1 Primer iz stohastike – prevod dela predavanja Michael Oberguggenberger-a

Posmatrajmo Košijev problem

$$\partial_t p(t,x) = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 p(t,x)$$
$$p(0,x) = \delta(x).$$

Njegovo rešenje je dato sa

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)},$$

što se lako proverava direktnim uvrštavanjem u jednačinu (inače se ovo rešenje može dobiti koristeći Furijeovu transformaciju po x i rešavajući ODJ po t, kao što smo to već pre videli).

Ova funkcija je gustina Gausovske raspodele $\mathcal{N}(0,t)$. Za $t = 0$ ćemo reći da je p gustina raspodele $\mathcal{N}(0,0)$. Videćemo malo kasnije da će ovo biti primer Braunovskog kretanja.

Definicija 1. Neka je Ω skup, $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ je σ-algebra, tj. najmanja kolekcija skupova gde su zatvorene operacije prebrojiva unija i komplement, a sadrži sve otvorene skupove. Neka je $\mu : \Sigma \to [0,1]$ mera za koju važi $\mu(\Omega) = 1$,

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i), A_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}.$$

tada ovakvu meru zovemo verovatnosna mera. Trojka (Ω, Σ, μ) se zove verovatnosni prostor.

Definicija 2. Slučajna promenljiva X je merljivo preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (ili u $\mathbb{R}^n$, tada je zovemo višedimenzionalna slučajna promenljiva), što u stvari znači da je inverzna slika svakog Borelovog skupa iz $\mathbb{R}$ (elementi σ-algebre na $\mathbb{R}$ koja sadrži sve otvorene inervale) merljiv skup iz Ω. Dovoljno je da važi:

$$X^{-1}([a,\infty)) \in \Sigma, \text{za svako } a \in \mathbb{R}.$$

Definicija 3. Neka je X jednostavna funkcija,

$$X = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbb{1}_{A_i}, A_i \in \Sigma, c_i \geq 0, i = 1, \ldots, m.$$

Definišimo njen integral u odnosu na meru μ na sledeći način

$$\int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\,\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(A_i).$$

Za merljivu funkciju X, $X \geq 0$ definišemo

$$\int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\,\mu(\omega) = \sup_{0 \leq Z \leq X, Z je jednostavna funkcija} \int_\Omega Z(\omega)\,\mathrm{d}\,\mu(\omega).$$

Definišemo prostor intergrabilnih funkcija sa

$$L^1(\Omega, \mu) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ je merljivo, } \int_\Omega |X(\omega)|\,\mathrm{d}\,\mu(\omega) < \infty\}.$$

Očekivanje (matematičko očekivanje) je definisano sa

$$EX = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\,\mu(\omega) := \int_\Omega X_+(\omega)\,\mathrm{d}\,\mu(\omega) - \int_\Omega X_-(\omega)\,\mathrm{d}\,\mu(\omega),$$

gde je $X_+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}$ i $X_-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}$.

Definicija 4. Raspodela verovatnoće za X je verovatnosna mera nad $\mathbb{R}$ za Borelovom σ-algebrom $\mathcal{B}$, odnosno

$$\mu_X(A) = \mu(X^{-1}(A)) = \mu(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

Tako da imamo

$$EX = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\,\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}\,\mu_X(x)$$

i

$$Ef(X) = \int_\Omega f(X(\omega))\,\mathrm{d}\,\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{d}\,\mu_X(y),$$

gde je f neprekidna funkcija.

Definicija 5. Stohastički proces je preslikavanje

$$X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}, (t, \omega) \mapsto X_t(\omega),$$

tako da je X_t merljivo za svako $t \geq 0$.

Raspodelu verovatnoće za X_t označavamo sa μ_t, $\mu_t(A) = \mu(X_t \in A)$.

Zajedničku raspodelu verovatnoće za $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$, gde je $t_1, \ldots, t_n \in [0, \infty)$ definišemo sa

$$\mu_{t_1, \ldots, t_n}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n).$$

Putanja od X_t je preslikavanje

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

za fiksirano $\omega \in \Omega$.

Definicija 6. Definišimo

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_n) =$$
$$\int_{A_1} p(t_1, x_1) \int_{A_2} p(t_2 - t_1, x_2 - x_1) \ldots \int_{A_2} p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1}) \,\mathrm{d}\, x_1 \ldots \mathrm{d}\, x_n,$$

gde je p funkcija data na početku poglavlja.

Prema teoremi Kolmogorova, postoji verovatnosni prostor (Ω, Σ, μ) i stohastički proces $W : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ takav da za svaku višedimenzionalnu raspodelu verovatnoće važi

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu(W_{t_1} \in A_1, \ldots, W_{t_n} \in A_n).$$

Ovaj proces nazivamo Wienner-ovim, preciznije, ovo je Braunovo kretanjee sa početnom tačkom u 0.

Primedba 1. Neka je $\Omega = \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ ili $\Omega = C([0, \infty))$. Stahastički proces W_t ima raspodelu verovatnoće $\mathcal{N}(0, t)$ i

$$\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = \min(t, s),$$

gde Cov označava kovarijansu, $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Varijansa je data formulom $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)$. to se tiče putanje, za fiksirano μ i $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ je neprekidno preslikavanje, ali koje nije nigde diferencijabilno. Stohastički proces $\dot{W}_t$ koji dobijamo formalnih (uopštenim) izvodom zovemo belim šumom i prototip je "potpuno proizvoljnog" procesa: $\dot{W}_t$ i $\dot{W}_s$ su nezavisni za $s \neq t$, $E(\dot{W}_t) = 0$, $\mathrm{Var}(\dot{W}_t) = \infty$, za $t \geq 0$.

1.1 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastička diferencijalna jednačina je diferencijalna jednačina za stohastičke procese

$$\dot{X}_t = F(X_t) + G(X_t)Y_t, \tag{1}$$

gde je Y_t upravljački proces. Može se ova jednačina rešavati po putanjama ako je $t \mapsto Y_t(\omega)$ diferencijabilna.

Najčešće će biti

$$Y_t = \dot{W}_t,$$

i sada imamo ODJ

$$\mathrm{d}\, X_t = F(X_t) \,\mathrm{d}\, t + G(X_t) \,\mathrm{d}\, W_t,$$

čije rešenje možemo definisati kao

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(X_s) \,\mathrm{d}\, s + \int_0^t G(X_s) \,\mathrm{d}\, W_s,$$

gde poslednji integral zovemo Ito-ov integral. Sada ćemo dati njegovu definiciju.

1.1.1 Ito-ov integral

Neka je M_s σ-algebra generisana sa skupovima $W_\tau^{-1}(A)$, $0 \leq \tau \leq s$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ovde $\mathcal{B}$ označava Borelovu σ-algebru, a σ-algebra generisana nekom familijom skupova znači da je to najmanja σ-algebra koja sadrži tu familiju.

Kažemo da je G unapred merljiva ako je $G|_{[0,s]\times\Omega}$ merljiva u odnosu na $\mathcal{B}([0,s]) \times M_s$, gde je $0 \leq s \leq t$.

Ako je G unapred merljiva i deo po deo konstantna funkcija, neprekidna s desna, definišemo integral na sledeći način:

$$\int_0^t G_s \,\mathrm{d}\, W_s = \sum_{i=1}^n G(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})).$$

Ako je G unapred merljiva funkcija u odnosu na μ takva da je

$$\int_0^t |G_s(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\, s < \infty, \text{ za svako } \omega \in \Omega,$$

aproksimirajmo je nizom deo po deo unapred merljivim konstantnim funkcijama G_j, tako da je

$$\int_0^t |G_s(\omega) - G_{js}(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\, s \to 0, j \to \infty,$$

i definišimo njen integral kao

$$\int_0^t G_s \,\mathrm{d}\, W_s = \lim_{j\to\infty} \int_0^t G_{js} \,\mathrm{d}\, W_s \text{ u verovatnoći.}$$

Ovo je bila definicija Ito-ovog integrala Važe sledeće osobine:

$$t \mapsto \int_0^t G_s(\omega) \,\mathrm{d}\, W_s(\omega) \text{ je neprekidna za skoro svako } \omega \in \Omega.$$
$$E\Big(\int_0^t G_s(\omega) \,\mathrm{d}\, W_s(\omega) \,)= 0.$$

Teorema 1. *Neka je X_0 slučajna veličina (konstanta), a funkcije F i G su globalno Lipšicove klase. Tada postoji jedinstveni Stohastički proces $X_t : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ takav da je*

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(X_s) \,\mathrm{d}\, s + \int_0^t G(X_s) \,\mathrm{d}\, W_s, t \geq 0. \tag{2}$$

Ovaj proces ima skoro sigurno neprekidne putanje.

Proof. Primetimo da je rešavanjem (2) u stvari rešena stohastička ODJ (1). Dokaz ovog tvrdjenja se kože izvesti pomoću metoda Pickard-ovih iteracija (kao u teoriji determinističkih ODJ) i teorema o merljivosti funkcija. Koristimo integraciju po putanjama $t \mapsto X_t(\omega)$, tako da za svako $\omega \in \Omega$ u stvari i rešavamo determinističku ODJ. $\square$

Teorema 2. *(Ito-ova formula) Neka je $Y_t = v(X_t)$. Tada važi sledeća važna relacija*

$$\begin{aligned} Y_t = \quad & Y_0 + \int_0^t (v'(X_s)F(X_s) + \tfrac{1}{2}v''(X_s)G^2(X_s))\,\mathrm{d}\,s \\ & + \int_0^t v'(X_s)G(X_s)\,\mathrm{d}\,W_s. \end{aligned}$$

Sada ćemo okazati kako se efektivno traži rešenje neke Ito-ove SODJ.

Koristeći činjenicu da je μ_t raspodela za X_t, posle primene očekivanja (operatora E) na obe strane gornje Ito-ove formule, dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v(y)\,\mathrm{d}\,\mu_t(y)\,\mathrm{d}\,y \quad = \quad & \int_{-\infty}^{\infty} v(y)\,\mathrm{d}\,\mu_0(y)\,\mathrm{d}\,y \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (v'(y)F(y) + \frac{1}{2}v''(y)G^2(y)\,\mathrm{d}\,\mu_t(y)\,\mathrm{d}\,s. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili činjenicu da je

$$E\left(\int_0^t \text{nešto} \cdot \mathrm{d}\,W_s(y)\,\right) = 0$$

koja sledi iz definicije Ito-ovog integrala i činjenice da je $E(W_t) = 0$.

U specijalnom slučaju kada je $\mathrm{d}\,\mu_t(y) = p(t,y)\,\mathrm{d}\,y$, gde je p funkcija definisanu na početku ovog poglavlja, i kada je $v(y) = \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(y)$ imamo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_{-\infty}^{x} p(t,y)\,\mathrm{d}\,y = \quad & -\tfrac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x} F(y)p(t,y)\,\mathrm{d}\,y \\ & + \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{x} G^2(y)p(t,y)\,\mathrm{d}\,y. \end{aligned}$$

Diferenciranjem po x dobijamo Fokker-Planck-ovu jednačinu (koja je deterministička)

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}(F(x)p(t,x)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(G^2(x)p(t,x)).$$

Rešenje ove jednačine daje X_t, $t \geq 0$. Kako postoje realne šanse da se ova difuziona PDJ može rešiti (na sličan način kao jednačine provodjenja toplote), možemo efektivno dobiti rešenje SODJ (1).

Primer 1. Posmatrajmo SODJ

$$\dot{X}_t = D + K\dot{W}_t.$$

Ovoj jednačini odgovra Fokker-Planck-ove PDJ

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -D\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Kada još stavimo početni uslov $p(0,x) = \delta(x)$, dobijamo rešenje

$$p(t,x) = \frac{1}{K\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-Dt)^2}{2K^2 t}\right),$$

koje je takodje Gausovska promenljiva oblika $\mathcal{N}(Dt, K^2 t)$, to jest ima pomeraj od Dt i difuzioni deo $K^2 t$.