle \\
&\text{(prema prethodnom primeru)} \\
=&\langle \delta, \phi(y+a) \rangle = \langle \delta_a, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Prema tome, $\widehat{e^{ia\cdot x}}(y) = \delta_a(y)$.

Sada ćemo samo formulisati najbitniju teoremu u ovom delu. Svi domeni prostora distribucija su $\mathbb{R}^n$, pa ćemo tu oznaku izbaciti iz teksta do kraja ovog poglavlja.

Teorema 6. *Preslikavanje $S \mapsto \hat{S}$ iz $\mathcal{S}'$ na $\mathcal{S}'$ je injektivno i neprekidno. Takođe važi*

(i) *Ako je $S \in \mathcal{E}'$, $T \in \mathcal{S}'$, tada je $\hat{S} \in \mathcal{C}^\infty$ i $T * S \in \mathcal{S}'$.*
(ii) *Ako je $S \in \mathcal{E}'$, $T \in \mathcal{S}'$, tada je $(\widehat{S * T}) = \hat{S}\hat{T}$ (zbog pretpostavki na S i T, konvolucija uvek postoji).*
(iii) *Ako je P polinom, tada je*

$$(\widehat{P(\partial)u(x)})(\xi) = P(i\xi)\hat{u}(\xi)$$

za svako $u \in \mathcal{S}'$.
(iv) $(\widehat{y_j S(y)})(x) = i\partial_{x_j} \hat{S}(x)$.

Inverzna Furijeova transformacija

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot y} \phi(y) \mathrm{d}y$$

ima iste osobine i važi

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\phi)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi)) = (2\pi)^{-n}\phi.$$

Primedba 4. Primenom Furijeove transformacije je rešen problem postojanja opšteg rešenja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ PDJ sa konstantnim koeficijentima

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha u = f,$$

gde su $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, i $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3. Prostori Soboljeva i primena

3.1. **Prostori Soboljeva.**

3.1.1. *Definicije.* Neka je $m \in \mathbb{N}_0$, $p \geq 1$ i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Označimo sa $W^k(\Omega)$ vektorski prostor lokalno integrabilnih funkcija nad Ω koje poseduju sve slabe izvode zaključno do reda k. Sada ćemo definisati njegove podprostore, koji će imati tu prednost da su normirani (prostori $W^k(\Omega)$ su samo lokalno konveksni, definisani familijom seminormi).

Definicija 11. Prostor Soboljeva $H^{m,p}(\Omega)$ je skup funkcija $u \in W^m(\Omega)$, takvih da za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m$, važi $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Norma u tom skupu je data sa

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p,\Omega} := \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} |\partial^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

Ekvivalentna norma gore pomenutoj je data sa

$$\|u\|'_{H^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

U ostatku teksta ih nećemo razlikovati po oznakama, to jest, za bilo koju od ovih normi ćemo koristiti oznaku $\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$.

U slučaju da je $p = 2$, izostavljaćemo taj broj u gornjem indeksu za Soboljeve prostore ili norme u tim prostorima.

Lako je videti da se prostori Soboljeva mogu posmatrati kao podprostori prostora temperiranih distribucija.

Sada ćemo požnju posvetiti najvažnijem (za nas u ovom tekstu, ali se može reći i generalno, jer se on prirodno javlja u mnogo fizičkih pojava opisanim parcijalnim diferencijalnim jednačinama) prostoru Soboljeva, $H^1(\Omega)$.

Lema 2. *Prostor $H^1(\Omega)$ poseduje unutrašnji proizvod koji je saglasan sa njegovom normom, i dat je sa*

$$\begin{aligned}(u|v) &= \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} u(x)\partial_{x_j} v(x)\mathrm{d}x\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

Dokaz. Norma indukovana datim unutrašnjim proizvodom je

$$\sqrt{(u|u)} = \sqrt{\int_\Omega |u(x)|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x},$$

a ona je identična jednoj od datih normi prostora $H^1(\Omega)$, čime je dokaz završen. □

Lema 3. *$H^1(\Omega)$ je Hilbertov prostor.*

Dokaz. Da bi dokazali ovu lemu, preostalo je da pokažemo da je ovaj prostor kompletan. Uzećemo kao poznatu činjenicu da je $L^2(\Omega)$ kompletan prostor.

Konstruišimo presllikavanje

$$\begin{aligned} F : H^1(\Omega) &\to \big(L^2(\Omega)\big)^{n+1} \\ v &\mapsto (v, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}) = w := (v := w_0, w_1, ..., w_n).\end{aligned}$$

U $\left(L^2(\Omega)\right)^{n+1}$ definišemo normu

$$\|w\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{n} \int_{\Omega} |w_j(x)|^2 \mathrm{d}x},$$

koja je saglasna sa topologijom proizavoda za $\left(L^2(\Omega)\right)^{n+1}$.

F je očigledno izometrija, a specijalno je i linearna bijekcija prostora $H^1(\Omega)$ i $F(H^1(\Omega)) \subset \left(L^2(\Omega)\right)^{n+1}$.

Kako je $L^2(\Omega)$ kompletan kompletan je i prostor $\left(L^2(\Omega)\right)^{n+1}$, tako da za svaki Košijev niz $\{v^{(j)}\} \subset H^1(\Omega)$ postoji $w \in \left(L^2(\Omega)\right)^{n+1}$ takvo da $F(v^{(j)}) \to w$, u $\left(L^2(\Omega)\right)^{n+1}$, kada $j \to \infty$, to jest

$$\begin{aligned}
&v^{(j)} \to w_0, \\
&\partial_{x_k} v^{(j)} \to w_k, \ k = 1, ..., n \ \text{ u } L^2(\Omega), \ j \to \infty.
\end{aligned}$$

Za $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ na osnovu Helderove nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
&|\int_{\Omega} (v^{(j)} - w_0)\phi \mathrm{d}x| \\
\leq &\|v^{(j)} - w_0\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \ j \to \infty,
\end{aligned}$$

jer $v^{(j)} \xrightarrow{L^2} w_0$, što znači da i

$$v^{(j)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} w_0.$$

Analogno zaključujemo da

$$\partial_{x_k} v^{(j)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} w_k.$$

Na osnovu neprekidnosti izvoda u prostoru distribucija, zaključujemo da

$$\partial_{x_k} v^{(j)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial_{x_k} w_0,$$

to jest

$$w_k = \partial_{x_k} w_0, \ k = 1, ..., n.$$

Ovo znači da je $w = F(w_0)$, i kako je F izometrija, imamo tvrđenje da je $H^1(\Omega)$ kompletan. □

Na sličan način se dokazuje i sledeća teorema.

Teorema 7. *Za svako $m \in \mathbb{N}_0$, prosrot $H^m(\Omega)$ je Hilbertov.*

Ako je $p \geq 1$, prostor $H^{m,p}(\Omega)$ je Banahov.

Sada smo u prilici da iskoristimo činjenicu da Furijeova transformacija preslikava L^2 na L^2 kao i osobine Furijeove transformacije.

Teorema 8. *Označimo sa $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + \xi^2}$. Tada je norma od u u $H^m(\mathbb{R}^n)$ ekvivalentna sa*

$$\|\langle \xi \rangle^m \hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Drugim rečima, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pripada prostoru $H^m(\mathbb{R}^n)$ ako je

$$\|\langle \xi \rangle^m \hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Sledeći prostori su bitni za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina, jer daju smisao zadovoljavanja graničnih uslova u slabom slislu.

Definicija 12. Prostor $H_0^{m,p}(\Omega)$ je zatvaranje skupa $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ u normi prostora $H^{m,p}(\Omega)$: Činjenica da $v \in H_0^{m,p}(\Omega)$, u stvari znači da postoji niz $\{\phi_j\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ takav da

$$\phi_j \overset{H^{m,p}}{\to} v, \; j \to \infty.$$

Granični uslov $u|_{\partial\Omega} = 0$, $u \in H^{m,p}(\Omega)$ u slabom smislu sada jednostavno znači da je $u \in H_0^{m,p}(\Omega)$. Ako je i $v \in H^{m,p}(\Omega)$, tada je $u = v$ na $\partial\Omega$ ako i samo ako je $u - v \in H_0^{m,p}(\Omega)$.

Naravno, funkcija može biti i nenula na granici, ali opet da bude jednaka nuli u slabom smislu.

Inače, neki autori uvode *funkciju traga*, $\mathrm{Sp} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, tako da je $\mathrm{Sp}(u) = 0$, ako $u \in H_0^{m,p}(\Omega)$. No, to nije jednostavna procedura i nije neophodno da se koristi ako je granica đovoljno glatka”, što ćemo mi stalno pretpostavljati.

3.1.2. *Teoreme ulaganja.* U ovom delu ćemo samo navesti samo neke od vrlo bitnih teorema ulaganja prostora Soboljeva koje su neophodne za ozbiljniji rad u oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina.

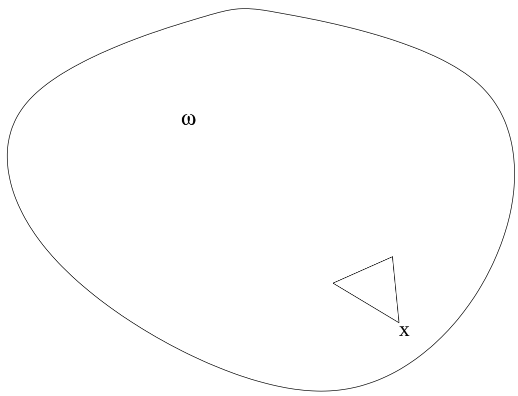
Definicija 13. Kažemo da je Banahov prostor B_1 *neprekidno uložen* u Banahov prostor B_2, $B_1 \to B_2$ ako postoji ograničeno linearno injektivno preslikavanje iz B_1 u B_2.

Teorema 9. *Za otvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ važi*

$$H^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \; mp > n, \; p \le q \le \infty$$
$$H^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \; mp = n, \; p \le q < \infty$$
$$H^{m,p}(\Omega) \to \mathcal{C}_b^0(\Omega), \; mp > n$$

Teorema 10. *Neka je Ω ograničena i ima konusnu osobinu: Za svako $x \in \Omega$ postoji konus visine h sa vrhom u x koji leži u Ω. Tada važi*

$$H^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \; p \le q \le np/(n - mp)$$
$$H^{m+j,1}(\Omega) \to \mathcal{C}_b^j(\Omega), \; mp > n$$



Sl. 3. Oblast sa konusnom okolinom

4. Slabo rešenje Dirihleovog problema za eliptičnu jednačinu

U ovoj glavi ćemo se baviti rešavanjem Dirihleovog (I granični problem) za Laplasovu jednačinu, no isti metodi se mogu primeniti na bilo koju strogo eliptičnu linearnu jednačinu drugog reda.

Lema 4. *(Poenkare) Neka je Ω otvoren i ograničen u pravcu jedne od osa, podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da je*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x\Big)^{1/2} \tag{9}$$

za svako $v \in H_0^1(\Omega)$.

Dokaz. Možemo smatrati da je Ω ograničen u pravcu x_1-ose, bez smanjenja opštosti. Tada postoje konstante $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takve da je

$$\Omega \subset \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n :\ \alpha \leq x_1 \leq \beta\}.$$

Neka je $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Tada je

$$\phi(x) = \int_\alpha^{x_1} \partial_{x_1}\phi(\xi, x')\mathrm{d}\xi,\ x' = (x_2, ..., x_n).$$

Iz Helderove nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
|\phi(x)| \leq & \Big(\int_\alpha^{x_1} 1^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}\Big(\int_\alpha^{x_1} |\partial_{x_1}\phi(\xi, x')|^2\mathrm{d}\xi\Big)^{1/2} \\
= & \sqrt{x_1 - \alpha}\Big(\int_\alpha^{x_1} |\partial_{x_1}\phi(\xi, x')|^2\mathrm{d}\xi\Big)^{1/2} \\
\leq & \sqrt{\beta - \alpha}\Big(\int_\alpha^{\beta} |\partial_{x_1}\phi(\xi, x')|^2\mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

Prema tome je

$$\begin{aligned}
& \int\int_{(x_1,x')\in\Omega} |\phi(x_1, x')|^2 \mathrm{dx'dx_1} \\
\leq & \int\int_{(x_1,x')\in\Omega} (\beta - \alpha)\int_\alpha^\beta |\partial_{x_1}\phi(\xi, x')|^2 \mathrm{d}\xi\mathrm{dx_1dx'} \\
\leq & (\beta - \alpha)^2 \int\int_\Omega |\partial_{x_1}\phi(\xi, x')|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{dx'}
\end{aligned}$$

Odavde je

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq (\beta - \alpha)\Big(\int_\Omega |\nabla\phi(x)|^2 \mathrm{d}x\Big)^{1/2}. \tag{10}$$

Kako, po definiciji, za svako $v \in H_0^1(\Omega)$ postoji niz $\{\phi_j\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\phi_j \overset{H^1}{\to} v$, kada $j \to \infty$, primenivši graničnu vrednost na nejednakost (10), kada $j \to \infty$, dobijamo da (10) važi za proizvoljno $v \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Teorema 11. *Neka je $\lambda \geq 0$ i neka je Ω otvoren skup, ograničen po jednoj promenljivoj (u pravcu neke od koordinatnih osa). Tada je*

$$a_\lambda(u, v) = \lambda\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x$$

unutrašnji proizvod ekvivalentan sa ranije definisanim $(u|v)$ u $H_0^1(\Omega)$ (to jest, definišu istu normu).

Dokaz. Treba da pokažemo da postoje pozitivne konstante C_1 i C_2, takve da je

$$C_1\|u\|_{H^1}^2 \leq \underbrace{a_\lambda(u, u)}_{\text{kvadrat norme indukovane sa } a_\lambda} \leq C_2\|u\|_{H^1}^2.$$

Za $\lambda > 0$ možemo uzeti

$$\min\{1,\lambda\}\|u\|_{H^1}^2 \le a_\lambda(u,u) \le \max\{1,\lambda\}\|u\|_{H^1}^2.$$

Za $\lambda = 0$, na osnovu leme 4, imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+C^2}\|u\|_{H^1}^2 =& \frac{1}{1+C^2}\Big(\|u\|_{L^2}^2 + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x\\ \le& \frac{1}{1+C^2}\Big(C^2\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x\\ & \text{gde je konstanta } C \text{ iz nejednakosti (9)}\\ \le& \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x = a_0(u,u) \le \|u\|_{H^1}^2\end{aligned}$$

□

Sledeća teorema je u funkcionalnoj analizi poznata kao Teorema Risa. Ovde ćemo je samo navesti, bez dokaza, koji se inače nalazi u standardnom kursu funkcionalne analize.

Teorema 12. *(Ris) Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor sa unutrašnjim proizvodom $a(\cdot,\cdot)$. Neka je $F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) linearno i neprekidno preslikavanje. Tada postoji jedinstveno $u \in \mathcal{H}$ takvo da je*

$$a(u,v) = F(v),$$

za svako $v \in \mathcal{H}$.

Sada ćemo navesti glavnu teoremu ove glave, koju je sada lako dokazati posle pređašnjih tvrđenja.

Teorema 13. *Neka je $\lambda \ge 0$ i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$, ograničen po jednoj promenljivoj. Tada za svako $f \in L^2(\Omega)$ postoji $u \in H_0^1(\Omega)$ takvo da je*

$$\begin{aligned}&\lambda\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x,\ \textit{za svako } v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{11}$$

Ovo znači da je ovako nađeno u slabo rešenje (rešenje u $\mathcal{D}'$) Dirihleovog problema

$$\begin{aligned}(\lambda - \triangle)u &= f\\ u|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}$$

Dokaz. $H_0^1(\Omega)$, sa $a_\lambda(\cdot,\cdot)$ definisano u teoremi 11, je Hilbertov prostor, a preslikavanje

$$\begin{aligned}F : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R}\\ v &\mapsto \inf_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

je linearno i neprekidno. Pokažimo to. Iz činjenice da

$$v_j \overset{H^1}{\to} v$$

odmah sledi

$$\|v_j - v\|_{L^2(\Omega)} \to 0,\ \text{kada } j \to \infty.$$

Na osnovu Helderove nejednakosti imamo

$$|\int_\Omega (f(x)v_j(x) - f(x)v(x))\mathrm{d}x| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v_j - v\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

kada $j \to \infty$. Na osnovu Risove teoreme, postoji $u \in H_0^1(\Omega)$ takvo da je

$$a_\lambda(u,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x, \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega).$$

U ovom slučaju, imamo

$$\lambda\langle u,\phi\rangle + \sum_{k=1}^n \langle \partial_{x_k} u, \partial_{x_k}\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle$$

u $\mathcal{D}'(\Omega)$, jer gornja jednakost važi za svako $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. Ovo znači da je

$$\lambda\langle u,\phi\rangle - \sum_{k=1}^n \langle u, \partial_{x_k}^2\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle$$

to jest, u je distributivno rešenje jednačine

$$\lambda u - \triangle u = f. \square$$

Ako početni uslov nije nula, već neka funkcija $g \in H_1(\Omega)$, tada konstruišemo slabo rešenje $w = u - g$ za homogeni problem kao u prethodnoj teoremi, samo je

$$\int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

u (11) zamenjeno sa

$$\int_\Omega (f(x) + \lambda g(x) + \nabla g(x))\mathrm{d}x.$$

Pojmovi koje smo ovde koristili se mogu koristiti i na širu klasu parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Definicija 14. Linearni diferencijalni operator L koji je zapisan u obliku

$$\begin{aligned} Lu = &\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_j}u + b_j(x)u\Big) \\ &+ \sum_{i=1}^n c_i(x)\partial_{x_i}u + d(x)u \end{aligned} \tag{12}$$

zavemo operatorom zapisanim u *divergentnom obliku.*

Operator opšteg oblika možemo zapisati u ovom obliku ako su njegovi koeficijenti dovoljno puta diferencijabilni. Obrnuto, ako su a_{ij}, b_i, $i,j = 1,...,n$ diferencijabilni, divergentni oblik možemo prevesti u uobičajeni. No, divergentni oblik je baš pogodan za definiciju slabog rešenja, kao što smo to i pre napomenuli.

Definicija 15. Kažemo da $u \in H^1(\Omega)$ u *slabom smislu* zadovoljava jednačinu

$$Lu = 0$$

ako je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_j} u(x) + b_j(x)u(x)\Big)\partial_{x_i} v(x) \\ - \Big(\sum_{i=1}^n c_i(x)\partial_{x_i} u(x) + d(x)u(x)\Big) v(x)\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

za svako $v \in \mathcal{C}_0^1$ (nekad koristimo i $v \in H_0^1(\Omega)$).

Neka su g, f_i, $i = 1, ..., n$ lokalno integrabilne funkcije u Ω. Tada se $u \in H^1(\Omega)$ zove *slabo rešenje nehomogene jednačine*

$$Lu = g + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i \text{ u } \Omega$$

ako važi

$$\mathcal{L}(u,v) = F(v) := \int_\Omega \Big(- g(x)v(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x)\partial_{x_i} v(x)\Big)\mathrm{d}x$$

za svako $v \in \mathcal{C}_0^1$ ($v \in H_0^1(\Omega)$).

Kao što smo već rekli za Laplasovu jednačinu, granični uslov

$$u|_{\partial\Omega} = h|_{\partial\Omega}$$

zamenjujemo sa

$$u - h \in H_0^1(\Omega).$$

Definicija 16. Operator L iz (12) je strogo eliptičan u Ω, ako su mu koeficijenti ograničeni u Ω i ako važi

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2,$$

za svako $x \in \Omega$ i svako $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Dirihleovog problem za eliptičnu PDJ je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 14. *Neka su $a_{ij}, b_i, c_i, d, f_i, g$ kao i gore i $h \in H^1(\Omega)$. Tada, ako je $d(x) \leq 0$, jednačina*

$$Lu = g + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i \text{ u } \Omega \text{ i } u = h \text{ na } \partial\Omega$$

ima jedinstveno rešenje u $H^1(\Omega)$.

5. Linearna talasna jednačina

5.1. **Postojanje rešenja.**

Posmatramp sada Košijev problem za n-dimenzionalnu talasnu jednačinu

$$\begin{aligned}&u_{tt} - \triangle u = g(x,t)\\ &u|_{t=0} = a(x),\ u_t|_{t=0} = b(x)\\ &a \in H^2(\mathbb{R}^n),\ b \in H^1(\mathbb{R}^n),\ g(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^n),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{13}$$

Za rešavanje ovog problema ćemo upotrebiti Furijeovu transformaciju po promenljivoj x.

Teorema 15. *Pod gornjim uslovima postoji rešenje $u \in \mathcal{C}^2((0,T) : H^2(\mathbb{R}^n))$ Košijevog problema (13) za svako $T > 0$. Rešenje je definisano svojom Furijeovom transformacijom*

$$\begin{aligned}\hat{u}(y,t) =& \cos(|y|t)\hat{a}(y) + \frac{\sin(|y|t)}{|y|}\hat{b}(y)\\ &+ \int_0^t \frac{\sin(|y|(t-s))}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s \in L^2(\mathbb{R}^n).\end{aligned} \tag{14}$$

Proof. Primenimo Furijeovu transformaciju $\mathcal{F}_{x\mapsto y}$ na PDJ i početne uslove (13). Nova promenljiva $y = (y_1, ..., y_n)$ će tada biti n-dimenzionalni parametar obične diferencijalne jednačine po t

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\hat{u}(y,t) + |y|^2\hat{u}(y,t) = \hat{g}(y,t)\\ &\hat{u}(y,0) = \hat{a}(y),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(y,0) = \hat{b}(y).\end{aligned}$$

Rešenje homogenog dela ove jednačine je dato sa

$$\hat{u}_h(y,t) = C_1\sin(|y|t) + C_2\cos(|y|t).$$

Za nehomogeni deo, varijacija konstanti daje

$$\begin{aligned}C_1(y,t) &= -\int_0^t \frac{\sin(|y|s)}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s,\\ C_2(y,t) &= \int_0^t \frac{\cos(|y|s)}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

što nam daje

$$\begin{aligned}\hat{u}_p(y,t) &= \int_0^t \frac{\cos(|y|s)\cos(|y|t) - \sin(|y|s)\sin(|y|t)}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t \frac{\sin(|y|(t-s))}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Zamenom početnih uslova dobijamo

$$C_2(y,t) = \hat{a}(y),\ C_1(y,t) = \frac{\hat{b}(y)}{|y|},$$

i formula (14) je dokazana.

Kako su funkcije $\cos(|y|t)$ i $|y|^{-1}\sin(|y|t)$ ograničene za svako t, a $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{g}$ su u L^2, Helderova nejednakost povlači da je $\hat{u}$ takođe u L^2.

Ostaje da dokažemo da je $\hat{u}$ u H^2. Za to će biti dovoljno pokazati da je $|y|^j\hat{u}$, $j=1,2$, u L^2 za svako t. Pomnoživši (14) sa $|y|^2$, dobijamo

$$\begin{aligned}|y|^2\hat{u}(y,t) =& \cos(|y|t)|y|^2\hat{a}(y)+\sin(|y|t)|y|\hat{b}(y)\\ &+\int_0^t \sin(|y|(t-s))|y|\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Sada koristimo činjenice da su funkcije $|y|^2\hat{a}(y)$, $|y|\hat{b}(y)$ i $|y|\hat{g}(y,t)$ u L^2 (jer je $a\in H^2$, $b,g\in H^1$) za svako t, tako da Helderova nejednakost povlači da je i $|y|^2\hat{u}(y,t)$ u L^2. Očigledno je da množenjem sa $|y|$ dobijamo isto funkciju u L^2. Ovim je teorema dokazana. □

Primedba 5. Za Klein-Gordon-ovu jednačinu

$$u_{tt}-\triangle u+m^2u=g(x,t)$$

važi slično tvrđenje, samo umesto $|y|$ na svim mestima imamo $\sqrt{m^2+|y|^2}$. Dokaz ovog tvrđenja se ostavlja čitaocima za vežbu.

5.2. **Jedinstvenost rešenja.** U sledećoj teoremi koristimo metod *integrala energije*, specifičan za hiperbolične jednačine i sisteme.

Teorema 16. *Posmatrajmo Košijev problem za višedimenzionalnu talasnu jednačinu*

$$\begin{aligned}&u_{tt}-\triangle u=0\\ &u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0.\end{aligned}\tag{15}$$

Jedino rešenje $u\in\mathcal{C}^2((0,T):H^2(\mathbb{R}^n))$ ovog problema je trivijalno, $u\equiv 0$.

Proof. Pomnožimo jednačinu u (15) sa u_t i integralimo po x. Tada za svako t dobijamo

$$\begin{aligned}0=&\int u_{tt}(x,t)u_t(x,t)-\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x\\ &\text{(posle parcijalne integracije)}\\ =&\int \frac{1}{2}(u_t(x,t)^2)_t+\sum_{i=1}^n u_{x_i}(x,t)u_{x_it}(x,t)\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{2}\int (u_t(x,t)^2)_t+\sum_{i=1}^n (u_{x_i}(x,t)^2)_t\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{2}\int (u_t(x,t)^2)_t+((\nabla u(x,t))^2)_t\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ako definišemo integral energije za talasnu jednačinu

$$E(t):=\frac{1}{2}\int (u_t(x,t))_t^2+(\nabla u(x,t))_t^2\mathrm{d}x,$$

na osnovu prethodnog računa vidimo da je E konstantna funkcija. Kako je na osnovu homogenih početnih uslova $E(0)=0$, sledi da je i $E(t)\equiv 0$. To znači da je u konstantna funkcija, to jest identički jednaka nuli. □

Posledica 2. *Rešenje $u\in\mathcal{C}^2((0,T):H^2(\mathbb{R}^n))$ Košijevog problema (13) je jedinstveno.*

Dokaz ovog tvrđenja jednostavno sledi iz prethodne teoreme. Dovoljno je da pretpostavimo da postoje bar dva rešenja u i v problema (13). Tada funkcija $w := u - v$ zadovoljava homogenu jednačinu, i prema gornjoj teoremi, identički je jednaka nuli, tj. $u \equiv v$.

Primedba 6. Na sličan način se može dokazati jedinstvenost rešenja Klein-Gordonove jednačine, i to se ostavlja čitaocima za vežbu.

Literatura

[1] M. Oberguggenberger, Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations, Pitman Res. Not. Math. 259, Longman Sci. Techn., Essex,
[2] M. Oberguggenberger, Lecture notes for PDE courses in Innsbruck, Lyon and Pretoria.
[3] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, (Second Edition), Springer, New York, 1994.
[4] G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons, New York, 1974.