Parcijalne diferencijalne jednačine

Marko Nedeljkov

Sadržaj

Glava 1
Klasifikacija PDJ

1.1 Klasifikacija evolucionih sistema

Neka je dat sledeći sistem kvazilinearnih PDJ

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i = 0, \; i = 1, ..., n, \tag{1.1}$$

gde su $u = u(x,t)$, $a_{ij} = a_{ij}(x,t,u(x,t))$, $b_i = b_i(x,t,u(x,t))$. Napravimo njihovu linearnu kombinaciju

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Hoćemo da pronadjemo krive $x = x(t)$, $t = t$, na kojima gornja linearna kombinacija ima oblik

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\mathrm{d}\, u_i}{\mathrm{d}\, t} + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Ove krive zovemo *karakteristike sistema* (1.1). Da bi ovo moglo biti tačno, mora da važi

$$\sum_{j=1}^{n} l_j a_{ji} = l_i \cdot x', \; i = 1, ..., n,$$

jer je $\frac{\partial u_i}{\partial x} x' = \frac{\partial u_i}{\partial t}$, $i = 1, ..., n$. Ako sa A označimo matricu $[a_{ij}]_{i=1,...,n, j=1,...,n}$, tada je x' njen karakteristični koren, a $(l_1, ..., l_n)$ je njen karakteristični vektor.

Definicija 1.1. *Sistem (1.1) je* strogo hiperboličan*, ako postoje n različitih realnih karakterističnih korena matrice A. Sistem je* hiperboličan *ako su svi karakteristični koreni realni i postoji n linearno nezavisnih karakterističnih korena. Sistem je* slabo hiperboličan *ako su mu svi karakteristični koreni realni. Ako nema realnih korena, sistem je eliptičan.*

Primetimo da postoje realni izgledi da makar lokalno rešimo početni problem za sistem (1.1), ako je on bar hiperboličan (naravno, ovo ne znači da ostali sistemi ne poseduju lokalno rešenje, samo ga nije moguće tražiti na uobičajen način — metodom karakteristika).

Primer 1.2. (a) PDJ $u_{tt} - \gamma u_{xx} = 0$ smenom $v = u_x$, $w = u_t$ prelazi u sistem

$$\begin{aligned} &v_t - w_x = 0 \\ &w_t - \gamma v_x = 0, \end{aligned}$$

koji je strogo hiperboličan za $\gamma > 0$, slabo hiperboličan za $\gamma = 0$ i eliptičan za $\gamma < 0$.

(b) Linearna Klein-Gordon-ova PDJ

$$u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} + u = 0$$

smenom $v = u_t + \gamma u_x$ prelazi u sistem

$$\begin{aligned} &v_t - \gamma v_x + u = 0 \\ &u_t + \gamma u_x - v = 0, \end{aligned}$$

koji je strogo hiperboličan. Primetimo da "prirodna" smena: $u_t = w$, $v = u_x$ daje sistem

$$\begin{aligned} &u_t - w = 0 \\ &v_t - w_x = 0 \\ &w_t - \gamma^2 v_x + u = 0, \end{aligned}$$

koji je u stvari ekvivalentan (za rešenja klase C^2) sa jednačinom

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} + u\big) = 0.$$

(c) Jednačina provodjenja toplote, $u_t - a^2 u_{xx} = 0$, prelazi u slabo hiperboličan sistem, ali je sada evolucion parametar x umesto vremena t.

1.2 Klasifikacija PDJ drugog reda

Posmatrajmo kvazilinearnu PDJ sa sve promenljive

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = d, \tag{1.2}$$

gde a, b, c i d zavise od x, y, u i njenih prvih izvoda. Hoćemo da vidimo kada u okolini neke krive

$$\omega\colon x = f(s),\ y = g(s)$$

možemo naći rešenje gornje jednačine za početne uslove na ω:

$$u = h(s), u_x = r(s), u_y = t(s).$$

Primetimo prvo da je jedan od gornjih početnih uslova odredjen ostalima, jer je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

što znači da je

$$h'(s) = r(s)f'(s) + t(s)g'(s).$$

Za druge izvode na ω imamo:

$$r''(s) = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}s} = u_{xx}f'(s) + u_{xy}g'(s)$$
$$t''(s) = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}s} = u_{xy}f'(s) + u_{yy}g'(s).$$

Rešenje po drugim izvodima od u na ω (i nekoj okolini neke tačke na njoj) iz gornje dve jednačine i PDJ (1.2) uvek postoji (i jedinstveno je) ako je

$$D_S = \begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = a g'^2 - 2b f' g' + c f'^2 \neq 0.$$

Tačku na ω zovemo *karakterističnom* ako je za nju $D_S = 0$. Ako predjemo na ODJ zamenom $g' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ i $f' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ dobijamo jednačinu karakteristika

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} =: \lambda \tag{1.3}$$

(ako je $a = 0$, onda jednačinu dobijamo izražavanjem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

Definicija 1.3. *Ako je $b^2 - ac < 0$, jednačina (1.2) je* eliptična, *ako je $b^2 - ac = 0$, jednačina je* parabolična, *a ako je $b^2 - ac > 0$, data jednačina je* hiperbolična.

Primetimo da u slučaju da kriva ω nije data eksplicitno, već sa $w(x, y) = 0$, jednačina karakteristike je data sa

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \lambda \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = 0.$$

Predjimo sada na višedimenzionalni slučaj. Radi jednostavnosti ćemo posmatrati samo slučaj linearne jednačine.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0, \tag{1.4}$$

gde će se podrazumevati da je $[a_{ij}]$ simetrična matrica (u slučaju da je traženo rešenje klase C^2, to nije ograničenje, jer je $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$). Posmatramo neku nesingularnu smenu promenljivih $y = y(x)$ (Jakobijan preslikavanja $x \to y$ nije nula, $|D_x y| \neq 0$). Ako iskoristimo oznaku

$$\tilde{a}_{lk} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j},$$

i kompletno predjemo na promenljivu y, jednačina (1.4) prelazi u

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{lk}(y) u_{y_l y_k} + \tilde{\Phi}(y, u, u_{y_1}, ..., u_{y_n}) = 0.$$

Koristimo oznake $A = [a_{ij}]$ i $\tilde{A} = [a_{ij}]$. Kako je A simetrična matrica, ima realne karakteristične vrednosti i važi da je $\tilde{A} = JAJ^*$, gde je J^* Jakobijan $D_x y$. Ovo možemo posmatrati i kao problem svodjenja kvadratne forme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i p_j \text{ na kvadratnu formu } \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{lk}q_l q_k.$$

Cilj nam je da dobijemo kvadratnu formu oblika

$$\sum_{l=1}^{r} q_l^2 - \sum_{l=r+1}^{m} q_l^2, m \leqslant n.$$

Ovo nam daje kriterijume za definisanje tipova jednačina.

Definicija 1.4. *Ako je*

a) $m = n$ *i* $r = m$ *ili* $r = 0$*, jednačina (1.4) je eliptična.*

b) $m = n$ *i* $1 \leqslant r \leqslant n-1$*, jednačina je ultrahiperbolična. Ako je* $r = 1$ *ili* $r = n-1$*, jednačina je hiperbolična.*

c) $m < n$*, jednačina je ultraparabolična. Ako je* $m = n-1$ *ili* $r = 1$ *ili* $r = n-1$*, jednačina je parabolična.*

1.2.1 Kanoničke forme za PDJ sa dve nezavisne promenljive

Sada ćemo svesti PDJ (1.2) na jednostavniji oblik, takozvani kanonički, koristeći ODJ za karakteristike koju smo izveli ranije. Kao što se moglo i očekivati, posmatraćemo tri različita slučaja.

– Hiperbolična PDJ. Postoje dve realne vrednosti $\lambda_{1,2}$ desne strane od (1.3). Neka su $\xi(x, y) = c_1$ i $\eta(x, y) = c_2$ rešenja ODJ (1.3) takva da je $\xi_y \neq 0$ i $\eta_y \neq 0$. Tada je Jakobijan

$$|D_{(x,y)}(\xi, \eta)| = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}\xi_y \eta_y \neq 0,$$

pa je smena promenljivih $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ nesingularna. Jednostavnim uvrštavanjem ove smene dobijamo kanonički oblik

$$u_{\xi\eta} = \tilde{\phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

– Parabolična PDJ. Imamo samo jedno λ i samo jedno rešenje od (1.3), dato sa $\xi(x, y) = c_1$, $\xi_y \neq 0$ (ili $\xi_x \neq 0$, pa u tom slučaju menjamo uloge promenljivih x i y u daljem tekstu). Drugu promenljivu biramo proizvoljno, recimo $\eta = x$, pa kako važi

$$|D_{(x,y)}(\xi, \eta)| = -\xi_y \neq 0,$$

smena promenljivih je nesingularna. Diretnim izračunavanjem dobijamo kanonički oblik

$$u_{\xi\xi} = \tilde{\phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \text{ ili } u_{\eta\eta} = \tilde{\phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

– Eliptična PDJ. Sada nemamo realnih vrednosti λ, pa postupamo na malo drugačiji način. Neka su λ_1 i λ_2 kompleksnoznačna rešenja od (1.3). Neka je ω kompleksnoznačno rešenje sledeće PDJ

$$\omega_x + \lambda_1 \omega_y = 0,$$

takvo da je $\omega_y \neq 0$. Definišimo funkcije

$$\xi = \frac{\omega + \bar{\omega}}{2} \text{ i } \eta = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2}.$$

(Primetimo da funkcija $\bar{\omega}$ zadovoljava $\bar{\omega}_x + \lambda_1 \bar{\omega}_y = 0$.) Dalje imamo

$$|D_{(x,y)}(\xi, \eta)| = |D_{(\omega,\bar{\omega})}(\xi, \eta)| \cdot |D_{(x,y)}(\omega, \bar{\omega})| = \frac{-\sqrt{b^2 - ac}}{ia} \omega_y \bar{\omega}_y \neq 0,$$

tako da je smena promenljivih $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ nesingularna. Jednostavnim uvrštavanjem ove smene dobijamo kanonički oblik

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \tilde{\phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

1.3 Karakteristične mnogostrukosti i početni problemi

Neka je dat linearni parcijalni diferencijalni operator (PDO u daljem tekstu)

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D^\alpha + \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha(x) D^\alpha + a(x),$$

gde je $x = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$, $|\alpha| = \alpha_0 + ... + \alpha_n$, $D_i = \partial/\partial x_i$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $x^\alpha = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$. Izraz $\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D^\alpha$ zovemo glavnim delom PDO $P(x, D)$.

Posmatrajmo sada jednačinu

$$P(x, D) u = 0 \tag{1.5}$$

u okolini glatke n-dimenzionalne mnogostrukosti $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: f(x) = 0\}$, $f \in C^\infty$. Dat početni problem za (1.5) će značiti da su svi izvodi funkcije u do reda manjeg od m na S poznati, i da je potrebno naći rešenje date jednačine u nekoj okolni od S.

Menjaćemo koordinatni sistem u okolini U bilo koje tačke na S na sledeći način. Nove promenljive ćemo označiti sa $\xi = (\xi_0, ..., \xi_n)$, a izabraćemo ih tako da je $\xi_0 = f(x)$ i to jest $U \cap S = \{(0, \xi_1, ..., \xi_n): \xi_1, ... \xi_n \in \mathbb{R}\}$. Primetimo da je ova procedura u opštem slučaju moguća samo u okolini neke tačke na mnogostrukosti S, a ne na celoj mnogostrukosti uniformo.

Na primer, ako imamo datu 1-dim talasnu jednačinu: $u_{tt} - u_{xx} = 0$ i $S = \{(x, t): x = t\}$, možemo definisati novi koordinatni sistem sa promenljivima $\xi_0 = x - t$, $\xi_1 = x + t$.

Prvo primetimo da kako su $(0,1,0,....,0),....,(0,....,0,1)$ vektori koje generišu S i kako znamo vrednosti funkcije u na S, poznati su nam i svi izvodi po ovim pravcima od u na S (na primer, prvi izvod po ξ_1 možemo uvek izračunati, $\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{u(0,\xi_1+h,\xi_2,...,\xi_n)-u(0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)}{h}$, a kako su $(0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ i $(0,\xi_1+h,\xi_2,...,\xi_n)\in S$ gornja granica je odredjena.) Takodje, svi izvodi reda α, gde je $\alpha_0<m$ su poznati zbog zadatih početnih uslova.

Koristeći pravilo za izvode složene funkcije, za $|\alpha|=m$ dobijamo

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_0^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^m u}{\partial \xi_0^m}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0}...\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} + R_1,$$

gde R_1 sadrži sve članove čije vrednosti na S znamo. Sada PDJ (1.5) postaje

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\frac{\partial^m u}{\partial \xi_0^m}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0}...\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} + R_2,$$

gde R_2 opet označava poznate vrednosti na S. Sada se lako vidi da ako želimo da je vrednost od $\partial^m u/\partial\xi_0^m$ jedinstveno odredjena na S, potrebno je i dovoljno da

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0}...\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \neq 0,$$

ili ekvivalentno

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(\nabla f(x))^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0}...\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \neq 0,$$

za svako $x\in S$.

Ako je gornji izraz jednak nuli oko neke tačke x to znači da (u opštem slučaju) nema smisla tražiti rešenje pošetnog problema oko te tačke. Ako je S sastavljena od samo takvih tačaka, onda je zovemo karakteristična mnogostrukost:

Definicija 1.5. *Mnogostrukost $S=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\colon g(x)=0\}$ je karakteristična u tački $A\in S$ za operator $P(x,D)$ ako i samo ako je*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(\nabla g(x))^\alpha|_{x=A}=0.$$

S je karaktristična mnogostrukost ako je karakteristična u svakoj svojoj tački.

Primetimo da je $\partial g/\partial x_i = \nu_i$ i-ta komponenta jedinične normale na S (jednaka je cos-u ugla koji normala zaklapa sa x_i-osom).

Glava 2
Hiperbolične PDJ drugog reda

2.1 Jednodimenzionalna talasna jednačina

2.1.1 Košijev problem

U ovoj glavi ćemo posmatrati samo klasična rešenja u prostoru C^m, gde je m red PDJ koju rešavamo.

Data je homogena talasna jednačina

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, c > 0.$$

Smenom promenljivih $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ se svodi na $u_{\xi\eta} = 0$, čije je rešenje dato sa

$$u = p(\xi) + q(\eta) = p(x+ct) + q(x-ct),$$

gde se $p, q \in C^2$ proizvoljne funkcije.

Teorema 2.1. *Neka su date funkcije $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$. Tada Košijev problem*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u|_{t=0} &= f(x) \\ u_t|_{t=0} &= g(x) \end{aligned}$$

ima jedinstveno klasično rešenje dato D'Alambert-ovom formulom

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\mathrm{d}y.$$

Dokaz. Kao što smo malo pre videli, opšte rešenje homogene talasne jednačine je dato sa

$$u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct). \tag{2.1}$$

Sada ronalazimo odgovarajuće funkcije p i q tako da početni uslovi budu zadovoljeni. Zamenjujući prvi početni uslov dobijamo

$$p(x) + q(x) = f(x). \tag{2.2}$$

Koristeći smene $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ dobijamo da za $t = 0$ važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = &\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)|_{t=0} \\ = &\ cp'(x) - cq'(x) = g(x). \end{aligned}$$

Diferenciranjem jednakosti (2.2) dobijamo

$$p'(x) + q'(x) = f'(x),$$

pa iz ove dve jednačine dobijamo

$$p' = \frac{cf' + g}{2c}, q' = \frac{cf' - g}{2c},$$

odnosno

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(y)\mathrm{d}y \right) + c_1$$
$$q(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(y)\mathrm{d}y \right) + c_2,$$

a iz (2.1) imamo

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\mathrm{d}y,$$

jer koristeći $u(x,0) = f(x)$ dobijamo $c_1 + c_2 = 0$.

□

Primetimo da ako je $\|f - f_1\|_{L^\infty} < \varepsilon$ i $\|g - g_1\|_{L^\infty} < \varepsilon$, tada ako sa v označimo rešenje početnog problema sa f_1 umesto f i g_1 umesto g, imamo

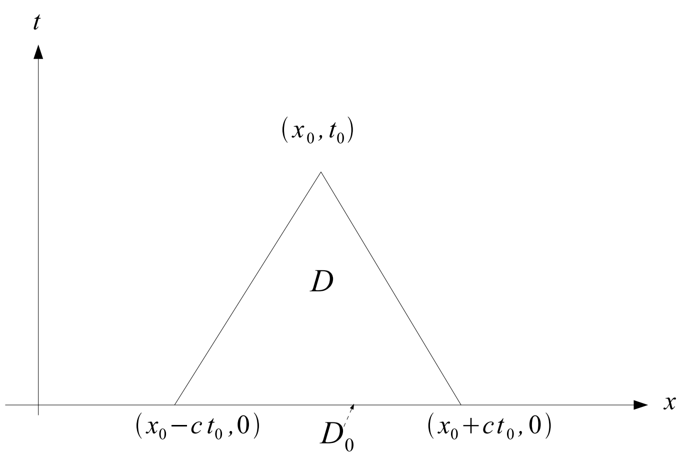
$$\begin{aligned}|u - v| \leqslant\ & \frac{1}{2}|f(x+ct) - f_1(x+ct)| + \frac{1}{2}|f(x-ct) - f_1(x-ct)| \\ & + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |g(y) - g_1(y)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Za svako $t > 0$ dobijamo ocenu

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon + \frac{1}{2c}\varepsilon \cdot 2tc = \varepsilon(1+t).$$

Ovo znači da je gornji Košijev problem *dobro postavljen* u topologiji prostora L^∞ u smislu Hadamard-a: Ima jedinstveno rešenje koje neprekidno zavisi od datih podataka.

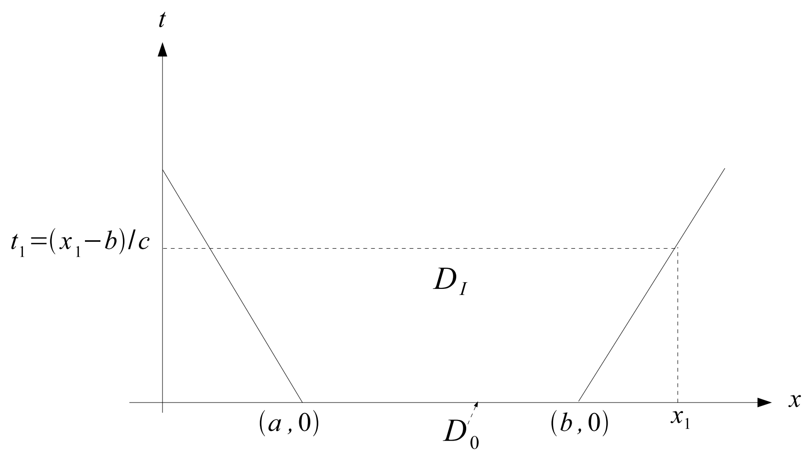
Povucimo karakteristike (u ovom slučaju su prave sa nagibima $\pm c$) iz neke tačke (x_0, t_0) nadole prema x-osi ("karakteristike unazad").



Slika 2.1.

Na osnovu D'Alambert-ove formule vidimo da $u(x_0,\, t_0)$ zavisi samo od vrednosti početnih uslova na D_0, pa D zovemo *domenom zavisnosti* za tačku $(x_0,\, t_0)$. Primetimo da ako je neka tačka (x_1, t_1) u oblasti D, njen domen zavisnosti je podskup od D jer su karakteristike talasne jednačine nezavisne od prostor-vremena (c ne zavisi od x ili t).

Obrnuto, posmatrajmo neki interval $I = [a, b]$ i iz tačaka a i b povucimo granične karakteristike, tako da sve karakteristike iz bilo koje od tačaka sa I leže izmedju njih. Tako dobijenu oblast ćemo označiti sa D_I izvati domen uticaja. Razlog je jednostavan: Vrednost rešenja u nekoj tački unutar D_I zavisi i od tačaka iz I. Kako je nagib graničnih karakteristika jednak $\pm\, c$, vidimo da će poremećaj koji se dogodio u intervalu $[a, b]$ u vremenskom trenutku $t = 0$ dospeti do tačke $x_1 > b$ u vremenskom trenutku $t_1 = (x_1 - b)/c$, tj. kao da se kreće brzinom c. Ako je $x_1 < a$, onde je brzina jednaka $-\, c$. Ova osobina kod neke PDJ se zove *konačna brzina prostiranja* i jedna je od osnovnih karakteristika hiperboličih PDJ.



Slika 2.2.

Nadalje ćemo uzeti da je brzina $c \equiv 1$. Formalno se to postiže smenom $t \mapsto ct$.

Teorema 2.2. *Neka je $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$. Tada Košijev problem*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = F(x,t) \\ &u|_{t=0} = f(x) \\ &u_t|_{t=0} = g(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ima klasično rešenje dato

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\mathrm{d}y + \iint_{D_{(x,t)}} F(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

gde je $D_{(x,t)}$ domen zavisnosti za tačku (x,t) (videti sliku 2.1).

Dokaz. Označimo sa D oblast $D_{(x,t)}$ i sa C njenu granicu orijentisanu u pozitivnom smeru, $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2$, gde je

$$\begin{aligned} C_0 &= \{(y,0) \colon y \in [x-t, x+t]\} \\ C_1 &= \{(y,s) \colon s \in [0,t],\, y = x+t-s\} \\ C_2 &= \{(y,s) \colon s \in [0,t],\, y = x-t+s\}. \end{aligned}$$

Integralimo PDJ iz (2.3) nad oblasti D, tako da imamo

$$I := \iint_D (u_{tt} - u_{xx}) \mathrm{d}y \mathrm{d}s = \iint_D F(y,s) \mathrm{d}y \mathrm{d}s.$$

Primenom Green-ove teoreme imamo

$$I = -\int_C u_t \mathrm{d}y + u_x \mathrm{d}s.$$

Računamo krivolinijse integrale nad C.

$$\int_{C_0} u_t \mathrm{d}y + u_x \mathrm{d}s = \int_{x-t}^{x+t} u_t \mathrm{d}y = \int_{x-t}^{x+t} g(y) \mathrm{d}y.$$

Na C_1 je $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}s$, pa imamo

$$\begin{aligned} \int_{C_1} u_t \mathrm{d}y + u_x \mathrm{d}s &= -\int_{C_1} u_t \mathrm{d}s + u_x \mathrm{d}y = -\int_{C_1} \mathrm{d}u = u(x+t,0) - u(x,t) \\ &= f(x+t) - u(x,t). \end{aligned}$$

Na C_2 je $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s$, pa imamo

$$\begin{aligned} \int_{C_2} u_t \mathrm{d}y + u_x \mathrm{d}s &= \int_{C_2} u_t \mathrm{d}s + u_x \mathrm{d}y = \int_{C_1} \mathrm{d}u = u(x-t,0) - u(x,t) \\ &= f(x-t) - u(x,t). \end{aligned}$$

Sabirajući sve ove članove dobijamo

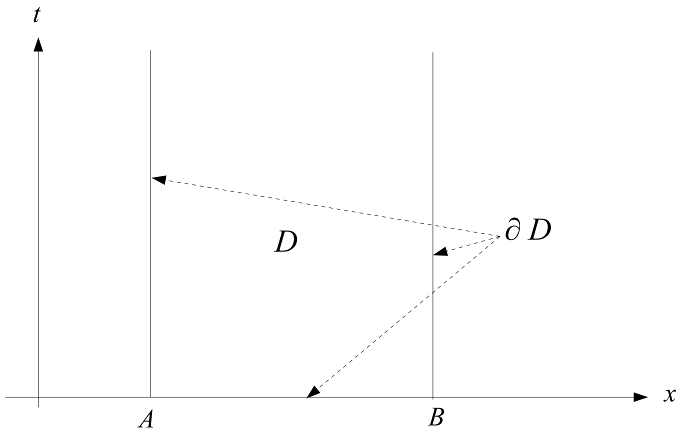
$$2u(x,t) - f(x+t) - f(x-t) - \int_{x-t}^{x+t} g(y) \mathrm{d}y = \iint_D F(y,s) \mathrm{d}y \mathrm{d}s,$$

odakle sledi tvrdjenje teoreme.

□

2.1.2 Mešoviti problem

Pozabavimo se sada sledećim problemom za talasnu jednačinu. Sada nas interesuju vrednosti rešenja samo u intervalu $x \in [A, B]$, pa zbog toga početnim uslovima dodajemo još granične uslove na polupravama $x = A$ i $x = B$ za $t > 0$.



Slika 2.3.

Rešavaćemo sledeći mešoviti problem:

$$\begin{array}{ll} u_{tt}-u_{xx}=\varphi(x,t), & A<x<B, t>0 \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x), & A<x<B \\ u(A,0)=a(t) \text{ ili } u_x(A,0)=a(t), & t>0 \\ u(B,0)=b(t) \text{ ili } u_x(B,0)=b(t), & t>0. \end{array} \tag{2.4}$$

U slučaju da posmatramo granične uslove na u, pretpostavićemo da važi tzv. *uslov kompatibilnosti*: $a(0)=f(A)$ i $b(0)=f(B)$. Ako su dati granični uslovi na u_x, tada je uslov kompatibilnosti $a(0)=f'(A)$, $b(0)=f'(B)$. Nadalje ćemo pretpostaviti da važe ti uslovi. Označimo sa D oblast $\{(x,t)\colon x\in(A,B), t>0\}$, a sa ∂D njenu granicu. Kao i malo pre, bez smanjenja opštosti možemo uzeti da je $c\equiv 1$.

Za razliku od prethodnog poglavlja, za ovaj problem ćemo prvo dokazati jedinstvenost rešenja.

Teorema 2.3. *Postoji najviše jedno rešenje $u\in C^2(D)\cap C^0(\partial D)$ mešovitog problema (2.4).*

Dokaz. Tvrdjenje će biti dokazano ake pokažemo da je jedino rešenje od (2.4) za homogene početne i granične uslove baš trivijalno rešenje, $u\equiv 0$. To direktno sledi iz lineanosti datog problema: Ako su u i v rešenja od (2.4), tada $u=v$ zadovoljava istu jednačinu sa svim homogenim uslovima.

Da bi ovo dokazali. posmatrajmo *integral energije*

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_A^B u_x^2(x,t)+u_t^2(x,t)\mathrm{d}x.$$

Diferenciranjem $E(t)$ dobijamo koristeći datu PDJ

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_A^B (u_x u_{xt}+u_t u_{tt})\mathrm{d}x=\int_A^B (u_x u_{xt}+u_t u_{xx})\mathrm{d}x \\ &= \int_A^B \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_t)\mathrm{d}x=u_x u_t|_{x=A}^{x=B}=0,\end{aligned}$$

jer ako je $u|_{x=A} = 0$ sledi i da je $u_x|_{x=A} = 0$ (isto i za drugi granični uslov).

Prema ovome $E(t) \equiv \text{const}$, a kako je prema početnim uslovima $E(0) = 0$ i $u(x,0) \equiv 0$, sledi da je $E(t) \equiv 0$, i odnosno $u \equiv \text{const}$, tvrdjenje je dokazano. □

Za konstrukciju rešenja problema (2.4) za $\phi \equiv 0$ koristićemo sledeću interesantnu lemu.

Lema 2.4. *Neka su A, B, C i D temena pravougaonika čije su stranice karakteristike homogene talasne jednačine $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Potreban i dovoljan uslov da funkcija $u = u(x, y)$ bude njeno rešenje nad $\mathbb{R}^2$ je da u zadovoljava funkcionalnu (u stvari diferencnu) jednačinu*

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D),$$

za svaki gore opisani pravougaonik $ABCD$.

Dokaz. Neka je u rešenje date PDJ koje pripada $C^2(\mathbb{R}^2)$. Znamo da je

$$u(x,t) = p(x+t) + q(x-t),$$

za bilo koje dve funkcije p, $q \in C^2(\mathbb{R})$. Neka je $A(x+k, t+h)$ za proizvoljne realne brojeve k i h. Tada ostale tačke imaju koordinate $B(x-h, t-k)$, $C(x-k, t-h)$, $D(x+h, t+k)$. Zamenjujući ove vrednosti u diferencnu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} u(A) + u(C) = &\ p(x+k+t+h) + q(x+k-t-h) \\ = &\ p(x-k+t-h) + q(x-k-t+h) = u(B) + u(D). \end{aligned}$$

Obrnuto, neka u zadovoljava gornju diferencnu jednačinu za svaki gore opisani pravougaonik. Stavimo $h = 0$, podelimi jednačinu sa k^2 - oduzmimo $2u$ od obe strane jednačine. Tako dobijamo

$$\frac{u(x+k,t) + u(x-k,t) - 2u(x,t)}{k^2} = \frac{u(x,t-k) + u(x,t+k) - 2u(x,t)}{k^2}.$$

Koristeći Taylorov razvoj oko tačke (x,t) dobijamo

$$\begin{aligned} u(x \pm k, t) &= u(x,t) \pm u_x(x,t)k + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)k^2 + k^2\mathcal{O}(k), \\ u(x, t \pm k) &= u(x,t) \pm u_t(x,t)k + \frac{1}{2}u_{tt}(x,t)k^2 + k^2\mathcal{O}(k), \quad k \to 0. \end{aligned}$$

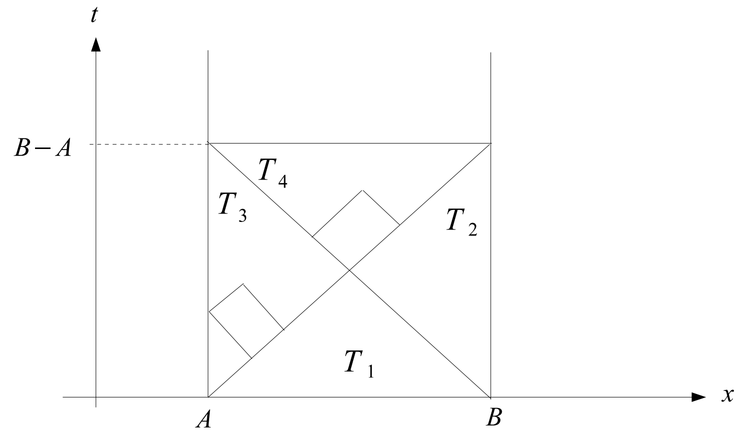
Vraćajući ove vrednosti u gornji izraz i puštajući da $k \to 0$, dobijamo

$$u_{tt} - u_{xx} = \mathcal{O}(k), k \to 0,$$

odnosno, dobijamo traženo tvrdjenje. □

Iskoristićemo ovu lemu da bi opisali konstrukciju rešenja za

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0, && A < x < B, t > 0 \\ &u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), && A < x < B \\ &u(A,0) = a(t), u(B,0) = b(t), && t > 0. \end{aligned}$$



Slika 2.4.

Povucimo karakteristike date PDJ iz tačaka A i B unutar domena $\{(x,t)\colon A<x<B, t>0\}$. Tako dobijamo trouglove

$$T_1=(A,0)(B,0)\left(\frac{A+B}{2},\frac{A+B}{2}-A\right),$$
$$T_2=\left(\frac{A+B}{2},\frac{A+B}{2}-A\right)(B,0)(B,B-A),$$
$$T_3=(A,0)\left(\frac{A+B}{2},\frac{A+B}{2}-A\right)(A,B-A),$$
$$T_4=(A,B-A)\left(\frac{A+B}{2},\frac{A+B}{2}-A\right)(B,B-A).$$

U oblasti T_1 je rešenje PDJ poznato prema D'Alambert-ovoj formuli (T_1 je domen zavisnosti). Svaka tačka u oblastima T_2 i T_3 je teme pravougaonika koji zadovoljava uslove prethodne leme, a čija ostala tri temena leže na rubu od T_1 i na granici $x=A$ ili $x=B$ (samo povučemo karakteristike iz te tačke). Kako znamo vrednosti ove funkcije u te tri tačke, prema prethodnj lemi znamo i u traženoj tački. Svaka tačka u T_4 je teme nekog pravougaonika koji zadovoljava uslove prethodne leme sa jednim temenom u $\left(\frac{A+B}{2},\frac{A+B}{2}-A\right)$, i sa po još jednim na rubu od T_2 i T_3. Prema prethodnoj lemi, opet znamo vrednost funkcije u i u toj traženoj tački. Dalje nastavljamo proceduru krenuvši sa duži $\{(x,t)\colon A\leqslant x\leqslant B, t=B-A\}$ i tako do beskonačnosti.

Alternativni dokaz postojanja rešenja mešovitog problema za talasnu jednačinu se može izvesti Fourier-ovom metodom razdvajanja promenljivih.

2.1.3 Integral energije

Ovo poglavlje je posvećeno dokazu jedinstvenosti rešenja Košijevog problema za talasnu jednačinu, ali ćemo ga dati u posebnom poglavlju zbog korisnosti i univerzalnosti metoda, tzv. *integrala energije*, za hiperbolične PDJ i sisteme.

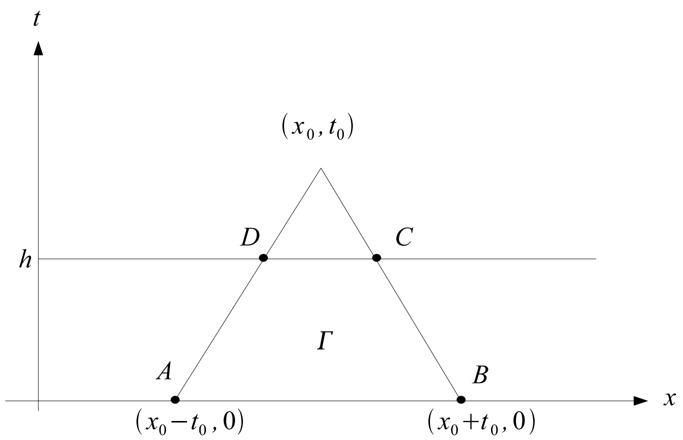
Teorema 2.5. *Neka je $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$. Tada Košijev problem za talasnu jednačinu (2.3) ima jedinstveno rešenje u prostoru $C^2(\mathbb{R}^2)$.*

Dokaz. Dokaz ćemo zbog preglednosti dati samo za $t > 0$. Za donju poluravan je dokaz praktično identičan. Zbog linearnosti posmatranog problema, tvrdjenje će biti dokazano ako pokažemo da je svako rešenje početnog problema

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0, && (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ &u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, && x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.5}$$

identički jednako nuli.

Uzmimo bilo koju tačku $(x_0,\, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ i označimo sa D_{x_0,t_0} njen domen zavisnosti. Označimo sa Γ trapez $ABCD$ dobijen presekom prave $t = h > 0$ i D_{x_0,t_0}, gde njegovo teme A ima koordinate $(x_0 - t_0, 0)$. (vidi sl. 2.5)



Slika 2.5.

Pomnožimo PDj iz (2.5) sa $-2u_t$, tako da dobijemo

$$0 = -2u_t(u_{tt} - u_{xx}) = -(u_x^2 + u_t^2)_t + 2(u_x u_t)_x.$$

Integralimo ovaj izraz nad Γ i primenimo Green-ovu formulu, tako da dobijemo

$$0 = \int_{\partial\Gamma} ((u_x^2 + u_t^2)t_\nu - 2(u_x u_t)x_\nu)\mathrm{d}s,$$

gde su t_ν i x_ν komponente spoljne jedinične normale na $\partial\Gamma$. Na dužima AD i BC je $t_\nu = 1/\sqrt{2}$ i $x_\nu = \pm 1/\sqrt{2}$,na AB je $t_\nu = -1$, $x_\nu = 0$, a na CD je $t_\nu = 1$, $x_\nu = 0$. Ovo znači da imamo

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{AB} -(u_x^2 + u_t^2)\mathrm{d}x + \int_{CD} (u_x^2 + u_t^2)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{BC \bigcup DA} \frac{1}{t_\nu}(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Koristeći nenegativnost poslednjeg člana, imamo

$$\int_{AB} (u_x^2 + u_t^2)\mathrm{d}x \geqslant \int_{CD} (u_x^2 + u_t^2)\mathrm{d}x.$$

Kako je $u = u_t = 0$ na $t = 0$ dobijamo da je za bilo koje h

$$\int_{CD} (u_x^2(x,h) + u_t^2(x,h))\mathrm{d}x = 0,$$

to jest, $u \equiv \text{const}$, a početni uslov ponovo daje $u \equiv 0$, čime je tvrdjenje dokazano.

$\square$

Glava 3
Parabolične PDJ drugog reda

Parabolične jednačine se koriste u opisivanju procesa difuzije ili generalnje gledano, procesa ireverzibilnih u vremenu: PDJ nisu invarijantne pri smeni $t \mapsto -t$. Ovo znači da se znanje o prošlosti gubi kako vreme protiče (suprotno od onog u hiperboličnom slučaju). Još jedna bitna karakteristika ovog tipa PDJ je da su rešenja regularnija od početnih uslova.

Najjednostavniji primer je *jednačina provodjenja toplote* ("Heat equation" na engleskom)

$$Hu \equiv u_t - k^2 \Delta u = 0, k \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Model je verniji ukoliko se radi o materijalu koji dobro prenosi toplotu (metali. recimo, dok voda nije toliko dobar primer–toplota se mnogo brže prenosi strujanjem). Ovaj model je prvi dobio i analizirao Fourier, tako da se često naziva u Fourier-ov model prenošenja toplote (toplotni fluks je proporcionalan gradijentu temperature koja je označena promenljivom u u PDJ (3.1)).

Posmatrajmo cilindričnu oblast

$$D = \Omega \times (0, T), T \leqslant \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

gde je Ω otvoren i ograničen skup. Neka je D' zatvorenje od D, $\bar{D}$, a ako je $T < \infty$, onda i bez tačaka na kojima je $t = T$,

$$D' = \bar{\Omega} \times \{t = 0\} \cup \partial\Omega \times [0, T].$$

Izuzetno su važne sledeće dve teoreme, *principi maksimuma*, pomoću kojih se izvode apriori ocene rešenja PDJ (znamo osobine rešenja pre nego što rešimo jednačinu). Ova osobina dozvoljava da se reše znatno komplikovanije PDJ od (3.1) na sličan način kao ona. Ova "osobina" ne postoji kod hiperboličnih PDJ, gde tu ulogu apriori ocena igra integral energije.

Teorema 3.1. *Neka je $u \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ rešenje od (3.1). Tada se* $\max u$ *i* $\min u$ *dostižu u tačkama na D'.*

Dokaz. Dokazaćemo teoremu samo za maksimum. Slučaj za minimum se dokazuje na isti način, a moguće je i napraviti smenu $u \mapsto -u$, tako da se svodi na slučaj koji razmatramo. Neka je $M = \max_{D'} u$. Za $0 < \varepsilon \ll 1$ definišimo pomoćnu funkciju

$$v(x, t) := u(x, t) + \varepsilon |x|^2.$$

Tada je

$$Hv = -2nk^2\varepsilon < 0.$$

Neka je dato proizvoljno $\bar{t} < \infty$ i $\bar{t} \leqslant T$. Maksimum od v ne može biti dostignut u tački koje pripada skupu $\Omega \times (0, \bar{t}\,)$, jer bi tada moralo važiti

$$v_t \geqslant 0 \ \text{ i } \Delta v \leqslant 0 \text{ za dovoljno malo } \varepsilon$$

(uslov za ekstrem u $\mathbb{R}^{n+1}$), što bi dalo

$$Hv = v_t - k^2\Delta v \geqslant 0,$$

a to je u kontradikciji sa gore izvedenom relacijom $Hv < 0$. Takodje, maksimumne može biti dostignut tamo gde je $t = \bar{t}$, jer bi tada bilo $v_t \geqslant 0$ (funkcija raste po t do granice da bi dostigla maksimum) i opet bi bilo $Hv \geqslant 0$. Ovo znači da je maksimum dostignut u tački koja pripada skupu $\bar{\Omega} \times [0, \bar{t}\,] \cap D'$, to jest u tački gde je $u \leqslant M$. Odavde je

$$v < M + \varepsilon \max_{\bar{\Omega}} |x|^2,$$

pa kako je ε dovoljno malo i u ne može imati maksimum van D'. Kako je $\bar{t}$ proizvoljno, sledi tvrdjenje. □

Posledica 3.2. *Mešoviti problem*

$$\begin{aligned} Hu &= f \quad \text{na } D \\ u &= g \quad \text{na } D' \end{aligned}$$

gde su $f \in C^2(D)$ i $g \in C(D')$ ima najviše jedno rešenje u $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$.

Dokaz se jednostavno izvodi pretpostavkom da postoje dva rešenja, pa onda njihova razlika zadovoljava homogenu mešoviti problem, a prethodna teorema nam tada garantuje da je ta razlika maksimalno i minimalno jednaka nuli.

Princip maksimuma važi i za neograničenu oblast,

$$D = \mathbb{R}^n \times (0, T), 0 < T \leqslant \infty.$$

Teorema 3.3. *Neka je u rešenje od (3.1), $u \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$. Neka je*

$$M = \sup_{(x,t) \in \bar{D}} u(x,t)$$

i neka je

$$N = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0).$$

Tada je $M = N$ ako je M konačno.

Dokaz. Za $0 < \varepsilon \ll 1$ definišimo pomoćnu funkciju

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(2nt + |x|^2).$$

Lako se vidi da važi $Hv = 0$. Pretpostavimo da je $M < \infty$ i $M > N$. Tada za svako x va¨zi

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \varepsilon |x|^2 \leqslant u(x, 0) \leqslant N.$$

Ako je

$$|x|^2 \geqslant \frac{M-N}{\varepsilon} \text{ i } 0 \leqslant t \leqslant T,$$

tada važi

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(2tn + |x|^2) \leqslant M - \varepsilon|x|^2 \leqslant N, \tag{3.2}$$

za ε dovoljno malo. Kako je prema pretposavci $M < \infty$, oblast

$$\Omega := \left\{ x : |x|^2 < \frac{M-N}{\varepsilon} \right\}$$

je ograničena po promenljivoj x, pa prema prethodnoj teoremi sledi da je

$$v(x,t) \leqslant N \text{ za } x \in \Omega,$$

jer je $v(x,0) \leqslant N$, a prema (3.2) je i $v(x,0) \leqslant N$ za $|x|^2 = \frac{M-N}{\varepsilon}$.

Ove dve ocene, za $x \in \Omega$ i za $x \notin \Omega$, daju

$$v(x,t) \leqslant N, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T],$$

jer ε može biti proizvoljno malo.

Odavde dobijamo

$$u(x,t) = v(x,t) + \varepsilon(2nt + |x|^2) \leqslant N + \varepsilon(2nt + |x|^2),$$

za svako $(x,\, t) \in D$. Fiksirajmo $(x,\, t)$ i postimo da $\varepsilon \to 0$. Tada dobijamo da je $u(x,t) \leqslant N$ za svako $(x,t) \in D$, što je kontradikcija sa pretpostavkom $M > N$. □

Posledica 3.4. *Početni problem*

$$\begin{aligned} Hu &= f & &u\ D, \\ u(x,0) &= g(x), & &x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ima najviše jedno ograničeno rešenje $u \in C^2(D) \cap C_b(\bar{D})$.

Primetimo da ova posledica nije tačna ako u tvrdjenju izostavimo uslov ograničenosti:

Za $n = 1$, neograničena funkcija

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} e^{-\frac{1}{t^2}}$$

zadovoljava početni problem $Hu = 0$, $u(x,\, 0) = 0$, mada znamo da je i $u \equiv 0$ rešenje istog početnog problema.

Teorema 3.5. *Neka je* $\varphi(x)$ *neprekidna i uniformno ograničena funkcija iz* $\mathbb{R}^n$ *u* $\mathbb{R}$. *Tada je*

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} (4k\pi t)^{-n/2} \exp\left(\frac{-2|z-x|}{4kt} \right) \varphi(z) \mathrm{d}z$$

jedinstveno ograničeno rešenje za Košijev problem

$$Hu = 0, u(x,0) = \varphi(x).$$

Ta funkcija je analitička za svako $x \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Dokaz ove teoreme se može izvesti direktnom zamenom date funkcije u PDJ.

Ako je početni uslov u $L^2(\mathbb{R}^n)$, samo izvodjenje rešenja se može dobiti primenom Fourier-ove transformacije po prostornoj promenljivij x i rešavanjem ODJ po t. Vraćanjem na originalnu prostornu promenljivu x, dobijamo tvrdjenje.

Glava 4
Eliptične PDJ drugog reda

4.1 Uvodni pojmovi

Ako se drugačije ne napomene, Ω će označavati otvoren ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$. Neka je L dati parcijalni diferencijalni operator. Za ovaj tip jednačina tražimo rešenja sledećih problema

Dirichlet-ov problem (I granični problem). Tražimo rešenje $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ za PDJ $Lu = f$ u Ω, kada je zadovoljen granični uslov $u|_{\partial\Omega} = g$.

Neumann-ov problem (II granični problem). Sada tražimo rešenje $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ za istu PDJ, dok je granični uslov $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = g$.

III granični problem. U odnosu na prethodni slučaj, promenjen je granični uslov na $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} + a u|_{\partial\Omega} = g$.

Modelna jednačina za eliptične PDJ će biti Laplace-ova jednačina

$$Lu \equiv \Delta u = f,$$

na otvorenoj povezanoj oblasti Ω. Kod eliptičnih PDJ je karakteristično da se metodi njihovog rešavanja i analiziranja više baziraju baš na modelnom predstavniku nego parabolične ili hiperbolične PDJ.

Definicija 4.1. *Fukncĳu u zovemo harmonijska (subharmonijska, superharmonijska) ako važi*

$$\Delta u = 0 \, (\Delta u \geqslant 0, \Delta u \leqslant 0).$$

U daljem tekstu ćemo često koristiti teotemu o divergenciji

$$\int_\Omega \Delta u \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \, \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S. \tag{4.1}$$

Teorema 4.2. ***(Nejednakosti u srednjem)*** *Neka $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava*

$$\Delta u = 0 \, (\Delta u \geqslant 0, \Delta u \leqslant 0) \ \text{ u } \Omega.$$

Tada za proizvoljnu loptu $B = B_R(y) \Subset \Omega$ (poluprečnika R sa centrom u y) važi

$$u(y) = (\leqslant, \geqslant) \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, \mathrm{d}S \tag{4.2}$$

i

$$u(y) = (\leqslant, \geqslant) \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B u \, \mathrm{d}x, \tag{4.3}$$

gde je $\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$ *zapremina jedinične lopte u* $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka je $\rho \in (0, R)$. Iz (4.1) za $B_\rho = B_\rho(y)$ važi

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}S = \int_{B_\rho} \Delta u \, \mathrm{d}x = (\geqslant, \leqslant) 0.$$

Stavljajući $r = |x - y|$, $\omega = \dfrac{x - y}{r}$, $u(x) = u(y + rw)$, dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}S = & \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y + \rho\omega) \mathrm{d}S = \rho^{n-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}(y + \rho\omega) \mathrm{d}\omega \\ = & \ \rho^{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \int_{|\omega|=1} u(y + \rho\omega) \mathrm{d}\omega = \rho^{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left(\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u \mathrm{d}S \right) = (\geqslant, \leqslant) 0\end{aligned}$$

Odavde imamo da je

$$g(\rho) := \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u \mathrm{d}S = (\leqslant, \geqslant) R^{1-n} \int_{\partial B_R} u \mathrm{d}S.$$

Kako je

$$g(0) = \lim_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u \mathrm{d}S = n\omega_n u(y),$$

dobijamo (4.2). Relacija (4.3) se dobija iz ovoga:

$$n\omega_n \rho^{n-1} u(y) = (\leqslant, \geqslant) \int_{\partial B_\rho} u \mathrm{d}S, \ \rho \leqslant R,$$

i integralimo ovaj izraz od 0 do R po ρ.

□

4.2 Princip minimuma i maksimuma

Prethodna teorema nam dozvoljava da dokažemo jaki princip maksimuma za subharmonijske i jaki princip minimuma za superharmonijske funkcije.

Teorema 4.3. *Neka je* $\Delta u \geqslant 0$ *(ili* $\Delta u \leqslant 0$*) u* Ω. *Pretpostavimo da postoji takva tačka* $y \in \Omega$ *da je*

$$u(y) = \sup_\Omega u \ (\textit{ili } u(y) = \inf_\Omega u).$$

Tada je $u \equiv \mathrm{const}$. *Specijalno, nekonstantna harmonijska funkcija nema ni unutrašnjeg minimuma ni maksimuma.*

Dokaz. Neka je $\Delta u \geqslant 0$ u Ω i $M = \sup\limits_\Omega u$. Definišimo skup

$$\Omega_M = \{x \in \Omega \colon u(x) = M\}.$$

Prema pretpostavci, $\Omega_M \neq \emptyset$, a kako je u neprekidna, Ω_M je zatvoren skup (inverzna slika zatvorenog skupa $\{M\} \subset \mathbb{R}$).

Neka je z proizvoljna tačka u Ω_M. Primenimo (4.3) u lopti $B = B_R(z) \Subset \Omega$ na funkciju $u - M$ (koja je takodje subharmonijska: $\Delta(u - M) \geqslant 0$)

$$0 = u(z) - M \leqslant \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B (u - M)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

daje $u - M \equiv 0$ u B. Kako je $B \subset \Omega_M$ okolina tačke z, sledi da je Ω_M otvoren skup. A kako je Ω povezan skup, konačno imamo $\Omega = \Omega_M$, to jest, $u \equiv M$ na Ω.

Dokaz za superharmonijsle funkcije sledi posle smene $u \mapsto -u$.

□

Jaki principi minimuma i maksimuma odmah daju i tvrdjenje o slabim principima minimuma i maksimuma.

Teorema 4.4. *Neka je oblast Ω ograničena, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ i $\Delta u \geqslant 0$ (ili $\Delta u \leqslant 0$) u Ω. Tada je*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \,(\textit{ili } \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Specijlno, za harmonijsku funkciju u važi

$$\inf_{\partial\Omega} u \leqslant u(x) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u, \, x \in \Omega.$$

Takodje važi i sledeća teorema o jedinstvenosti.

Teorema 4.5. *a) Neka funkcije $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ zadovoljavaju jednakosti*

$$\Delta u = \Delta v \;\; \textit{unutar } \Omega, u = v \;\; \textit{na } \partial\Omega.$$

Tada je $u = v$ unutar Ω.

b) Ako su u i v harmonjska i subharmonijska funkcija, respektivno, i $u = v$ na $\partial\Omega$, tada je $v \leqslant u$ unutar Ω.

Dokaz. a) Označimo sa $w = u - v$. Ta funkcija zadovoljava

$$\Delta w = 0 \;\text{ unutar } \Omega, w = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Prema prethodnoj teoremi je $w = 0$ unutar Ω.

b) takodje direktno sledi iz iste teoreme.

□

Posledica teoreme o nejednakosti u srednjem je i sledeće tvrdjenje koje nećemo dokazivati.

Teorema 4.6. ***(Harnakova nejednakost)*** *Neka je u nenegativna harmonijska funkcija u Ω. Tada za proizvoljnu podoblast $\Omega' \Subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ postoji konstanta $C = C(n, \Omega', \Omega)$ takva da je*

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C \inf_{\Omega'} u.$$