



Univerzitet u Novom Sadu  
Prirodno-matematički fakultet  
Departman za matematiku i informatiku



Milena Kresoja

# GENERACIJA SCENARIJA POMOĆU SKRIVENIH MODELA MARKOVA

Master rad

Novi Sad, 2011

# SADRŽAJ

<b>Predgovor</b>	<b>ii</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Pregled oznaka, definicija i teorema . . . . .	1
1.2 Motivacija . . . . .	6
<b>2 Skriveni modeli Markova</b>	<b>8</b>
2.1 Lanci Markova . . . . .	9
2.2 Skriveni lanci Markova . . . . .	12
<b>3 Tradicionalne metode za generaciju scenarija</b>	<b>17</b>
3.1 Model sa konstantnom volatilnosti . . . . .	18
3.1.1 Geometrijsko Braunovo kretanje . . . . .	18
3.2 Modeli sa promenljivom volatilnosti . . . . .	21
3.2.1 ARCH i GARCH modeli . . . . .	21
3.2.2 Modeli sa promenljivim stanjima . . . . .	26
<b>4 Skriveni modeli Markova kao metoda za generaciju scenarija</b>	<b>28</b>
4.1 Promena prostora verovatnoća . . . . .	31
4.2 Rekurzivni filteri . . . . .	34
4.3 Stanja, prelazi i vreme zadržavanja . . . . .	40
4.4 Ocena parametara maksimiziranjem očekivanja . . . . .	43
4.5 Algoritam za generaciju scenarija pomoću metoda skrivenih lanaca Markova	51
<b>5 Numerički eksperiment</b>	<b>53</b>
<b>6 Zaključak</b>	<b>65</b>
<b>Dodatak</b>	<b>66</b>
<b>Literatura</b>	<b>73</b>

# Predgovor

*Problem kojim se bavim u svom master radu jeste generacija scenarija pomoću skrivenih modela Markova. Motivacija za ovu temu potiče iz [9]. U uvodnom poglavlju predstavljamo osnovne definicije i teoreme neophodne za razumevanje problematike kao i osnovne razloge zbog kojih je ova metoda generacije scenarija popularna među istraživačima. U drugom poglavlju dat je koncept modela Markova-lanaca Markova i skrivenih lanaca Markova kao i primeri njihove primene u finansijskoj matematici. U narednom poglavlju opisani su do sada najpoznatiji metodi za generaciju scenarija kao i razlozi zbog kojih se javlja potreba za novim metodama. Četvrto poglavlje rezervisano je za model generatora scenarija koji se bazira na skrivenim modelima Markova. Nakon formulisanja modela, uvedena je nova mera verovatnoće i izvedeni rekurzivni filteri kako bi se dobila računica ocena optimalnih parametara neophodnih za predviđanje cene rizičnih aktiva. Na kraju poglavlja je dat algoritam za generaciju scenarija ovom metodom. Konacno, u petom poglavlju predstavljamo rezultate dobijene implementacijom modela.*

*Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Nataši Krejić, za savete, pomoć i razumevanje koje mi je ukazala tokom izrade rada, za svo znanje preneto tokom osnovnih i master studija i naravno za ohrabrivanje u vezi sa mojim daljim usavršavanjem. Predloženom temom, profesorica ne samo da mi je postavila novi izazov, već mi je i dokazala da je matematika zaista budućnost i jezik savremenog poslovanja.*

*Takođe, želim da se zahvalim i članovima komisije dr Dori Seleši i dr Zorani Lužanin, prevenstveno na divnim predavanjima i pruženoj podršci tokom studija.*

*Ovom prilikom želim da se zahvalim kolegincima Budi Bajić za sve brojne i sadržajne diskusije vezane za problematiku ovog rada.*

*Želim da se zahvalim svima koji su mi na bilo koji način pružili pomoć, posebno svojim dragim prijateljima Ivani, Anici i Vanji na podršci i razumevanju koju mi nesebično i bezuslovno pružaju i kolegincima Jeleni i Mariji što su učinile moje školovanje lepšim.*

*Na kraju, želim da se zahvalim majci Snežani i sestri Nataši za ljubav i pažnju koju mi svakodnevno ukazuju.*

*Milena Kresoja*

# 1

## Uvod

### 1.1 Pregled oznaka, definicija i teorema

U tabeli 1.1 predstavljene su najvažnije oznake koje će se koristiti u radu.

Oznaka	Značenje
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	prostor verovatnoća
$X_k$	lanac Markova
$S_X$	skup stanja lanca Markova
$V_{k+1}$	priraštaj martingala
$\Pi = [\pi_{ij}]_{i,j}$	matrica verovatnoća prelaza
$\{(X_k, Y_k)\}$	skriveni lanac Markova
$W_k$	Braunovo kretanje
$S_k$	cena rizične aktive u trenutku $k$
$Y_k$	niz opažanja
$y_k$	niz procesa prinosa
$\{M_k, \Sigma_k\}$	skriveni Markovski lanac drifta i volatilnosti
$\mu$	vektor drifta
$\sigma$	vektor volatilnosti
$z_k$	niz nezavisnih standardizovanih normalnih promenljivih
$\gamma_k(\cdot)$	nenormalizovano uslovno očekivanje, $\bar{E}(\Lambda_k \cdot   \mathcal{Y}_k)$
$\mathcal{F}_k$	filtracija generisana promenljivama $X_0, \dots, X_k$
$\mathcal{Y}_k$	filtracija generisana promenljivama $y_0, \dots, y_k$
$\mathcal{G}_k$	filtracija generisana promenljivama $X_0, \dots, X_k, y_0, \dots, y_k$
$\mathcal{J}_k^{rs}$	broj prelaza lanca Markova iz stanja $r$ u stanje $s$
$\mathcal{O}_k^r$	vreme zadržavanja lanca Markova u stanju $r$
$\mathcal{T}_k^r(h)$	pomoćni proces procesa opažanja za funkciju $h$
$\hat{\pi}_{ij}$	optimalna ocena verovatnoće prelaza lanca Markova iz stanja $i$ u stanje $j$
$\hat{\mu}$	optimalna ocena vektora drifta
$\hat{\sigma}$	optimalna ocena vektora volatilnosti

Tabela 1.1: Lista oznaka.

U nastavku slede teoreme i definicije neophodne za diskusije u poglavljima koja slede.

### Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

**Definicija 1.1 ( $\sigma$ -polje).**  $\sigma$ -polje ( $\sigma$ -algebra) nad skupom  $\Omega$  je podskup  $\mathcal{F}$  partitivnog skupa  $\mathcal{P}(\Omega)$  ukoliko važe sledeći uslovi:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
2.  $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^C \in \mathcal{F}$  (klasa  $\mathcal{F}$  je zatvorena u odnosu na operaciju komplementiranja);
3.  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$  (klasa  $\mathcal{F}$  je zatvorena u odnosu na operaciju prebrojive unije).

Skup  $\Omega$  sa  $\sigma$ -poljem  $\mathcal{F}$ , u oznaci  $(\Omega, \mathcal{F})$ , se zove prostor sa  $\sigma$ -poljem. Elemente skupa  $\Omega$  zovemo događajima.

**Definicija 1.2 (Borelovo  $\sigma$ -polje).** Borelovo  $\sigma$ -polje  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  je najmanje  $\sigma$ -polje koje sadrži sve zatvorene skupove skupa realnih brojeva.

**Definicija 1.3 (Verovatnoća).** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  prostor sa  $\sigma$ -poljem. Funkcija  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  se zove verovatnoća na prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$  ako važe sledeći uslovi:

1.  $P(\Omega) = 1$ ,
2.  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$ .

Uređena trojka  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se naziva prostor verovatnoća.

**Definicija 1.4 (Slučajna promenljiva).** Funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se zove slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ako za svako  $B \in \mathcal{B}$  važi  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ , gde je  $\mathcal{B}$  Borelovo  $\sigma$ -polje. Ekvivalentno, kažemo da je  $X$   $\mathcal{F}$ -merljivo.

Jedna od najjednostavnijih slučajnih promenljivih jeste indikator događaja  $B \in \mathcal{F}$ , u oznaci  $I_B$ , koja se definiše na sledeći način:

$$I_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \omega \in B, \\ 0 & \text{ako } \omega \in B^C \end{cases}$$

Slučajna promenljiva  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se naziva prosta slučajna promenljiva ako postoji konačno mnogo realnih brojeva  $x_1, \dots, x_n$ , tako da važi  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . U tom slučaju važi  $\Omega = \sum_{i=1}^n B_i$ , gde je  $B_i = \{\omega | X(\omega) = x_i\}$  i  $X = \sum_{i=1}^n x_i I_{B_i}$ .

Integral proste slučajne promenljive  $X$  se definiše sa

$$\int X dP = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i).$$

**Definicija 1.5 (Funkcija raspodele).** Funkcija  $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definisana sa

$$F(x) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) < x),$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive  $X$ .

**Definicija 1.6 (Gustina raspodele).** Slučajna promenljiva  $X$  ima gustinu raspodele verovatnoća  $\varphi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , gde je  $\varphi$  nenegativna, integrabilna funkcija, ako važi

$$P(X \in B) = \int_B \varphi(x) dx,$$

za svaki skup  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Definicija 1.7 (Normalna raspodela).** Slučajna promenljiva  $X$  ima normalnu  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  raspodelu,  $m \in \mathbb{R}$  i  $\sigma > 0$ , ako je njena gustina raspodele

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Kada su parametri normalne raspodele  $m = 0$  i  $\sigma^2 = 1$ , dobijamo normalnu  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodelu koja se naziva standardizovana normalna raspodela.

**Definicija 1.8 (Očekivanje).** Očekivanje slučajne promenljive  $X$  sa funkcijom raspodele  $F(x) = P(X \leq x)$ , u oznaci  $E(X)$ , se definiše sa

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dF(x).$$

Za prostu slučajnu promenljivu  $X$  tada važi

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

**Teorema 1.1 (Radon-Nikodym).** *Ako su  $P$  i  $\bar{P}$  dve mere verovatnoća na prostoru  $(\Omega, \mathcal{B})$  sa osobinom da za svako  $B \in \mathcal{B}$ , ako je  $P(B) = 0$  sledi da je  $\bar{P}(B) = 0$ , tada postoji nenegativna slučajna promenljiva  $\Lambda$  takva za svako  $C \in \mathcal{B}$  važi  $\bar{P}(C) = \int_C \Lambda dP$ . Ovu slučajnu promenljivu zovemo Radon-Nikodym izvod i zapisujemo kao*

$$\Lambda = \frac{d\bar{P}}{dP}|_{\mathcal{B}}.$$

**Definicija 1.9 (Uslovna verovatnoća).** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  prostor verovatnoća i  $A, B \in \mathcal{F}$  i  $P(B) > 0$ . Verovatnoća događaja  $A$  pod uslovom da se realizovao događaj  $B$ , odnosno uslovna verovatnoća  $P(A|B)$ , je data sa

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

**Definicija 1.10 (Uslovno očekivanje).** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  prostor verovatnoća i neka je  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -polje,  $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ . Ako je  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna slučajna promenljiva, definišemo uslovno očekivanje  $E(X|\mathcal{G})$  kao proizvoljnu slučajnu promenljivu takvu da

1.  $E(X|\mathcal{G})$  je  $\mathcal{G}$ -merljiva
2.  $\int_B X dP = \int_B E(X|\mathcal{G}) dP$  za svako  $B \in \mathcal{G}$ .

Egzistenciju slučajne promenljive  $E(X|\mathcal{G})$  nam obezbeđuje Teorema 1.1 jer je  $X$  nenegativna i integrabilna funkcija.

**Teorema 1.2 (Osobine uslovnog očekivanja).** *Uslovno očekivanje ima sledeće osobine:*

1.  $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$ ;
2. ako je  $X$  nezavisno od  $\mathcal{G}$  tada  $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ ;
3. ako je  $\mathcal{Y} \leq \mathcal{G}$  važi  $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{Y}) = E(E(X|\mathcal{Y})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{Y})$ ;
4. ako su  $a$  i  $b$  konstante tada  $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$ ;
5. ako je  $X$   $\mathcal{G}$ -merljivo i  $XY$  integrabilno tada  $E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G})$ .

## Osnovni pojmovi stohastičke analize

**Definicija 1.11 (Stohastički proces).** Familija realnih slučajnih promenljivih  $\{Y_k\}_{k \in K}$  definisanih na istom prostoru verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se zove stohastički proces.

Skup  $K$  se naziva parametarski skup.

Odmah možemo uočiti da je stohastički proces funkcija dve promenljive:  $k \in K$  i  $\omega \in \Omega$ . Ako fiksiramo  $k \in K$  dobijamo jednu slučajnu promenljivu  $X_k$ , a ukoliko fiksiramo  $\omega \in \Omega$  dobijamo jednu realnu funkciju  $X(\omega)$  definisanu na skupu  $K$ .

U radu će se uglavnom pretpostavljati da je parametarski skup  $K$  skup prirodnih brojeva  $\mathbb{N}$ . Ukoliko je parametarski skup konačan tada jednostavno imamo konačno mnogo slučajnih promenljivih.

Pojam stohastičkog procesa je od izuzetnog značaja u radu, jer ćemo procese kretanja cena kao i prinosa rizičnih aktiva dizajnirati da upravo budu stohastički procesi.

**Teorema 1.3 (Kolmogorov).** *Neka su  $P_{i_1, \dots, i_m}$  mere verovatnoća na  $\mathbb{R}^{nm}$  takve da su za  $\forall i_1, \dots, i_m, m \in \mathbb{N}$  ispunjeni uslovi:*

1. ako je  $\{\delta(1), \dots, \delta(m)\}$  permutacija brojeva  $1, \dots, m$  važi

$$P_{i_{\delta(1)}, \dots, i_{\delta(m)}}(F_1 \times \dots \times F_m) = P_{i_1, \dots, i_m}(F_{\delta^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\delta^{-1}(m)})$$

2. za  $\forall l \in \mathbb{N}$   $P_{i_1, \dots, i_m}(F_1 \times \dots \times F_m) = P_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, i_{m+l}}(F_1 \times \dots \times F_m \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n)$ .

Tada postoji prostor verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  i na njemu definisan  $\mathbb{R}^n$ -vrednosni stohastički proces  $\{Y_k\}$  za koji važi da je za  $\forall i_1, \dots, i_m, m \in \mathbb{N}$  i za  $\forall F_1, \dots, F_m$ :

$$P_{i_1, \dots, i_m}(F_1 \times \dots \times F_m) = P(Y_{i_1} \in F_1, \dots, Y_{i_m} \in F_m).$$

**Definicija 1.12 (Filtracija).** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  prostor sa  $\sigma$ -algebrom. Niz  $\sigma$ -polja  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in K}$  na  $\Omega$ , gde je  $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}$  se zove filtracija ako za svako  $t, k \in K, t \leq k$  važi:

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_k.$$

Za ovaj rad su nam naročito značajne filtracije generisane stohastičkim procesima. Prirodna filtracija stohastičkog procesa  $Y_0, Y_1, \dots$  se definiše sa

$$\mathcal{F}_k = \{(Y_0, \dots, Y_k) \in B, B \subset \mathbb{R}^{k+1}\},$$

gde je  $B$  Borelov skup.

Dakle,  $\mathcal{F}_k$  zavisi od prvih  $k + 1$  elemenata stohastičkog prostora. Drugim rečima, ova prirodna filtracija nam daje istoriju stohastičkog procesa do vremena  $k$ . Koristićemo sledeću notaciju. Za slučajnu promenljivu  $Y$ ,  $\sigma(Y)$  predstavlja  $\sigma$ -algebru generisanu sa  $Y$  koja sadrži sve događaje koji se mogu izraziti u  $Y$ . Slično, za stohastički proces  $Y_0, Y_1, \dots$  sa  $\mathcal{F}_k = \sigma(Y_0, \dots, Y_k)$  označavaćemo prirodnu filtraciju koja sadrži sve informacije dostupne u trenutku  $k$ .

Za proces  $\{Y_k\}_{k \in K}$  kažemo da je adaptiran filtraciji  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in K}$  ako je slučajna promenljiva  $Y_k$   $\mathcal{F}_k$ -merljiva za  $\forall k \in K$ .

Za proces  $\{Y_k\}_{k \in K}$  kažemo da je predvidiv s obzirom na filtraciju  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in K}$  ako je slučajna promenljiva  $Y_k$   $\mathcal{F}_{k-1}$ -merljiva za  $\forall k \in K$ .

**Definicija 1.13 (Martingal).** Stohastički proces  $\{Y_k\}_{k \in K}$  se zove martingal, s obzirom na filtraciju  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in K}$ , ako je adaptiran ovoj filtraciji i  $E(Y_k | \mathcal{F}_t) = Y_t$  za svako  $t < k$ .

Za kraj pregleda osnovnih pojmova definišemo jedan poseban stohastički proces, značajan kako po svojoj strukturi tako i značajan za dizajniranje drugih procesa. Braunovo kretanje se često označava sa  $W$ , po naučniku Wiener-u koji se među prvima bavio njegovim izučavanjem.

**Definicija 1.14 (Braunovo kretanje).** Za stohastički proces  $\widetilde{W}_k, k \geq 0$  kažemo da je Braunovo kretanje sa driftom  $\mu$  i volatilnosti  $\sigma$  ako:

1.  $\widetilde{W}_0 = 0$ ;



2.  $\widetilde{W}_k$  ima nezavisne priraštaje, to jest za  $0 < k_1 < \dots < k_n < \dots$ , slučajne promenljive  $\widetilde{W}_{k_1} - \widetilde{W}_{k_0}, \widetilde{W}_{k_2} - \widetilde{W}_{k_1}, \dots, \widetilde{W}_{k_n} - \widetilde{W}_{k_{n-1}}, \dots$  su nezavisne;
3.  $\widetilde{W}_k - \widetilde{W}_t : \mathcal{N}(\mu(k-t), \sigma^2(k-t)), k \geq t \geq 0$ .

Ako specijalno izaberemo  $\mu = 0$  i  $\sigma = 1$  dobijamo Braunovo kretanje  $W_k$  koje se još i zove standardizovano Braunovo kretanje. Iz osobina normalne raspodele, sledi:

$$\widetilde{W}_k = \mu k + \sigma W_k.$$

## 1.2 Motivacija

Fundamentalni problem u svetu finansija je odabir optimalnog portfolia, odnosno optimalan izbor rizičnih aktiva za dati kapital. Značajnu ulogu prilikom rešavanja tog problema ima stohastičko programiranje. Stohastičko programiranje je problem optimizacije u kom su neki od parametara nepoznati, ali opisani pomoću slučajnih promenljivih kada je reč o problemima jednog perioda, ili pomoću stohastičkih procesa za probleme više perioda. Pošto su prinosi većine rizičnih aktiva neizvesni, samim tim su i ishodi investiranja neizvesni. Stoga, donosioci odluka žele da postignu optimalnu kombinaciju rizika i očekivanih prinosa, a to se upravo postiže rešavanjem problema stohastičkog programiranja. Međutim, u većini slučajeva nije moguće konstruisati model optimizacije podlozan jednostavnom računanju sa neprekidnim raspodelama, pa se u cilju rešavanja stohastičkih programa, slučajni parametri modela moraju aproksimirati diskretnim raspodelama sa konačnim brojem ishoda (scenarija). Drugim rečima, moramo generisati scenarije.

Scenario je jedna moguća realizacija svih nepoznatih parametara. To jest, scenariji opisuju moguće vrednosti slučajnih promenljivih koje predstavljaju nepoznate parametre modela, u nekom budućem vremenskom trenutku. Prilikom generacije scenarija konstruišu se scenariji koji reprezentuju prihvatljive ishode, i pesimistične i optimistične. Svaki scenario je ponderisan svojom verovatnoćom dešavanja.

Poznato je da je svrha scenario generatora, ne da dobro aproksimiraju raspodele, već da daju dobre aproksimacije rešenja problema optimizacije. Zato nam je važno da naš generator ima poželjne osobine kao što su:

- a) Tačnost- ova osobina se prirodno nameće jer želimo da koristimo skupove scenarija koji su tačne reprezentacije slučajnih prinosa rizičnih aktiva. Iz tog razloga, cilj nam je da izaberemo model koji je izveden iz preovladavajuće teorije i koji obuhvata sve aspekte koje mi smatramo značajnim jer mi ne znamo tačne raspodele;

- b) Konzistentnost - kada razmatramo višestruke povezane slučajne promenljive, njihove vrednosti pod scenariom moraju biti međusobno konzistentne;
- c) Stabilnost - stabilnost metode za generaciju scenarija se razmatra kroz određeni model odluke. Kombinovana upotreba generatora scenarija i modela odluke treba da dovede do dobre odluke. Dobra odluka treba, u najmanju ruku, da bude stabilna. Odnosno, optimalna rešenja za različite skupove scenarija ne bi trebalo da variraju značajno.

Generacija scenarija budućih prinosa vremenskih serija je blisko povezana sa modeliranjem finansijskih vremenskih serija. Ipak, metodi generacije scenarija zasnovani na klasičnim modelima finansijskih vremenskih serija često ne uspevaju da objasne ekstremna kretanja cena.

Tradicionalni metodi za modeliranje cena akcija pretpostavljaju da cena podloge prati geometrijsko Braunovo kretanje. U tom slučaju, cene akcije, koje su stohastički procesi u diskretnom vremenu, se aproksimiraju neprekidnim u vremenu stohastičkim procesima. Empirijske studije ukazuju da ovaj model, iako je postao standardan u finansijama, ne uspeva da objasni važne karakteristike vremenskih serija, kao to je ekstremno ponašanje ili grupisanje volatiliteti. Stoga, generatori scenarija zasnovani na ovom modelu se pokazuju kao neprikladni za određene probleme optimizacije.

Pored geometrijskog Braunovog kretanja, kao popularni modeli za finansijske vremenske serije izdvajaju se modeli ARCH-GARCH familije, koji su dizajnirani za modeliranje vremenski zavisne varijanse. I ovi metodi se mogu koristiti za generaciju scenarija uzorkovanjem iz pretpostavljenih distribucija. Ipak, i za ARCH-GARCH familiju se vezuju slični nedostaci kao kod geometrijskog Braunovog kretanja.

U ovom radu predstavljen je koncept generatora scenarija zasnovan na skrivenim modelima Markova. Skriveni modeli Markova predstavljaju poseban model sa promenljivim stanjima, u kom razmatramo dva stohastička procesa: jedan povezan sa vremenskom serijom od interesa, dok drugi osnovni stohastički proces koji opisuje stanja sistema se ne može direktno opažati to jest, skriven je.

Naš cilj je da modeliramo finansijske vremenske serije koristeći skrivene modele Markova kako bi generisali scenarije koji se potom mogu integrisati u probleme finansijskog odlučivanja.

## 2

# Skriveni modeli Markova

Statistički metod *Skriveni lanci Markova* su uveli kasnih šezdesetih godina prošlog veka Baum i Petrie [12]. Ipak, intenzivnije proučavanje ovog modela počelo je u poslednjih nekoliko godina. Dva su ključna razloga za to. Jedan leži u tome da su ovako definisani modeli vrlo bogate strukture, te tako definisani predstavljaju sjajnu osnovu za opis velikog broja različitih problema. Drugi razlog leži u tome da je njihova kompjuterska struktura vrlo složena, te je neophodno imati jaku računarsku podršku u implementaciji ovih modela.

Klasa ovih modela je često ograničena na modele čija su stanja i mere u diskretnom skupu i vremenu. Ipak, nema razloga da se ove hipoteze ne prošire i model proširi na neprekidni sa opservacijama u neprekidnom rangu. Najznačajnija dva pojma u teoriji skrivenih Markovskih modela su kontrola i ocenjivanje. Prilikom primene modela upošljavaju se referentni metodi verovatnoće to jest, skup procedura dizajniran za reformulaciju originalnih ocena i kontrolnih zadataka u fiktivnom svetu tako da se mogu primeniti dobro poznati rezultati za identično raspodeljene nezavisne slučajne promenljive. A potom se ovi rezultati reinterpreтираju nazad u realni svet sa originalnom merom verovatnoće.

Termin skrivenih Markovskih procesa je mnogo poznatiji u procesima signala, komunikacionim sistemima i analizama vremenskih serija kao što su vremenski podaci, kvar poluprovodnika itd., ali odnedavno dobija veliko priznanje u finansijama, ekonomiji i menadžmentu. Skriveni lanci Markova postaju osnovni alat za modeliranje stohastičkih sistema u ekonometriji i finansijskim vremenskim serijama. U ekonometriju ih je prvi uveo Elliot [13] prilikom rešavanja problema alokacija aktiva, a kasnije se ovaj moćni model primenjuje na probleme vezane za cene aktiva i ocenjivanje stohastičke volatilnosti.

Pre detaljnog teorijskog uvođenja koncepta skrivenih lanaca Markova, podsetićemo se pojma lanaca Markova.

## 2.1 Lanci Markova

Markovski procesi su dobili ime po ruskom matematičaru Andrey Markov-u koji se bavio proučavanjem teorije stohastičkih procesa. Posedovati osobinu Markova znači da je proces bez memorije. Drugim rečima, buduće stanje zavisi samo od sadašnjeg stanja i stoga je nezavisno od prošlosti. Dakle, osnovni pristup koji leži u procesima Markova jeste: budućnost je nezavisna od prošlosti kada znamo sadašnjost. Intuitivno, Markovska osobina kaže sledeće: ako je poznato stanje sistema u nekom vremenskom trenutku  $s$  (sadašnjost), tada dodatne informacije koje se odnose na ponašanje sistema u trenucima  $t < s$  (prošlost) ne utiču na naše poznavanje razvoja sistema za  $t > s$  (budućnost).

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  prostor verovatnoće i  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  niz slučajnih promenljivih sa konačnim skupom stanja  $S_X$ .

**Definicija 2.1 (Lanac Markova).** Stohastički proces  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  se zove lanac Markova ako je ispunjena osobina Markova:

$$P(X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k),$$
$$\forall k \geq 1, x_0, \dots, x_k, x_{k+1} \in S_X.$$

Lanac Markova karakteriše njegova matrica prelaza  $\Pi$ . Uopšteno, elemenat  $\pi_{ij}$  matrice prelaza  $\Pi$  označava verovatnoću da lanac Markova pređe iz stanja  $i$  u stanje  $j$ :

$$\pi_{ij} = P(X_{k+1} = j | X_k = i),$$

gde su  $i, j \in S_X$ .

Za lanac Markova se kaže da je homogen ako verovatnoće prelaza ne zavise od vremena  $k$ . U ovom radu radićemo samo sa homogenim lancima.

U tom slučaju, verovatnoće prelaza u  $l$  koraka se mogu izračunati stepenovanjem matrice  $\Pi$  na stepen  $l$ . To jest,

$$P(X_k = j | X_{k-l} = i) = \pi_{ij}^{(l)},$$

gde je  $\pi_{ij}^{(l)} = (\Pi^l)_{ij}$  ( $i, j$ ) elemenat matrice verovatnoće prelaza u  $l$  koraka.

Ako se setimo da je skup  $S_X$  konačan, sledi da je moguće predstaviti lanac Markova preko kanoničke baze  $e_1, \dots, e_N$  prostora  $\mathbb{R}^N$ , gde je  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ , a  $T$  označava transponovanje. Sa originalnim skupom stanja  $S_X$ , kada je  $s_k = i$  lanac Markova je

predstavljen sa  $e_i$ , jediničnim vektorom sa jedinicom na  $i$ -toj poziciji i svim ostalim nulama.

Uslovno očekivanje promenljive  $X_k$  je tada dato  $i$ -tom kolonom matrice prelaza  $\Pi$ , odnosno:

$$E(X_k | X_{k-1} = e_i) = \begin{bmatrix} \pi_{i1} \\ \vdots \\ \pi_{iN} \end{bmatrix}.$$

Stoga, imamo:

$$E(X_k | X_{k-1}) = \Pi X_{k-1}.$$

Imajući u vidu sve prethodno napisano, vidimo da se lanac Markova, predstavljen u formi jediničnih vektora, može zapisati na sledeći način:

$$X_{k+1} = \Pi X_{k-1} + V_{k+1},$$

gde je  $V_{k+1}$  priraštaj martingala koji nije moguće predvideti na osnovu prethodnih stanja. Iz prethodne jednačine imamo:

$$E(X_{k+1} | X_{k-l}) = \Pi^l X_{k-l}.$$

### Markovski lanac kretanja akcija na tržištu

**Primer 2.1.** [11] Kako je cilj rada da modele Markova iskoristimo za modeliranje finansijskih vremenskih serija, sada ćemo na ilustrativnom primeru da povežemo ta dva pojma. Tačnije, hoćemo da iskoristimo lanac Markova za modeliranje kretanja cena akcija. Posmatramo izvesnu akciju na tržištu i kretanje njene cene predstavljamo modelom sa pet stanja.

Na slici 2.1 imamo graf sa čvorovima 1, 2, 3, 4 i 5. Navedeni čvorovi prezentuju vektor mogućeg kretanja, i to na sledeći naći način:

1 – *veliki rast*,

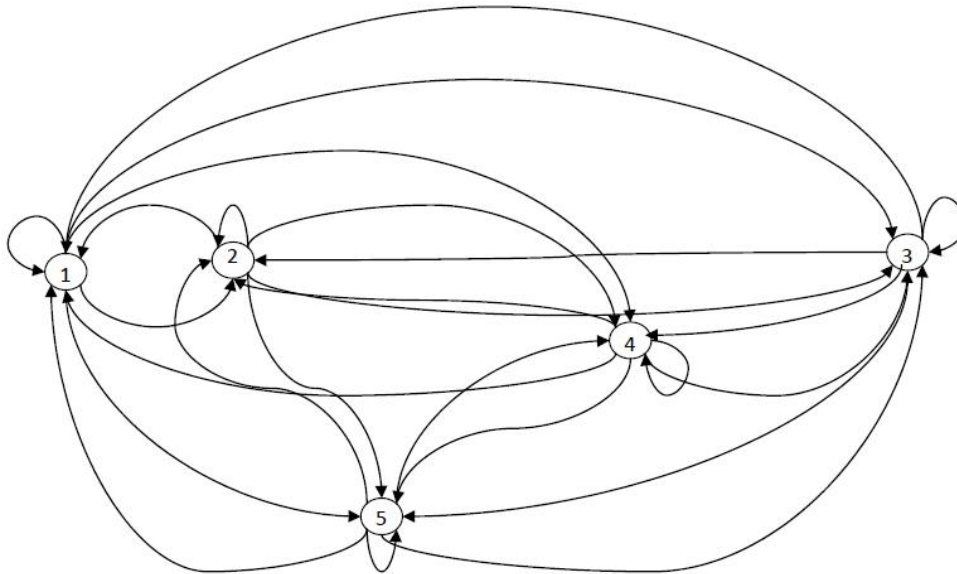
2 – *mali rast*,

3 – *bez promene*,

4 – *mali pad*,

i

5 – *veliki pad*.



Slika 2.1: Modeliranje cena akcije pomoću lanaca Markova.

Svaki od čvorova u grafu predstavlja jedno kretanje. Kako vreme teče, model se pomera iz jednog u drugo stanje, baš kao što se dešavaju svakodnevne fluktacije cene akcije. Uz pomoć modela na figuri u mogućnosti smo da odgovorimo na neka veoma interesantna pitanja o ponašanju akcije tokom vremena. Na primer, kolika je verovatnoća sledećeg sklopa u sedam izastopnih dana:

*veliki porast, bez promene, bez promene, mali pad, veliki pad, mali porast, bez promene?*

Ako definišemo niz stanja sa  $\{1, 3, 3, 4, 5, 2, 3\}$ , za dati lanac Markova, verovatnoća da se dogodi takav niz,  $P\{1, 3, 3, 4, 5, 2, 3\}$ , se može izračunati na sledeći način

$$\begin{aligned} P(1, 3, 3, 4, 5, 2, 3|\Pi, \pi) &= P(1)P(3|1)P(3|3)P(4|3)P(5|4)P(2|5)P(3|2) \\ &= \pi_0\pi_{31}\pi_{33}\pi_{43}\pi_{54}\pi_{25}\pi_{32}, \end{aligned}$$

gde je  $\pi_0$  početna verovatnoća (verovatnoća da se krene iz stanja 1).

Uopšteno, verovatnoća niza stanja  $X_1, \dots, X_T$  se može izračunati kao proizvod verovatnoća prelaza

$$\begin{aligned}
P(X|\Pi, \pi_0) &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2) \cdots P(X_T|X_1, \dots, X_{T-1}) \\
&= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2) \cdots P(X_T|X_{T-1}) \\
&= \prod_{k=1}^{T-1} \pi_0 P(X_{k+1}|X_k).
\end{aligned}$$

## 2.2 Skriveni lanci Markova

Markovski modeli opisani u prethodnom odeljku imaju ograničenu moć u većini primena. Stoga je ideja da se ovaj metod proširi u model koji ima veću moć reprezentacije-model skrivenih lanaca Markova. U skrivenim Markovskim modelima, ne znamo ništa o generatorima niza opažanja. Takođe, broj stanja, verovatnoće prelaza i stanja iz kojih se generišu opažanja su nepoznati.

**Definicija 2.2 (Skriveni lanac Markova).** Uređeni par stohastičkih procesa  $\{X, Y\}$ , gde je  $X = \{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  i  $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , se zove skriveni lanac Markova ako je  $X$  lanac Markova koji se ne može direktno opažati, a  $Y_k = f(X_k, \omega_k)$ , gde je  $f$  Borelova funkcija i  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih koje su nezavisne i od  $X$ .

Proces  $Y$  se zove proces opažanja.

Generalno, forma skrivenih Markovskih modela ima sledeća obeležja:

1.  $\{X\} = \{X_1, X_2, \dots\}$  je lanac Markova koji ne možemo direktno opažati, takozvani niz signala;
2.  $\{Y\} = \{Y_1, Y_2, \dots\}$  je niz opažanja;
3.  $N$  je dimenzija skupa stanja lanca Markova;
4.  $M$  je dimenzija skupa stanja niza opažanja;
5.  $S_X = \{s_1, \dots, s_N\}$  je skup stanja lanca Markova;
6.  $O_Y = \{o_1, \dots, o_M\}$  je skup stanja niza opažanja;
7. Matrica verovatnoće prelaza  $\Pi = [\pi_{ij}]_{i,j=1,\dots,N}$  definisana sa

$$\pi_{ij} = P(X_{k+1} = s_j | X_k = s_i), i, j = 1, \dots, N;$$

8. Uslovna raspodela verovatnoća simbola opažanja  $B_{M \times N} = [b_{ij}]_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, M}$ . Funkcija verovatnoće za svako stanje  $i$  je data sa:

$$b_{ij} = P(Y_k = o_j | X_k = s_i);$$

9. Raspodela početnog stanja:  $A_{N \times 1} = a_i, i = 1, \dots, N$ .

U prethodnom odeljku smo predstavili lanac Markova u sledećoj formi:

$$X_{k+1} = \Pi X_k + V_{k+1}.$$

Slično, proces opažanja  $\{Y_k\}$  može pratiti različite dinamike, ali u ovom radu se fokusiramo na sledeću:

$$Y_{k+1} = \langle \alpha, X_k \rangle + \langle \beta, X_k \rangle z_{k+1},$$

gde su  $z_{k+1}, k \in \mathbb{N}$  nezavisne normalne slučajne promenljive, a  $\alpha$  i  $\beta$  realni vektori odgovarajućih dimenzija.

### Fundamentalni problemi skrivenih lanaca Markova

Postoje tri osnovna problema koja se vezuju za skrivene lance Markova:

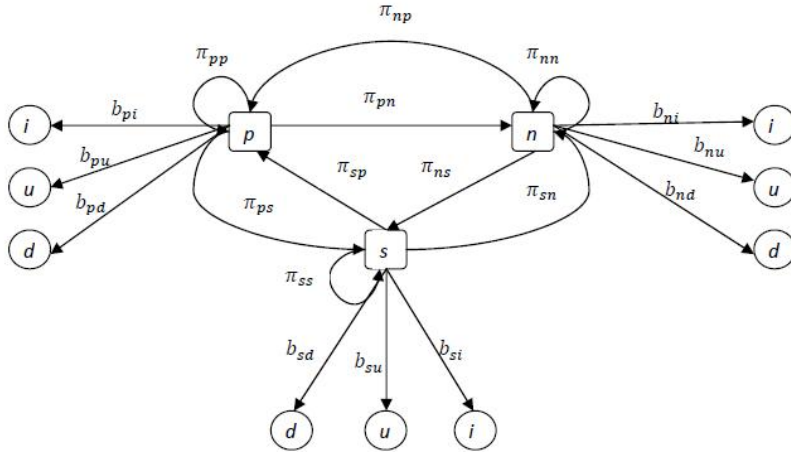
1. Za dati model  $\xi = (\Pi, B, A)$  i dati niz opažanja  $\{Y_1, Y_2, \dots\}$  kako da efikasno izračunamo verovatnoću niza opažanja, to jest  $P(Y|\xi)$ ? Odnosno, kada nam je poznat model kolika je verovatnoća da se dobije određeni niz opažanja? Ovaj problem se rešava forward-backward algoritmom.
2. Za dati model  $\xi = (\Pi, B, A)$  i niz opažanja  $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ , koje je osnovno stanje niza koje najbolje objašnjava opažanja? Drugim rečima, tražimo najbolji osnovni niz  $\{X_1, X_2, \dots\}$  pod datim uslovima. Problem se rešava Viterbi algoritmima.
3. Za dati niz opažanja  $\{X_1, X_2, \dots\}$  i skup stanja  $S_X = \{s_1, \dots, s_N\}$ , kako da prilagodimo parametre tako da dobijemo model  $\xi = (\Pi, B, A)$  koji maksimizira  $P(Y|\xi)$ ? Dakle, u ovom problemu tražimo najbolje ocene parametara modela  $\xi = (\Pi, B, A)$ . One se dobijaju Baum-Welch algoritmima.

Ukoliko zamislimo  $\{Y\}$  kao posmatranu finansijsku vremensku seriju,  $\{X\}$  kao osnovnu ekonomsku silu prvi problem se svodi na predviđanje budućnosti korišćenjem modela sa istorijskim opažanjima. Drugi problem se odnosi na pronalazak skrivene putanje ekonomskih sila. Treći problem je od najvećeg interesa jer se on bavi treniranjem modela, odnosno fokus u trećem problemu je na ocenjivanju parametara modela koristeći opažene informacije.

### Skriveni Markovski lanac kretanja akcija na tržištu



**Primer 2.2.** Slično kao i za lance Markova, sada ćemo na jednostavnom primeru da pojasnimo koncept skrivenih Markovskih modela i povežemo sa modeliranjem finansijskih vremenskih serija. Pretpostavimo da želimo da modeliramo kretanje cene rizične aktive. Imamo njene dnevne vrednosti i posmatramo promene u ceni u dva uzastopna dana: rast cene ( $i$ ), pad cene ( $d$ ), nepromenjena cena ( $u$ ). Kretanje cena možemo modelirati proces pomoću skrivenih lanaca Markova sa tri stanja. Svako stanje odgovara drugom trendu: pozitivan ( $p$ ) ukoliko učesnici na tržištu misle da je cena potcenjena; negativan ( $n$ ) ukoliko učesnici na tržištu misle da je cena precenjena; ili stacionaran ( $s$ ). Mi ne možemo eksplicitno da odredimo mišljenje učesnika na berzi ali možemo da posmatramo fluktacije cena. Stoga, pretpostavljamo da naš model ima  $M = 3$  opservacije:  $i, d, u$ . Rezultujući model je opisan na figuri 2.2.



Slika 2.2: Skirveni lanac Markova sa tri stanja.

Svako stanje može emitovati isti skup simbola, ali sa različitim verovatnoćama. Na primer, rast cene je verovatniji tokom pozitivnog trenda, nego tokom negativnog trenda, stoga  $b_{pi} > b_{ni}$ , i obrnuto  $b_{nd} > b_{pd}$ .

**Primer 2.3.** [11] Sada ćemo da modeliramo problem iz primera 2.1 pomoću skrivenih modela Markova. Umesto kombinovanja svakog stanja sa determinističkim ishodom

(kao to je *veliki rast*, *mali rast*, *bez promene*, *mali pad*, *veliki pad* ), svako stanje lanca je povezano sa funkcijom verovatnoće. U vremenu  $k$ , opažanje  $o_j$  je generisano funkcijom verovatnoće  $b_{ij}$ , koja je povezana sa stanjem  $i$ , sa verovatnoćom:

$$b_{ij} = P(o_j | s_i).$$

Tabela 2.1 pokazuje skup strategija koje može da donese profesionalni finansijer. Strategije su modelirane kao stanja. Svaka strategija je povezana sa verovatnoćom generisanja mogućeg kretanja cene akcije. Ove verovatnoće su nepoznate javnosti, samo ih zna donosilac odluke.

*	stanje 1	stanje 2	stanje 3	stanje 4	stanje 5
veliki rast	0.1	0.15	0.05	0.4	0.2
mali rast	0.4	0.3	0.05	0.3	0.2
bez promene	0.2	0.3	0.2	0.2	0.2
mali pad	0.15	0.15	0.4	0.05	0.2
veliki pad	0.05	0.1	0.3	0.05	0.2

*Tabela 2.1: Skup stanja.*

Tabela 2.1 pokazuje primer skrivenih Markovskih modela za modeliranje predviđanja investitora o tržištu zasnovanom na skupu investicionih strategija. Pretpostavljamo da investicionar ima pet strategija, svaka od njih sa posebnom procenom o tržišnom kretanju izvesnog dana (*veliki rast*, *mali rast*, *bez promene*, *mali pad*, *veliki pad*). Takođe pretpostavljamo da on izvodi predviđanja o tržištu svaki dan sa samo jednom strategijom. Sada, kako profesionalac donosi procene kolika je verovatnoća da se dogodi niz predviđanja:

*mali pad, mali skok,*

ako predviđanje počinje uzimanjem strategije 2 prvog dana.

Da bismo odgovorili na ovo pitanje treba da razmišljamo o skrivenim Markovskim modelima kao finansijski profesionalci. Svaka od pet strategija je jedno stanje lanca. Skup kretanja ima sve simbole kretanja i svaki simbol je povezan sa jednim stanjem. Svaka strategija ima različite verovatnoće za sve simbole kretanja. Svako stanje je povezano sa svim drugim stanjima sa verovatnoćama prelaza.

Za razliku od lanca Markova predstavljenog u prethodnom odeljku, model skrivenih Markovskih lanaca će odabrati strategiju za praćenje one koja je zasnovana na verovatnoći opažanja. Ključ skrivenih Markovskih modela jeste da oni mogu da odaberu najbolji ukupan niz strategija zasnovan na nizu opažanja. Uvođenjem funkcije gustine za svako stanje lanca daje bolju moć reprezentacije nego fiksne strategije povezane sa stanjima. Koraci za generisanje niza predviđanja:

verovatnoće	stanje 1	stanje 2	stanje 3	stanje 4	stanje 5
stanje 1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3
stanje 2	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
stanje 3	0.2	0.3	0.1	0.2	0.2
stanje 4	0.3	0.2	0.2	0.15	0.15
stanje 5	0.3	0.2	0.2	0.15	0.15

Tabela 2.2: Matrica verovatnoća prelaza.

1. Izaberemo početno stanje, odnosno strategiju  $X_1 = i$  prema početnoj raspodeli  $A$ .
2. Podesimo se vremenski korak  $k = 1$ , pošto smo na prvom danu niza.
3. Na osnovu strategije trenutnog stanja  $i$ , odnosno  $b_{ij}$  dobijamo predviđanje za trenutni dan. Na primer, verovatnoća da se desi veliki skok ako prvog dana odaberemo strategiju 2 je 0.15.
4. Prelazimo na sledeće stanje  $X_{k+1}$  u skladu sa distribucijom verovatnoća prelaza.
5. Podesimo  $k = k + 1$  i idemo na korak 3, ako je  $k \leq T$ , inače završavamo.

Da bismo odgovorili na drugo pitanje, sumiramo sve verovatnoće niza kretanja koje mogu da se dese, kroz različita stanja niza. Znamo da predviđanja počinju sa strategijom 2, što znači da je početno stanje 2. Postoji 5 mogućih stanja za drugi dan. Pa je verovatnoća da se desi niz *mali pad*, *mali rast*:

$$0.15 + 0.1 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.365.$$

U ovom primeru možemo videti da postoji dobro slaganje između analize serijskih podataka i skrivenih Markovskih modela. Posebno u slučaju analiza i predviđanja finansijskih vremenskih serija, gde podaci mogu biti generisani nekim stohastičkim procesima koji nisu poznati javnosti. Baš kao u primeru, ako ne znamo koju će strategiju profesionalac da izabere, kao ni broj strategija, možemo posmatrati imaginarnog profesionalca kao osnovnu moć koja dovodi do kretanja tržišta. Takođe, kao što je pokazano u primeru, skriveni lanci Markova imaju veću moć reprezentacije od običnih lanaca Markova. Verovatnoće prelaza, kao i funkcija verovatnoće koja generiše niz opažanja su prilagodljive.

# 3

## Tradicionalne metode za generaciju scenarija

### Modeliranje finansijskih vremenskih serija

Problem generacije scenarija je blisko povezan sa modeliranjem finansijskih vremenskih serija. Najjednostavnija definicija za finansijske vremenske serije jeste da su one niz cena rizičnih aktiva tokom određenog vremenskog perioda. Modeliranje takvih vremenskih serija predstavlja izazov za istraživače već skoro čitav vek. Posebno, u poslednjih dvadeset godina, sa razvojem finansijske matematike, ekonometrije, finansijskog inženjeringa, razvilo se nekoliko dobro priznatih teorija u vezi sa pomenutim problemom. Većina studija je nastojala da okarakteriše prirodu finansijskih vremenskih serija, koja je uvek bila opisivana kao kombinacija drifta i volatilnosti. Modeli su uglavnom razvijani sa fokusom na volatilnosti.

Volatilnost se odnosi na prostiranje svih verovatnih ishoda neke slučajne promenljive. U finansijama, ta slučajna promenljiva je tipično prinos neke rizične aktive. Volatilnost se uglavnom definiše kao standardna devijacija logaritma ishoda podloga. Često se prema volatilnosti odnosimo kao prema meri rizika. Međutim, primetimo da postoji nekoliko mera rizika, kao što su vrednost pod rizikom (VaR), maksimalni pad (drawdown), "loša strana" devijacije (downside deviation). Ali, u suštini, ne postoji dovoljno dobra mera rizika. Šta više i sam rizik je subjektivan, pa ne možemo riziku da dodelimo konkretan broj. Ipak, mi raspoložemo moćnim matematičkim alatima koji nam omogućavaju da odredimo "količinu" rizika. Volatilnost je jedan od njih. Dakle, bitno je da uočimo, da je volatilnost povezana sa rizikom, ali nije isto što i rizik. Rizik je povezan sa neželjenim ishodima, dok volatilnost kao mera neke neizvesnosti može biti i usled pozitivnog ishoda. Volatilnost pretpostavlja da što više vrednost aktive odstupa od očekivane, to je podloga rizičnija. Upravo ova činjenica implicira, ukoliko

pretpostavimo da prinos ima normalnu raspodelu i ako smatramo da su visoki pozitivni prinosi opasni (rizični), da je volatilnost relativno dobra mera rizika. Pored toga, često je premija rizika funkcija volatilnosti.

Osnovni nedostatak koji se javlja kod volatilnosti jeste što je ne možemo direktno opažati. Zaista, ako posmatramo dnevni prinos neke rizične aktive, recimo akcije, pošto imamo samo informacije o cenama na otvaranju i zatvaranju berze odnosno, imamo samo jednu informaciju, pa ne možemo opažati ponašanje tokom celog dana. Štaviše, i da imamo dnevne podatke o podlogama, postoji i volatilnost "tokom" noći koju ne možemo opažati. Iz tog razloga je veoma teško davati procene o volatilnosti. Ipak, možemo zapaziti neke njene osobine. Postoji grupisanje volatilnosti. Volatilnost je neprekidna u vremenu. Ne divergira i čini se da različito reaguje na veliki rast ili pad (efekat leveridža). Empirijska ponašanja nam sugerisu da su prinosi nekorelisani ali ne i nezavisni. Uočeno je da je njihova veličina korelisana u vremenu (grupisanje volatilnosti), pa je stoga volatilnost promenljiva u vremenu. Naime, model koji je uveo koncept volatilnosti i drifta u procese prinosa, geometrijsko Braunovo kretanje, pretpostavlja da su obe veličine konstantane. U ovom poglavlju predstavljamo taj model, a nakon otkrivanja svih njegovih nedostataka uvodimo modele koji pretpostavljaju da je volatilnost stohastička, odnosno promenljiva veličina- modele ARCH-GARCH familije i modele sa promenljivim stanjima.

## 3.1 Model sa konstantnom volatilnosti

### 3.1.1 Geometrijsko Braunovo kretanje

Među brojnim modelima za modeliranje finansijskih vremenskih serija, prvi sa značajnijim priznanjem bio je model Braunovog kretanja. Cene akcija su, očigledno, stohastički procesi u diskretnom vremenu, pa zaista, ukoliko bismo cenu akcije posmatrali kao česticu koja je konstantno bombardovana manjim česticama u vidu transakcija sa tom akcijom, onda je normalna raspodela, odnosno Braunovo kretanje  $\widetilde{W}_k$ , prilično razuman izbor za modeliranje cena akcija. Međutim, tu se javljaju izvesni problemi:

- Braunovo kretanje može biti negativno, dok cena akcije ne može.
- Ako bi cena akcije u trenutku  $k$  bila  $\widetilde{W}_k$ , onda bi na osnovu definicije očekivana promena cene na intervalu  $[t, k]$  bila:

$$E\left(\widetilde{W}_k - \widetilde{W}_t\right) = \mu(k - t),$$

što bi značilo da ne zavisi od početne cene akcije, a to nije realna pretpostavka.

Dakle, u ovom modelu je pretpostavljeno da je veličina promene cene akcije nezavisna od same cene. Ipak, istorijski podaci nam govore da je promena veća ukoliko je nivo cene veći. Uzmimo ekstreman slučaj:  $\sigma = 0$ . Tada, ova akcija postaje bezrizična opcija sa trenutnom stopom prinosa  $\mu$ , dok Braunovo kretanje sugerise da je cena  $\mu k$ .

Pretpostavimo da je cena akcije u trenutku  $k$

$$S_k = S_0 e^{H_k},$$

gde  $H_k$  zovemo logaritamski rast cene akcije.

Tri decenije nakon formiranja opisanog modela, Bleck i Scholes su uočili da bi dobar izbor bio da se proces  $H_k$  modelira Braunovim kretanjem:  $\widetilde{W}_k$ . Proces  $e^{\widetilde{W}_k}$  je novi proces koji se naziva geometrijsko Braunovo kretanje. Pretpostavljamo da je logaritamski rast cene akcije Braunovo kretanje sa driftom  $\mu$  i volatilnosti  $\sigma$

$$H_k = \log\left(\frac{S_k}{S_0}\right) = \mu k + \sigma W_k.$$

Sledi

$$E(H_k) = \mu k$$

i

$$D(H_k) = \sigma^2 k.$$

Odnosno,

$$\log\left(\frac{S_k}{S_0}\right) : \mathcal{N}(\mu k, \sigma^2 k).$$

Ukoliko geometrijsko Braunovo kretanje zapišemo na sledeći način

$$dS_k = \mu S_k dk + \sigma S_k dw, \tag{3.1}$$

jasno se vidi da je trenutna stopa prinosa, pre nego sama cena Braunovo kretanje. U jednačini (3.1), drift  $\mu$  daje pravac kretanja trenutne stope prinosa, a volatilnost  $\sigma$  opisuje njenu tendenciju da se menja cena, odnosno-akcije su nestabilne pod većim ili češćim promenama cena.

Šta više, rešavanjem jednačine (3.1) dobijamo cenu akcije u vremenu  $k$

$$S_k = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})k + \sigma W_k}, \tag{3.2}$$

gde je  $S_0$  početna cena akcije.

Da rezimiramo, model geometrijskog Braunovog kretanja je veoma pogodan za modeliranje finansijskih vremenskih serija zbog sledećih činjenica:

- U slučaju da je  $\sigma = 0$  sledi da je  $S_k = S_0 e^{\mu k}$ , što je konzistentno sa činjenicom da će cena bezrizične aktive rasti vremenom kao to je slučaj sa trezorskim zapisima.
- Posmatrajmo

$$\begin{aligned} E\left(\frac{S_k}{S_0}\right) &= E\left(e^{\log \frac{S_k}{S_0}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 k}} e^{-\frac{(x-\mu k)^2}{2\sigma^2 k}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{(x-\mu k)^2}{2\sigma^2 k}} dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gde smo uveli oznaku  $x = \log \frac{S_k}{S_0}$ . Dalje, neka je

$$\begin{aligned} \frac{x - \mu k}{\sqrt{2k}\sigma} &= a. \\ \Rightarrow x &= \mu k + a\sqrt{2k}\sigma \\ \Rightarrow dx &= \sqrt{2k}\sigma da. \end{aligned}$$

Kada uvedemo ove zamene u (3.3) imamo

$$E\left(\frac{S_k}{S_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a} e^{\mu k + a\sqrt{2k}\sigma} da = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)k}.$$

Konačno,

$$E(S_k) = S_0 e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)k}.$$

Odnosno, cene rukovođene geometrijskim Braunovim kretanjem su uvek nenegativne.

- Promena cena ne zavisi od cena iz prošlosti i ta nezavisnost čini serije cena Markovskim procesom, koji je kako smo pokazali u prethodnom poglavlju veoma moćan matematički alat.

Ako sa  $z_k$  označimo standardizovanu normalnu slučajnu promenljivu ( $z_k : \mathcal{N}(0, 1)$ ) tada proces  $W_k$  možemo simulirati sa  $\sqrt{k}z_k$ . Stoga, uzorkovanjem standardizovane normalne raspodele i korišćenjem (3.2), geometrijsko Braunovo kretanje možemo koristiti za generaciju scenarija cene akcije  $S_k$ . Tako, generacija scenarija za  $S_k$  uključuje ocenjivanje drifta i volatilnosti, generisanjem uzoraka iz  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodele, i zamenjivanje odgovarajućih vrednosti u (3.2).

**Napomena 1.** Ipak, moramo napomenuti, da čak i kao prekretnica u modeliranju finansijskih vremenskih serija, geometrijsko Braunovo kretanje je daleko od tačnog u

opisivanju procesa akcija. Štaviše, ono krši dosta pravila o procesu cena. Primitimo da prema modelu geometrijskog Braunovog kretanja:

$$\ln \frac{S(k + \Delta k)}{S(\Delta k)} : \mathcal{N}(\mu \Delta k, \sigma^2 \Delta k),$$

ali empirijske raspodele su obično više špicaste sa debljim repovima, nego što ima normalna raspodela. Takođe navedimo kao nedostatak ovog modela sledeće. Sredina i varijansa se menjaju tokom vremena, što ne može biti slučaj sa datim konstantnim driftom i volatilnosti. Zbog toga, model geometrijskog Braunovog kretanja ne uspeva da obuhvati važne karakteristike vremenskih serija (grupisanje volatilnosti, ekstremna kretanja...)

## 3.2 Modeli sa promenljivom volatilnosti

Nakon otkrivanja nedostataka geometrijskog Braunovog kretanja, razvilo se nekoliko različitih modela, koji bolje opisuju statističke osobine finansijskih vremenskih serija. Među najpopularnijim su modeli sa stohastičkom volatilnosti uključujući modele familije ARCH-GARCH i modele sa promenljivim stanjima.

### 3.2.1 ARCH i GARCH modeli

Autoregresivno uslovno heteroskedastični (ARCH- Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) model razvio je Robert F. Engle 1982. godine [2]. Familija ARCH modela modelira volatilnost prinosa aktiva koristeći činjenicu da je volatilnost uslovna standardna devijacija prinosa aktive. Nakon toga, razvilo se dosta modela, ali sa istom osnovom. Postoje GARCH modeli Bollerseva [3], Nelsonov EGARCH model [3], TGARCH model [3] i mnogi drugi.

Podsetimo se, ako proces prinosa označimo  $y_{k+1} = \ln \frac{S_{k+1}}{S_k}$ , prema geometrijskom Braunovom kretanju u diskretnoj verziji  $\ln \frac{S(k+\Delta k)}{S(\Delta k)} : \mathcal{N}(\mu \Delta k, \sigma^2 \Delta k)$ , imamo  $y_k : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Drugim rečima,  $y_k = \mu + a_k$ , gde je  $a_k = \sigma z_k$  i  $z_k$  je Winerov proces. U ovom modelu, i drift i volatilnost su konstantni, ali jednostavnim posmatranjem podatka možemo uočiti da to nije realna pretpostavka. Iz tog razloga, bi bilo dobro grešku interpretirati kao  $a_k = \sigma_k z_k$ , a ne sa  $a_k = \sigma z_k$ .

Sada predstavljamo osnovne modele ARCH i GARCH familije.



## ARCH(p)

Počinjemo sa klasičnim ARCH(p) modelom koji daje okvir za modeliranje volatilnosti. Pretpostavljamo da logaritama prinosa podloge ima dinamiku

$$y_k = \mu + a_k, a_k = \sigma_k z_k,$$

i kažemo da prati ARCH(p) model ako

$$\sigma_k^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2 + \dots + \alpha_p a_{k-p}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{k-i}^2,$$

gde je  $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i > 0$  a  $z_k$  beli šum sa disperzijom 1.

Veoma je važno da ne pomešamo  $a_k$  sa terminom volatilnosti. Veličinu  $a_k$  zovemo šum ili greška. Osnovna ideja familije ARCH modela jeste da je šum prinosa podloge zavisn ali serijski nekorelisan i da se zavisnost šuma može opisati kvadratnom funkcijom svojih prethodnih vrednosti.

Raspodela procesa  $\{z_k\}$  je često standardna normalna ili standardizovana studentova raspodela. Pored toga, varijansa šuma  $a_k$  je funkcija prethodnih vrednosti  $a_k$ , a time je očuvana ideja o grupisanju volatilnosti. Zaista, ako u bliskoj prošlosti imamo visok nivo volatilnosti, što implicira veliki šum  $a_j$ , za  $j < k$  onda imamo veliku volatilnost za  $a_k$ , što znači da je verovatnoća da imamo još jedan veliki šum manja nego inače.

Svi modeli ARCH familije imaju sledeće osobine i mi ćemo ih dokazati na najjednostavnijem modelu ARCH(1).

Sa  $\mathcal{F}_k$  ćemo označiti  $\sigma$ -polje generisano sa  $y_k, y_{k-1}, \dots, a_k, a_{k-1} \dots$

**Propozicija 3.1.** [3] *Greška  $a_k$  ima nula očekivanje, to jest*

$$E(a_k) = 0.$$

**Dokaz.**

Dokazujemo za model

$$\sigma_k^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2.$$

Odnosno,

$$a_k = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2} z_k,$$

pa imamo,

$$E(a_k) = E(E(a_k | \mathcal{F}_{k-1})) = E(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2} E(z_k)) = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2} E(z_k) = 0.$$

□

**Propozicija 3.2.** [3]

$$D(a_k) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}.$$

**Dokaz.**

$$\begin{aligned} D(a_k) &= E(a_k^2) = E(E(a_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})) = E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{k-1}^2) \\ &\Rightarrow D(a_k) = \alpha_0 + \alpha_1 D(a_k) \\ &\Rightarrow D(a_k) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}. \end{aligned}$$

□

**Propozicija 3.3.** [3] *Ako je  $a_k$  normalna slučajna promenljiva i  $E(a_k^4) < \infty$ , tada*

$$E(a_k^4) = \frac{3\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2} \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}, 3\alpha_1^2 < 1.$$

**Dokaz.**

Imamo

$$E(a_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}) = 3(E(a_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}))^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2)^2.$$

Stoga,

$$\begin{aligned} E(a_k^4) &= E(E(a_k^4 | \mathcal{F}_{k-1})) = 3E((\alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2)^2) = E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{k-1}^2 + \alpha_1^2 a_{k-1}^4). \\ &\Rightarrow E(a_k^4) = 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 D(a_k^2) + \alpha_1^2 E(a_k^4)) = 3\alpha_0^2(1 + 2\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}) + 3\alpha_1^2 E(a_k^4). \end{aligned}$$

Nakon sređivanja, dobijamo

$$E(a_k^4) = \frac{3\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2} \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}, 3\alpha_1^2 < 1.$$

□

### **GARCH(p,q)**

Bollerslev [3] je, 1986. godine unapredio ARCH modele uvođenjem generalizovanih ARCH modela, takozvanih GARCH modela, u kojima trenutna volatilitnost zavisi ne samo od prethodnih greaka već i od volatilitnosti iz prethodnih perioda. Bollerslev dolazi na ideju da razvije GARCH model jer u se ARCH modelu javlja sledeći problem: u cilju dobrog modeliranja prinosa, treba nam velika memorija. Zaista, u praktičnim primenama, često nam treba dugačak lag u jednačinama uslovne varijanse. Ali ovo može da vodi do narušavanja nenegativnosti varijanse. Iz tog razloga konstruisan je GARCH model. Ovaj model ima dužu memoriju i fleksibilniju strukturu.

Prema GARCH(p,q) modelu volatilitnost se modelira na sledeći način

$$\sigma_k^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{k-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{k-j}^2,$$

tako da  $\sum_{i>0} \alpha_i + \sum \beta_j < 1, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i > 0, \beta_j \geq 0$ .

Za  $q = 0$  GARCH(p,q) model je ARCH(p) model.

Prilikom formulisanja GARCH modela akcenat je bio da se objasne karakteristike povezane sa povratnim procesima, kao što su grupisanje volatilitnosti, debeli repovi i efekat leveridža.

**Napomena 2.** Praćenjem dnevnih prinosa tokom dužeg vremenskog perioda pokazano je da velike promene teže da budu praćene većim promenama, kao što male promene teže da budu praćene malim promenama. Model predlaže da sukcesivne volatilitnosti budu serijski zavisne ali nekorelisane. Kada kažemo debeli repovi mislimo na to da opažanja niza prinosa aktiva često imaju deblje repove nego standardna normalna raspdela (to je poznato kao "excess kurtosis"). A leveridž efekat predstavlja problem jer su promene prinosa često negativno korelisane sa promenama volatilitnosti.

Termin greške je takođe poznat kao šok ili šum. Negativan šok je obično povezan sa lošim vestima. Kao što  $a_k < 0$  implicira  $y_k < \mu$  prinos je ispod očekivanja zbog loših vesti. Empirijske studije finansijskih vremenskih serija su pokazale da uslovna varijansa  $E_{k-1}(\sigma_k^2)$  često raste posle negativnog šoka, odnosno kada se negativne vesti puste na tržište, rizik je veći.

Svi GARCH modeli su jedinstveno opisani skupom parametara  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q\}$ . Najčešće korišćen metod za ocenu parametara je maksimiziranje uslovne vrednosti logaritma funkcije verodostojnosti

$$P(a_k | \sigma_k, \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}}$$

$$L(a_k | \sigma_k, \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q\}) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}}$$

$$\ln L(a_k | \sigma_k, \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q\}) = - \sum_{k=1}^K \left( \ln \sigma_k + e^{-\frac{a_k^2}{2\sigma_k^2}} \right)$$

Poslednji izraz je naša funkcija cilja, a  $K$  je broj članova niza.

Nedostatak ARCH i GARCH modela leži u zavisnosti od  $p$  i  $q$ . Što je  $p$  veće, proces ima veću memoriju za volatilitnost i stoga je model skuplji. U međuvremenu, što su  $p$  i  $q$  veći

treba oceniti više parametara. Postoji nekoliko ograničenja u dizajnu GARCH modela. Na primer, ne mogu da potpuno objasne fenomen debelih repova. Šta je još važnije, često ne uspevaju da objasne visoku iregularost fenomena, uključujući fluktacije tržišta i nepredviđene događaje koji vode do značajnih strukturnih promena.

Nakon formulisanja GARCH modela, mnogi naučnici su nastojali da ga unaprede. Neki od najpoznatijih modela koji su se razvili na taj način su predstavljeni u nastavku.

### **GARCH-M model [3]**

GARCH-M model je razvio Duan. U suštini, on dodaje termin heteroskedastičnosti u glavnu jednačinu, pa je GARCH (1,1)-M sledeće forme

$$y_k = \mu + \lambda \sigma_k^2 + a_k, a_k = \sigma_k z_k,$$

tako da je

$$\sigma_k^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{k-1}^2 + \beta_1 \sigma_{k-1}^2,$$

gde su  $\lambda$  i  $\mu$  konstante.  $\lambda$  zovemo parametar premije. U suštini, ovaj model koristimo u finansijama, jer pretpostavljamo da premija rizika zavisi od volatilnosti.

### **TGARCH model [3]**

TGARCH model se koristi kada se bavimo sa leveridž efektom koji smo spominjali ranije. Forma modela je

$$\sigma_k^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i I_{\{a_{k-i} < 0\}}) a_{k-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{k-1}^2,$$

gde je  $I$  indikator funkcija i  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \geq 0$  i zadovoljavaju slične uslove kao u GARCH modelu. TGARCH model ukazuje na to da negativan šum ima veći uticaj na volatilnost. Zaista ako je  $a_{k-i} < 0$ , njegov uticaj na volatilnost će biti  $\alpha_i a_{k-i}^2 + \gamma_i a_{k-i} \geq \alpha_i a_{k-i}^2$ , što je uticaj pozitivnog  $a_{k-i}$  jer je  $\gamma_i \geq 0$ .

### **EGARCH model [3]**

U cilju da izbegne slabosti GARCH modela, Nelson je konstruisao eksponencijalni GARCH model. U suštini, u EGARCH modelu akcenat je na efektu asimetrije između pozitivnih i negativnih prinosa podloge. Nelson predlaže inovacije u vidu pondera. Model se zapisuje na sledeći način

$$\ln \sigma_k^2 = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \beta_k g(z_{k-t}),$$

gde su  $\alpha_k, \beta_k$  deterministički koeficijenti i

$$g(z_k) = \theta z_k + \gamma(|z_k|) - E(z_k).$$

Sledi da je  $E(g(z_k)) = 0$ .

Asimetrija je u funkciji  $g$ . Zaista, ako je  $z_k = 0$ , imamo da je  $g(z_k) = (\theta + \gamma)z_k - \gamma E(z_k)$ . A, ako je  $z_k \leq 0$ , imamo da je  $g(z_k) = (\theta - \gamma)z_k - \gamma E(z_k)$ .

### 3.2.2 Modeli sa promenljivim stanjima

Vremenske serije koje se odnose na duže vremenske periode imaju tendenciju iskazivanja, ne samo perioda niske ili visoke volatilnosti, već i periode sporijeg i bržeg rasta očekivanja. Ipak, za takve podatke, GARCH modeli se pokazuju neprikladnim. Kao rešenje modeliranja pomenutih nestacionarnih serija, J.D. Hamilton je svojim radovima 1989. godine [5] predložio model sa promenljivim stanjima. Osnova modela je u činjenici da su promene stanja rukovođene Markovskim procesom sa konstantnim verovatnoćama prelaza.

Dakle, prema Hamiltonovom modelu, procesi cena su modelirani tako da mogu da se menjaju između dva stanja. Svako stanje je opisano preko različitih parametara modela. Ono što određuje u kom je stanju proces je lanac Markova  $\{X_k\}$ , kazuje da verovatnoća promene stanja zavisi samo od trenutnog stanja, a ne i od cele istorije.

Skup stanja lanca Markova, označicemo sa  $S_X = \{0, 1\}$ , a verovatnoće prelaza sa:

$$\begin{aligned} P(X_k = 0 | X_{k-1} = 0) &= q, P(X_k = 1 | X_{k-1} = 0) = 1 - q \\ P(X_k = 1 | X_{k-1} = 1) &= p, P(X_k = 0 | X_{k-1} = 1) = 1 - p. \end{aligned}$$

Proces prinosa vremenske serije,  $y_k$ , se definiše kao

$$y_k = [\mu_0(1 - X_k) + \mu_1 X_k] + [\sigma_0(1 - X_k) + \sigma_1 X_k] a_k,$$

gde su  $a_k : \mathcal{N}(0, 1)$  jednako raspodeljene nezavisne slučajne promenljive.

Odnosno, kada je lanac Markova u stanju 0, ( $X_k = 0$ ), proces prinosa je

$$y_k = \mu_0 + \sigma_0 a_k,$$

dok ako je u stanju 1 ( $X_k = 1$ ) ima formu

$$y_k = \mu_1 + \sigma_1 a_k.$$

Skup nepoznatih parametara je  $\{\mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1, p, q\}$ , a za ocenjivanje njegovih elemenata koristi se tehnika koja se sastoji u maksimiziranju funkcije verodostojnosti parametara  $(y_1, \dots, y_k)$  za data opažanja do vremena  $k - 1$ . To jest, cilj nam je da maksimiziramo sledeću funkciju cilja

$$\ln L(y_1, \dots, y_k | y_0, \mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1, p, q) = \sum_{k=1}^K \ln P(y_k | \mathcal{F}_k, \mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1, p, q).$$

Očigledni nedostatak ove tehnike leži u činjenici da nije lako proširiti model analitički na slučaj kada postoji više od dva stanja.

## 4

# Skriveni modeli Markova kao metoda za generaciju scenarija

U cilju prevazilaženja nedostataka i ograničenja do sada najpoznatijih metoda za modeliranje finansijskih vremenskih serija opisanih u prethodnom poglavlju, predstavljamo model zasnovan na skrivenim Markovskim modelima. Sa pristupom zasnovanim na skrivenim Markovskim procesima, razlikujemo dva uključena stohastička procesa (oba u diskretnom vremenu): kao dodatak procesu od interesa, koji je opažljiv (na primer, cena akcije), postoji proces koji opisuje stanje sistema i koji ne možemo direktno opažati. Osnovni, skriveni stohastički proces koji opisuje stanje sistema je lanac Markova, odnosno, stanje sistema u nekom vremenskom trenutku zavisi samo od stanja sistema u prethodnom vremenskom trenutku, a ne i od cele istorije. U svakom vremenskom trenutku, sistem je u jednom od  $N$  mogućih stanja i može da prelazi iz trenutnog stanja u bilo koje drugo (kao i da ostane u istom) prema verovatnoćama prelaza koje nisu vremenski zavisne.

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  prostor verovatnoća i  $\{S_k\}$  niz cena podloge. Predlažemo da logaritmom procesa prinosa

$$y_k = \ln \frac{S_k}{S_{k-1}}$$

ima sledeću dinamiku u diskretnom vremenu

$$y_{k+1} = M_k + \Sigma_k z_{k+1},$$

gde su  $z_k$  nezavisne slučajne promenljive sa  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodelom, proces  $\{M_k\}$  predstavlja proces drifta, dok proces  $\{\Sigma_k\}$  proces volatilitnosti.

Postavka modela je zasnovana na diskretnom geometrijskom Braunovom kretanju, ali tako da su sada drift  $M_k$  i volatilitnost  $\Sigma_k$  stohastičke veličine, što nam je i bio cilj.

Odmah napominjemo da u ovom modelu smatramo da postoji jednodnevno kašnjenje u širenju informacija. Prisetimo se da je ovo u suprotnosti sa hipotezom o efikasnom

tržištu koja tvrdi da trenutna cena reflektuje sve informacije. Kao rezultat kašnjenja u prostiranju informacija, razvijanjem današnje informacije:  $M_k$  i  $\Sigma_k$  zavise od informacija prethodnog dana trgovanja:  $M_{k-1}$  i  $\Sigma_{k-1}$ . Stoga, mi modeliramo par  $\{M_k, \Sigma_k\}$  tako da se razvija kao Markovski lanac prvog reda. Kako je ovaj proces skriven, model pripada familiji skrivenih Markovskih modela. U našem pristupu, svako stanje u lancu Markova ima različite parametre geometrijskog Braunovog kretanja, čime se mogu prevazići nedostaci opisanih scenario generatora.

Pretpostavljamo da lanac  $\{(M_k, \Sigma_k)\}$  ima  $N$ -dimenzionalni skup stanja

$$S = \{(\mu_1, \sigma_1), \dots, (\mu_N, \sigma_N)\}$$

i matricu prelaza  $\Pi = [\pi_{ij}]_{i,j=1,\dots,N}$ , gde su

$$\pi_{ij} = P((M_{k+1}, \Sigma_{k+1}) = (\mu_j, \sigma_j) | (M_k, \Sigma_k) = (\mu_i, \sigma_i))$$

stacionarne verovatnoće prelaza.

U cilju korišćenja ovog modela za donošenje investicione odluke, moramo oceniti specifikacije skrivenog lanca Markova koji se provlači kroz proces prinosa. Drugim rečima, moramo oceniti sledeće parametre:

- broj stanja lanca  $N$ ,
- skup stanja lanca  $S$ ,
- i verovatnoće prelaza  $\pi_{ij}, i, j = 1, \dots, N$ .

Dok se optimalne vrednosti za skup stanja i elemente matrice prelaza mogu izvesti rekurzivno, za broj stanja pretpostavljamo da je unapred određen.

Prva prepreka na koju nailazimo jeste da je ovaj model komplikovan za rukovođenje zbog forme skupa stanja, čiji su elementi uređeni parovi. Iz tog razloga, predlažemo transformaciju modela pomoću injektivnog preslikavanja u model čiji je skup stanja kanonička baza prostora  $\mathbb{R}^N - (e_1, \dots, e_N)$ , gde je  $e_i$  vektor dimenzije  $N \times 1$ , sa jedinicom na  $i$ -tom mestu i nulama na svim ostalim,  $i = 1, \dots, N$ .

Predlažemo sledeću transformaciju pomoću injekcije  $f : S \rightarrow \{e_1, \dots, e_N\}$  definisane sa

$$f((\mu_i, \sigma_i)) = e_i, i = 1, \dots, N.$$

Egzistencija preslikavanja  $f$  je obezbeđena jer  $\dim(S) = \dim(\{e_1, \dots, e_N\})$ .

Za naš model forma funkcije  $f$  nije od presudnog značaja i ne moramo da brinemo o njenom obliku.



Sada, definišemo proces  $\{X_k\}$

$$X_k = f((M_k, \Sigma_k)).$$

Posmatrajmo

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}|X_k, X_{k-1}, \dots, X_0) &= P(f((M_{k+1}, \Sigma_{k+1}))|f((M_k, \Sigma_k)), \dots, f((M_0, \Sigma_0))) \\ &= P((M_{k+1}, \Sigma_{k+1})|(M_k, \Sigma_k), \dots, (M_0, \Sigma_0)) \\ &= P((M_{k+1}, \Sigma_{k+1})|(M_k, \Sigma_k)) \\ &= P(f((M_{k+1}, \Sigma_{k+1}))|f((M_k, \Sigma_k))) \\ &= P(X_{k+1}|X_k). \end{aligned}$$

Dakle, proces  $\{X_k\}$  ima osobinu Markova.

Naime, kako je  $(M_k, \Sigma_k) \in S$  i  $f : S \rightarrow \{e_1, \dots, e_N\}$  sledi da je  $X_k = f((M_k, \Sigma_k)) \in \{e_1, \dots, e_N\}$ . Drugim rečima, proces  $X_k$  je lanac Markova sa skupom stanja  $S$ .

Posmatrajmo dalje,

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = e_j | X_k = e_i) &= P(f((M_{k+1}, \Sigma_{k+1})) = f((\mu_j, \sigma_j)) | f((M_k, \Sigma_k)) = f((\mu_i, \sigma_i))) \\ &= P((M_{k+1}, \Sigma_{k+1}) = (\mu_j, \sigma_j) | (M_k, \Sigma_k) = (\mu_i, \sigma_i)) \\ &= \pi_{ij}. \end{aligned}$$

Pokazali smo da lanci Markova  $\{(M_k, \Sigma_k)\}$  i  $\{X_k\}$  imaju iste verovatnoće prelaza.

U cilju formalizacije modela uvodimo oznake za filtracije

$$\{\mathcal{F}_k\} = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_k),$$

$$\{\mathcal{Y}_k\} = \sigma(y_0, y_1, \dots, y_k)$$

i

$$\{\mathcal{G}_k\} = \mathcal{F}_k \vee \mathcal{Y}_k = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_k, y_0, y_1, \dots, y_k).$$

Neka je

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

i

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix}.$$

Tada je:

$$(\mu_i, \sigma_i) = (\langle \mu, e_i \rangle, \langle \sigma, e_i \rangle), i = 1, \dots, N.$$

Dobijamo sledeću transformaciju modela

$$y_{k+1} = \langle \mu, X_k \rangle + \langle \sigma, X_k \rangle z_{k+1} \quad (4.1)$$

$$X_{k+1} = \Pi X_k + V_{k+1}. \quad (4.2)$$

$\{V_{k+1}\}$  je niz priraštaja martingala s obzirom na filtraciju  $\{\mathcal{F}_k\}$ .

## 4.1 Promena prostora verovatnoća

U ovom odeljku se bavimo promenom mere verovatnoća. Tehniku za promenu prostora verovatnoće je prvi uveo Zakai 1969. godine [7] prilikom rešavanja problema stohastičkih filtera i sada je u širokoj upotrebi. Osnovna ideja uvođenja nove, idealne mere verovatnoće je činjenica da ćemo lakše sprovesti računicu u takvom prostoru, a potom ostaje samo da izvedemo filtere pomoću kojih ćemo dobijene podatke vratiti u prvobitan realni, prostor verovatnoća.

Da bismo konstruisali novu meru  $\bar{P}$ , definišimo prvo sledeće procese

$$\lambda_l = \frac{\phi\left(\frac{y_l - \langle \mu, X_{l-1} \rangle}{\langle \sigma, X_{l-1} \rangle}\right)}{\langle \sigma, X_{l-1} \rangle \phi(y_l)} \quad (4.3)$$

$$\Lambda_k = \prod_{l=1}^k \lambda_l, \Lambda_0 = 1, \quad (4.4)$$

gde je

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

funkcija gustine standardizovane normalne slučajne promenljive.

Novu meru verovatnoće  $\bar{P}$  definišemo na prostoru  $(\Omega, \bigvee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$  uz restrikciju da je Radon-Nikodym izvod  $\frac{d\bar{P}}{dP}$  na  $\sigma$ -polju  $\mathcal{G}_k$  baš  $\Lambda_k$ .

To jest,

$$\frac{d\bar{P}}{dP}|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k.$$

Egzistencija mere  $\bar{P}$  sledi iz proširenja Kolmogorove teoreme. Ovo znači da za bilo koji skup  $B \in \mathcal{G}_k$ ,

$$\bar{P}(B) = \int_B \Lambda_k dP.$$

Ekvivalentno, za bilo koju  $\mathcal{G}_k$ - merljivu slučajnu promenljivu  $R$  :

$$\bar{E}(R) = \int R d\bar{P} = \int R \frac{d\bar{P}}{dP} dP = E(\Lambda_k R), \quad (4.5)$$

gde je sa  $\bar{E}$  označeno očekivanje pod merom  $\bar{P}$ .

Sada ćemo predstaviti formu uslovne Bajesove teoreme koja je fundamentalna za rezultate koji slede. Rezultati povezuju uslovna očekivanja pod okvirom dve različite mere.

Podsetimo se da je slučajna promenljiva  $R$  integrabilna ako je  $E(R) < \infty$ .

**Teorema 4.1 (Uslovna Bajesova teorema).** [13] *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  prostor verovatnoća i  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  pod  $\sigma$ -algebra. Pretpostavimo dalje da je  $\bar{P}$  druga mera verovatnoća, apsolutno neprekidna sa obzirom na  $P$  i na Radon-Nikodim izvod  $\frac{d\bar{P}}{dP} = \Lambda$ . Tada, ako je  $R$  bilo koja  $\bar{P}$  integrabilna slučajna promenljiva važi*

$$\bar{E}(R|\mathcal{G}) = \psi,$$

gde je:

$$\psi = \begin{cases} \frac{E(\Lambda R|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})}, & \text{ako } E(\Lambda|\mathcal{G}) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

**Dokaz.**

Neka je  $B$  bilo koji skup u  $\mathcal{G}$ . Treba da pokažemo

$$\int_B \bar{E}(R|\mathcal{G}) d\bar{P} = \int_B \frac{E(\Lambda R|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})} dP.$$

Definišimo

$$\psi = \begin{cases} \frac{E(\Lambda R|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})} & \text{ako } E(\Lambda|\mathcal{G}) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Tada je

$$\bar{E}(R|\mathcal{G}) = \psi.$$

Pretpostavimo da je  $A$  bilo koji skup u  $\mathcal{G}$ . Cilj nam je da dokažemo

$$\int_A \bar{E}(R|\mathcal{G}) d\bar{P} = \int_A \psi d\bar{P}.$$

Označimo sa  $G = \{\omega | E(\Lambda|\mathcal{G}) = 0\}$ . Sledi,  $G \in \mathcal{G}$ .

Tada je

$$\int_G E(\Lambda|\mathcal{G}) dP = 0 = \int_G \Lambda dP, \Lambda \geq 0.$$

Pa, ili je  $P(G) = 0$ , ili je restrikcija od  $\Lambda$  na  $G$  0. U oba slučaja  $\Lambda = 0$  na  $G$ .

Neka je  $G^C = \{\omega | E(\Lambda|\mathcal{G}) > 0\}$ . Pretpostavimo da je  $A \in \mathcal{G}$ ; tada  $A = B \cup C$  gde je  $B = A \cap G^C$  i  $C = A \cap G$ . Dalje,

$$\begin{aligned} \int_A \bar{E}(R|\mathcal{G}) d\bar{P} &= \int_A R d\bar{P} = \int_A R \Lambda dP \\ &= \int_B R \Lambda dP + \int_C R \Lambda dP. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Naravno, na skupu  $C \subset G$  važi  $\Lambda = 0$ , pa po definiciji imamo

$$\int_C R \Lambda dP = 0 = \int_C \psi d\bar{P}. \quad (4.7)$$

Sada,

$$\begin{aligned} \int_B \psi d\bar{P} &= \int_B \frac{E(\Lambda R|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})} d\bar{P} \\ &= \bar{E} \left[ I_B \frac{E(\Lambda R|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})} \right] \\ &= E \left[ I_B \Lambda \frac{E(\Lambda R|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})} \right] \\ &= E \left[ E \left[ I_B \Lambda \frac{E(\Lambda R|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})} | \mathcal{G} \right] \right] \\ &= E \left[ I_B E(\Lambda|\mathcal{G}) \frac{E(\Lambda R|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})} \right] \\ &= E [I_B E(\Lambda R|\mathcal{G})] \\ &= E (I_B \Lambda R), \end{aligned}$$

gde je  $I$  indikator funkcija.

Odnosno, dobili smo

$$\int_B \Lambda R dP = \int_B \psi d\bar{P}. \quad (4.8)$$

Iz (4.6), dodavanjem (4.7) i (4.8), imamo

$$\begin{aligned} \int_C \Lambda R dP + \int_B \Lambda R dP &= \int_A \Lambda R dP \\ &= \int_A \bar{E}(R|\mathcal{G}) d\bar{P} \\ &= \int_A \psi d\bar{P}, \end{aligned}$$

a time je tvrđenje dokazano. □

Za niz  $\{R_k\}$  kažemo da je  $\mathcal{G}$ - prilagođen ako je  $R_k$   $\mathcal{G}_k$ - merljivo za svako  $k$ .

Primenom prethodne teoreme na našu idealnu  $\bar{P}$  i realnu  $P$  verovatnoću, imamo sledeću lemu.

**Lema 4.1.** *Ako je  $\{R_k\}$   $\mathcal{G}$ - prilagođen niz integrabilnih slučajnih promenljivih, tada je*

$$E(R_k|\mathcal{Y}_k) = \frac{\bar{E}(\Lambda_k R_k|\mathcal{Y}_k)}{\bar{E}(\Lambda_k|\mathcal{Y}_k)}. \quad (4.9)$$

**Dokaz.** Tvrđenje sledi na osnovu Bajesove teoreme. □

Uvodimo oznaku

$$\gamma_k(R_k) = \bar{E}(\Lambda_k R_k|\mathcal{Y}_k).$$

$\gamma_k(R_k)$  je, dakle, nenormalizovano uslovno očekivanje procesa  $R_k$  za dato  $\mathcal{Y}_k$ .

Prema Teoremi 4.1

$$E(R_k|\mathcal{Y}_k) = \frac{\bar{E}(\Lambda_k R_k|\mathcal{Y}_k)}{\bar{E}(\Lambda_k|\mathcal{Y}_k)} = \frac{\gamma_k(R_k)}{\gamma_k(1)}.$$

Biramo da je  $\gamma_0(X_0) = E(X_0)$ ; to nam omogućuje početne vrednosti za dalje rekurzije.

## 4.2 Rekurzivni filteri

Pretpostavimo da je  $\{R_k\}$  skalarni niz, sa

$$\Delta R_{k+1} = R_{k+1} - R_k,$$

$$R_{k+1} = R_k + \Delta R_{k+1}$$

i

$$\gamma_{k+1}(R_{k+1}) = \bar{E}(\Lambda_{k+1}R_k|\mathcal{Y}_{k+1}) + \bar{E}(\Lambda_{k+1}\Delta R_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}).$$

Za prvi izraz sa desne strane imamo

$$\begin{aligned} \bar{E}(\Lambda_{k+1}R_k|\mathcal{Y}_{k+1}) &= \bar{E}(\Lambda_k R_k \lambda_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}) \\ &= \bar{E}\left(\Lambda_k R_k \frac{\phi\left(\frac{y_{k+1}-\langle\mu, X_k\rangle}{\langle\sigma, X_k\rangle}\right)}{\langle\sigma, X_k\rangle \phi(y_{k+1})}|\mathcal{Y}_{k+1}\right). \end{aligned}$$

To nas motiviše da uvedemo sledeću oznaku

$$\Gamma^i(y_k) = \frac{\phi\left(\frac{y_k-\mu_i}{\sigma_i}\right)}{\sigma_i \phi(y_k)}. \quad (4.10)$$

Primetimo da je

$$\lambda_k|_{X_{k-1}=e_i} = \Gamma^i(y_k),$$

i da je  $\mathcal{Y}_k$ -merljivo.

Sada,

$$\sum_{i=1}^N \langle X_k, e_i \rangle = 1,$$

i  $y_n, 1 \leq n \leq k+1$  su poznati pa,

$$\begin{aligned} \bar{E}(\Lambda_{k+1}R_k|\mathcal{Y}_{k+1}) &= \sum_{i=1}^N \bar{E}(\Lambda_{k+1}R_k \langle X_k, e_i \rangle|\mathcal{Y}_{k+1}) \Gamma^i(y_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \gamma_k(R_k X_k), e_i \rangle \Gamma^i(y_{k+1}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ocenjivanje  $\gamma_{k+1}(R_{k+1})$  uključuje ocenjivanje  $\gamma_k(R_k X_k)$  to jest, uveden je faktor  $X_k$ . Dakle, tehnički trik je u ispitivanju rekurzije za  $\gamma_{k+1}(R_{k+1} X_{k+1})$ .

Ako sa  $\underline{1}$  označimo vektor  $(1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$ , vidimo da je

$$\langle X_k, \underline{1} \rangle = \sum_{i=1}^N \langle X_k, e_i \rangle = 1,$$

pa:

$$\langle \gamma_k (R_k X_k), \underline{1} \rangle = \gamma_k (R_k \langle X_k, \underline{1} \rangle) = \gamma_k (R_k). \quad (4.12)$$

Odnosno, jednom kad je poznata nenormalizovana ocena  $\gamma_k (R_k X_k)$ , ocena za  $\gamma_k (R_k)$  se dobija sumiranjem komponenti  $\gamma_k (R_k X_k)$ .

Dalje, uzimanjem da je  $R_k = 1$  u (4.12),

$$\gamma_k (1) = \gamma_k (\langle X_k, \underline{1} \rangle) = \langle \gamma_k (X_k), \underline{1} \rangle = \overline{E} (\Lambda_k | \mathcal{Y}_k).$$

Kao posledica, jednom kada je  $\gamma_k (X_k)$  određeno, normalizovani factor  $\gamma_k (1)$  iz prethodnog izraza se dobija sumiranjem komponenti nenormalizovanih ocena  $\gamma_k (X_k)$ .

Podsetimo se, proces  $\{R_k\}$  je predvidiv s obzirom na filtraciju  $\mathcal{G}_k$  ako je  $R_k$   $\mathcal{G}_{k-1}$ -merljivo za svako  $k$ .

**Teorema 4.2.** [13] *Neka je  $R_k$  skalarni  $\mathcal{G}$ -prilagođen proces sledeće forme*

$$R_{k+1} = R_k + \alpha_{k+1} + \langle \beta_{k+1}, V_{k+1} \rangle + \delta_{k+1} f (y_{k+1}),$$

gde je

$$V_{k+1} = X_{k+1} - \Pi X_{k+1},$$

$f$  skalarna funkcija,  $\alpha, \beta, \delta$   $\mathcal{G}$ -predvidivi procesi ( $\alpha, \delta$  su skalari, a  $\beta$  vektor dimenzije  $N \times 1$ ).

Tada važi

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} (R_{k+1} X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^N \langle \gamma_k (R_k X_k), e_i \rangle \Gamma^i (y_{k+1}) \pi_i \\ &+ \gamma_k (\alpha_{k+1} \langle X_{k+1}, e_i \rangle) \Gamma^i (y_{k+1}) \pi_i \\ &+ \gamma_{k+1} (\delta_{k+1} \langle X_k, e_i \rangle) \Gamma^i (y_{k+1}) f (y_{k+1}) \pi_i \\ &+ (\text{diag} (\pi_i) - \pi_i \pi_i^T) \gamma_k (\beta_{k+1} \langle X_{k+1}, e_i \rangle) \Gamma^i (y_{k+1}), \end{aligned}$$

gde je  $\pi_i = \Pi e_i$ .

**Dokaz.**

Prema definiciji imamo

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1}(R_{k+1}X_{k+1}) &= \bar{E}(\Lambda_{k+1}R_{k+1}X_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}) \\
&= \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})(R_k + \alpha_{k+1} + \langle\beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle + \delta_{k+1}f(y_{k+1}))(\Pi X_k + V_{k+1})|\mathcal{Y}_{k+1}) \\
&= \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})(R_k + \alpha_{k+1} + \delta_{k+1}f(y_{k+1}))\Pi X_k|\mathcal{Y}_{k+1}) \\
&\quad + \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})(R_k + \alpha_{k+1} + \delta_{k+1}f(y_{k+1}))V_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}) \\
&\quad + \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})\langle\beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle\Pi X_k|\mathcal{Y}_{k+1}) \\
&\quad + \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})\langle\beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle V_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1})
\end{aligned}$$

Kako znamo da je

$$\begin{aligned}
\bar{E}(V_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}) &= \bar{E}(\bar{E}(V_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}, \mathcal{G}_k)|\mathcal{Y}_{k+1}) \\
&= \bar{E}(\bar{E}(V_{k+1}|\mathcal{G}_k)|\mathcal{Y}_{k+1}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

zbog činjenice  $\bar{E}(V_{k+1}|\mathcal{G}_k) = 0$ , dobijamo

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1}(R_{k+1}X_{k+1}) &= \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})(R_k + \alpha_{k+1} + \delta_{k+1}f(y_{k+1}))\Pi X_k|\mathcal{Y}_{k+1}) \\
&\quad + \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})\langle\beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle V_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}).
\end{aligned}$$

$$\gamma_{k+1}(R_{k+1}X_{k+1}) = \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})R_k\Pi X_k|\mathcal{Y}_{k+1}) \quad (4.13)$$

$$+ \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})\alpha_{k+1}\Pi X_k|\mathcal{Y}_{k+1}) \quad (4.14)$$

$$+ \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})\delta_{k+1}f(y_{k+1})\Pi X_k|\mathcal{Y}_{k+1}) \quad (4.15)$$

$$+ \bar{E}((\Lambda_k\lambda_{k+1})\langle\beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle V_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}). \quad (4.16)$$

Prvo, posmatrajmo proizvod

$$\lambda_{k+1}\Pi X_k = \frac{\phi\left(\frac{y_{k+1} - \langle\mu, X_k\rangle}{\langle\sigma, X_k\rangle}\right)}{\langle\sigma, X_k\rangle\phi(y_{k+1})} \sum_{i=1}^N \pi_i \langle X_k, e_i \rangle = \sum_{i=1}^N \pi_i \frac{\phi\left(\frac{y_{k+1} - \langle\mu, X_k\rangle}{\langle\sigma, X_k\rangle}\right)}{\langle\sigma, X_k\rangle\phi(y_{k+1})} \langle X_k, e_i \rangle.$$

Ukoliko je

- $X_k \neq e_i$  :

$$\lambda_{k+1}\Pi X_k = \sum_{i=1}^N \pi_i \cdot 0 = 0.$$



- $X_k = e_i$  :

$$\lambda_{k+1} \Pi X_k = \sum_{i=1}^N \pi_i \frac{\phi\left(\frac{y_{k+1} - \langle \mu, e_i \rangle}{\langle \sigma, e_i \rangle}\right)}{\langle \sigma, e_i \rangle \phi(y_{k+1})} = \sum_{i=1}^N \pi_i \frac{\phi\left(\frac{y_{k+1} - \mu_i}{\sigma_i}\right)}{\sigma_i \phi(y_{k+1})} = \sum_{i=1}^N \Gamma^i(y_{k+1}).$$

Odnosno, imamo

$$\lambda_{k+1} \Pi X_k = \sum_{i=1}^N \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \langle X_k, e_i \rangle.$$

Ako ovaj rezultat ubacimo u jednačine (4.13), (4.14) i (4.15), imajući u vidu da je  $R_k$  skalarni proces i da su  $\Gamma^i(y_{k+1})$  i  $f(y_{k+1})$   $\mathcal{Y}_{k+1}$ -merljivi, a  $\alpha_{k+1}$  i  $\delta_{k+1}$   $\mathcal{G}_{k+1}$ -merljivi, dobijamo

- 

$$\begin{aligned} \bar{E}((\Lambda_k \lambda_{k+1}) R_k \Pi X_k | \mathcal{Y}_{k+1}) &= \bar{E}\left(\Lambda_k R_k \sum_{i=1}^N \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \langle X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{E}(\Lambda_k R_k \langle X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1}) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{E}(\langle \Lambda_k R_k X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1}) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \bar{E}(\Lambda_k R_k X_k | \mathcal{Y}_{k+1}), e_i \rangle \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \gamma_k(R_k X_k), e_i \rangle \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}); \end{aligned}$$

- 

$$\begin{aligned} \bar{E}((\Lambda_k \lambda_{k+1}) \alpha_{k+1} \Pi X_k | \mathcal{Y}_{k+1}) &= \bar{E}\left(\Lambda_k \alpha_{k+1} \sum_{i=1}^N \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \langle X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{E}(\Lambda_k \alpha_{k+1} \langle X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1}) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{E}(\langle \Lambda_k \alpha_{k+1} X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1}) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{E}(\langle \Lambda_k \alpha_{k+1} X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_k) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \gamma_k(\alpha_{k+1} \langle X_k, e_i \rangle) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}); \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\overline{E}((\Lambda_k \lambda_{k+1}) \delta_{k+1} f(y_{k+1}) \Pi X_k | \mathcal{Y}_{k+1}) &= \overline{E} \left( \Lambda_k \delta_{k+1} f(y_{k+1}) \sum_{i=1}^N \pi_i \Gamma_i(y_{k+1}) \langle X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \overline{E}(\Lambda_k \delta_{k+1} \langle X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1}) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) f(y_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^N \overline{E}(\langle \Lambda_k \delta_{k+1} X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_{k+1}) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) f(y_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^N \overline{E}(\langle \Lambda_k \delta_{k+1} X_k, e_i \rangle | \mathcal{Y}_k) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) f(y_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^N \gamma_k(\delta_{k+1} \langle X_k, e_i \rangle) \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}) f(y_{k+1});
\end{aligned}$$

Ostaje da sredimo izraz (4.16), ali da bismo postigli taj cilj moramo prvo da poradimo na proizvodu  $V_{k+1} V_{k+1}^T$ .

Znamo,

$$V_{k+1} = X_{k+1} - \Pi X_k,$$

odnosno

$$X_{k+1} = \Pi X_k + V_{k+1}.$$

Uočimo

$$X_{k+1} X_{k+1}^T = \text{diag}(X_{k+1}) = \text{diag}(\Pi X_k + V_{k+1}) = \text{diag}(\Pi X_k) + \text{diag}(V_{k+1}),$$

a sa druge strane:

$$X_{k+1} X_{k+1}^T = (\Pi X_k + V_{k+1}) (\Pi X_k + V_{k+1})^T = \Pi X_k X_k^T \Pi^T + \Pi X_k V_{k+1}^T + V_{k+1} X_k^T \Pi^T + V_{k+1} V_{k+1}^T.$$

Dakle,

$$V_{k+1} V_{k+1}^T = \text{diag}(\Pi X_k) + \text{diag}(V_{k+1}) - \Pi X_k X_k^T \Pi^T - \Pi X_k V_{k+1}^T - V_{k+1} X_k^T \Pi^T. \quad (4.17)$$

Primetimo:

$$\begin{aligned}
diag(\Pi X_k) - \Pi X_k X_k^T \Pi^T &= diag\left(\sum_{i=1}^N \pi_i \langle X_k, e_i \rangle\right) - \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \langle X_k, e_i \rangle\right) \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \langle X_k, e_i \rangle\right)^T \\
&= diag\left(\sum_{i=1}^N \pi_i \langle X_k, e_i \rangle\right) - \sum_{i=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \pi_i^T \langle X_k, e_i \rangle^2\right) \\
&= diag\left(\sum_{i=1}^N \pi_i \langle X_k, e_i \rangle\right) - \sum_{i=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \pi_i^T \langle X_k, e_i \rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^N (diag(\pi_i) - \pi_i \pi_i^T) \langle X_k, e_i \rangle. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Ako zamenimo (4.17) i (4.18) u (4.16) dobijamo

$$\begin{aligned}
\bar{E}((\Lambda_k \lambda_{k+1}) \langle \beta_{k+1}, V_{k+1} \rangle V_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}) &= \bar{E}((\Lambda_k \lambda_{k+1}) V_{k+1} V_{k+1}^T \beta_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}) \\
&= \bar{E}\left((\Lambda_k \lambda_{k+1}) \left[\sum_{i=1}^N (diag(\pi_i) - \pi_i \pi_i^T) \langle X_k, e_i \rangle\right] \beta_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^N (diag(\pi_i) - \pi_i \pi_i^T) \bar{E}(\Lambda_k \langle X_k, e_i \rangle \beta_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}) \Gamma^i(y_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^N (diag(\pi_i) - \pi_i \pi_i^T) \gamma_k(\beta_{k+1} \langle X_k, e_i \rangle) \Gamma^i(y_{k+1}).
\end{aligned}$$

Time je tvrđenje dokazano. □

Ukoliko u teoremi 4.2 stavimo  $R_k = R_0 = 1$ ,  $\alpha_k = 0$ ,  $\beta_k = (0, \dots, 0)^T$ ,  $\delta_0 = 0$ , dobijamo

$$\gamma_{k+1}(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_k(X_k), e_i \rangle \pi_i \Gamma^i(y_{k+1}).$$

## 4.3 Stanja, prelazi i vreme zadržavanja

### Ocenjivač za broj skokova

Podsetimo se,

$$X_k = \Pi X_{k-1} + V_k.$$

Ako lanac Markova prelazi iz stanja  $e_r$  u vremenu  $l-1$  u stanje  $e_s$  u vremenu  $l$ ,  $l, l+1 \in [0, k]$  tada je  $\langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle = 1$ , inače je 0. Drugim rečima, kad god sistem

pređe iz stanja  $e_r$  u stanje  $e_s$  brojimo 1, inače 0. Što znači da broj skokova iz stanja  $e_r$  u stanje  $e_s$  tokom interval  $[0, k]$  možemo da zapišemo kao

$$\mathcal{J}_k^{rs} = \sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle.$$

Ukoliko raspíšemo prethodni izraz imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k^{rs} &= \sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle = \mathcal{J}_{k-1}^{rs} + \langle X_{k-1}, e_r \rangle \langle X_k, e_s \rangle \\ &= \mathcal{J}_{k-1}^{rs} + \langle X_{k-1}, e_r \rangle (\langle \Pi X_{k-1}, e_s \rangle + \langle V_k, e_s \rangle) \\ &= \mathcal{J}_{k-1}^{rs} + \langle X_{k-1}, e_r \rangle \langle \Pi X_{k-1}, e_s \rangle + \langle X_{k-1}, e_r \rangle \langle V_k, e_s \rangle. \end{aligned}$$

Iz teoreme 4.2 sa  $R_k = \mathcal{J}_k^{rs}$ ,  $R_0 = 0$ ,  $\alpha_k = \langle X_{k-1}, e_r \rangle \pi_{rs}$ ,  $\beta_k = \langle X_{k-1}, e_r \rangle e_s^T$ ,  $\delta_k = 0$  sledi

$$\begin{aligned} \gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs} X_k) &= \sum_{i=1}^N [\langle \gamma_{k-1}(\mathcal{J}_{k-1}^{rs} X_{k-1}), e_i \rangle \Gamma^i(y_k) \pi_i \\ &\quad + \gamma_{k-1}(\langle X_{k-1}, e_r \rangle \pi_{sr} \langle X_{k-1}, e_i \rangle) \Gamma^i(y_k) \pi_i \\ &\quad + (\text{diag}(\pi_i) - \pi_i \pi_i^T) \gamma_{k-1}(\langle X_{k-1}, e_r \rangle e_s^T \langle X_{k-1}, e_i \rangle) \Gamma^i(y_k)]. \end{aligned}$$

U drugom sabirku je jedino ostao slučaj  $i = r$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \gamma_{k-1}(\langle X_{k-1}, e_r \rangle \pi_{sr} \langle X_{k-1}, e_i \rangle) \Gamma^i(y_k) \pi_i &= \gamma_{k-1}(\langle X_{k-1}, e_r \rangle \pi_{sr}) \Gamma^r(y_k) \pi_r \\ &= \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) \pi_{sr} \pi_r; \end{aligned}$$

Isto važi i za treći sabirak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [(\text{diag}(\pi_i) - \pi_i \pi_i^T) \gamma_{k-1}(\langle X_{k-1}, e_r \rangle e_s^T \langle X_{k-1}, e_i \rangle) \Gamma^i(y_k)] &= \\ &= (\text{diag}(\pi_r) - \pi_r \pi_r^T) \gamma_{k-1}(\langle X_{k-1}, e_r \rangle e_s^T \langle X_{k-1}, e_i \rangle) \Gamma^r(y_k) \\ &= (\text{diag}(\pi_r) - \pi_r \pi_r^T) (\langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \langle X_{k-1}, e_i \rangle) \Gamma^r(y_k) \\ &= \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) (\pi_{sr} e_s - \pi_{sr} \pi_r). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs}) &= \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{k-1}(\mathcal{J}_{k-1}^{rs} X_{k-1}), e_i \rangle \Gamma^i(y_k) \pi_i + \\
&\quad \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) \pi_{sr} \pi_i + \\
&\quad \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) (\pi_{sr} e_s - \pi_{sr} \pi_r) \\
&= \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{k-1}(\mathcal{J}_{k-1}^{rs} X_{k-1}), e_i \rangle \Gamma^i(y_k) \pi_i + \\
&\quad \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) \pi_{sr} \pi_i + \\
&\quad \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) \pi_{sr} e_s - \\
&\quad \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) \pi_{sr} \pi_r.
\end{aligned}$$

Konačno

$$\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs} X_k) = \sum_{i=1}^N [\langle \gamma_{k-1}(\mathcal{J}_{k-1}^{rs} X_{k-1}), e_i \rangle \Gamma^i(y_k) \pi_i] + \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) \pi_{sr} e_s.$$

### Ocenjivač za vreme zadržavanja

Sa  $\mathcal{O}_k^r$  ćemo označiti broj koliko puta, do vremena  $k$ , lanac Markova okupira stanje  $e_r$ . Tada,

$$\mathcal{O}_k^r = \sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle = \mathcal{O}_{k-1}^r + \langle X_r, e_r \rangle.$$

Intuitivno objašnjenje vremena zadržavanja je sledeće. Znamo,  $\langle X_{l-1}, e_r \rangle = 1$  ako i samo ako  $X_{l-1} = e_r$ , inače je  $\langle X_{l-1}, e_r \rangle = 0$ . Drugim rečima, brojimo 1 kad god je proces u stanju  $e_r$  tokom intervala  $[0, k]$ .

Sada primenjujemo teoremu 4.2 sa  $R_k = \mathcal{O}_k^r, R_0 = 0, \alpha_k = \langle X_k, e_r \rangle, \beta_k = (0, \dots, 0)^T, \delta_k = 0$  i dobijamo

$$\gamma_k(\mathcal{O}_k^r X_k) = \sum_{i=1}^N [\langle \gamma_{k-1}(\mathcal{O}_k^r X_{k-1}), e_i \rangle \Gamma^i(y_k) \pi_i + \gamma_{k-1}(\langle X_k, e_r \rangle \langle X_{k-1}, e_i \rangle) \Gamma^i(y_k) \pi_i].$$

Kako u drugom sabirku ostaje samo slučaj  $i = r$ , sledi

$$\gamma_k(\mathcal{O}_k^r X_k) = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{k-1}(\mathcal{O}_k^r X_{k-1}), e_i \rangle \Gamma^i(y_k) \pi_i + \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k) \pi_r.$$

## Ocenjivač za pomoćni proces

Da bismo mogli da ocenimo vektor drifta  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$  i vektor varijansi  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$  u procesu

$$y_{k+1} = \langle \mu, X_k \rangle + \langle \sigma, X_k \rangle z_{k+1},$$

potreban nam je pomoćni proces sledeće forme

$$\mathcal{T}_k^r(h) = \sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle h(y_l) = \mathcal{T}_{k-1}^r(h) + \langle X_{k-1}, e_r \rangle h(y_k),$$

gde  $h$  označava  $h(y) = y$  ili  $h(y) = y^2$ .

Teorema 4.2 sa  $R_k = \mathcal{T}_k^r(h)$ ,  $R_0 = 0$ ,  $\alpha_k = 0$ ,  $\beta_k = (0, \dots, 0)^T$ ,  $\delta_k = \langle X_k, e_r \rangle$  nam daje

$$\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(h)X_k) = \sum_{i=1}^N [\langle \gamma_{k-1}(\mathcal{T}_{k-1}^r(h)X_{k-1}), e_i \rangle \Gamma^i(y_k)\pi_i + \gamma_{k-1}(\langle X_k, e_r \rangle \langle X_{k-1}, e_i \rangle) \Gamma^i(y_k)h(y_k)\pi_i].$$

A kako je u drugom sabirku ostao samo slučaj  $i = r$

$$\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(h)X_k) = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_{k-1}(\mathcal{T}_{k-1}^r(h)X_{k-1}), e_i \rangle \Gamma^i(y_k)\pi_i + \langle \gamma_{k-1}(X_{k-1}), e_r \rangle \Gamma^r(y_k)h(y_k)\pi_r.$$

Izveli smo filtere za  $\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs}X_k)$ ,  $\gamma_k(\mathcal{O}_k^rX_k)$  i  $\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(h)X_k)$ , pa filtere za  $\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs})$ ,  $\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)$  i  $\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(h))$  možemo lako dobiti sumiranjem komponenti pomenutih sračunatih filtera. Odnosno

$$\begin{aligned} \gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs}) &= \langle \gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs}X_k), \underline{\mathbb{1}} \rangle, \\ \gamma_k(\mathcal{O}_k^r) &= \langle \gamma_k(\mathcal{O}_k^rX_k), \underline{\mathbb{1}} \rangle \end{aligned}$$

i

$$\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(h)) = \langle \gamma_k(\mathcal{T}_k^r(h)X_k), \underline{\mathbb{1}} \rangle.$$

U sledećem odeljku koristimo dobijene filtere kako bismo izveli rekurzivne ocene parametara.

## 4.4 Ocena parametara maksimiziranjem očekivanja

Aplikacije skrivenih modela Markova su podržane raznim algoritmima za ocenu parametara. U ovom radu koristimo poznatu metodu ocenjivanja maksimiziranjem očekivane

vrednosti funkcije verodostojnosti. Tehnika maksimizacije je veoma značajna za ocenjivanje modela verovatnoće koji zavise od neopaženih skrivenih promenljivih, i stoga je u širokoj upotrebi u ekonomiji i inženjerstvu. U suštini, maksimiziranje očekivanja je iterativna metoda koja se sastoji iz sledeća dva koraka:

- računanje očekivane vrednosti logaritma funkcije verodostojnosti s obzirom na trenutnu ocenu distribucije neopažene promenljive;
- računanje parametara koji maksimiziraju izračunatu očekivanu vrednost.

**Napomena 3.** Metodu ocenjivanja maksimizacijom očekivanja u nastavku skraćeno pišemo EM metoda (engl. Expectation Maximization).

**Teorema 4.3.** [13] *Ocene verovatnoća prelaza,  $\hat{\pi}_{sr}(k)$ , za data opažanja do vremena  $k$  su date sa*

$$\hat{\pi}_{sr}(k) = \frac{\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs})}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}$$

**Dokaz.**

Prvi korak je da razvijemo funkciju verodostojnosti parametara  $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ . Pretpostavljamo da je početna verovatnoća  $P(X_0) = \pi_0$  poznata. Stoga, za dato  $\pi_0$  i  $\pi_{sr}$  funkcija verodostojnosti za naš lanac je:

$$P(X_0, X_1, \dots, X_k | \pi_0, \pi_{sr}) = P(X_0)P(X_1|X_0) \cdots P(X_k|X_{k-1}) = \pi_0 \prod_{l=0}^k P(X_l|X_{l-1}).$$

Znamo da je za dato  $\pi_{sr}, s, r = 1, \dots, N$ :

$$P(X_l|X_{l-1}) = \prod_{r,s=1}^N \pi_{sr}^{\langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle},$$

pa funkcija verodostojnosti postaje:

$$P(X_0, X_1, \dots, X_k | \pi_0, \pi_{sr}) = \pi_0 \prod_{l=0}^k \prod_{r,s=1}^N \pi_{sr}^{\langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle}.$$

Slično, za date ocene verovatnoća prelaza nakon  $k$  opažanja,  $\hat{\pi}_{sr}(k)$ , funkcija verodostojnosti za  $(X_0, X_1, \dots, X_k)$  je

$$P(X_0, X_1, \dots, X_k | \pi_0, \hat{\pi}_{sr}(k)) = \pi_0 \prod_{l=0}^k \prod_{r,s=1}^N \hat{\pi}_{sr}(k)^{\langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle}.$$

Sada možemo da zapišemo količnik funkcija verodostojnosti

$$L_k = \frac{\pi_0 \prod_{l=0}^k \prod_{r,s=1}^N \widehat{\pi}_{sr}(k)^{\langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle}}{\pi_0 \prod_{l=0}^k \prod_{r,s=1}^N \pi_{sr}^{\langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle}} = \prod_{l=0}^k \prod_{r,s=1}^N \left( \frac{\widehat{\pi}_{sr}(k)}{\pi_{sr}} \right)^{\langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle}. \quad (4.19)$$

Za maksimizaciju EM metodom nam treba logaritam izraza (4.19)

$$\begin{aligned} \ln L_k &= \sum_{l=1}^k \sum_{r,s=1}^N \langle X_{l-1}, e_r \rangle \langle X_l, e_s \rangle (\ln \widehat{\pi}_{sr}(k) - \ln \pi_{sr}) \\ &= \sum_{r,s=1}^N \mathcal{J}_k^{rs} (\ln \widehat{\pi}_{sr}(k) - \ln \pi_{sr}) = \sum_{r,s=1}^N \mathcal{J}_k^{rs} \ln \widehat{\pi}_{sr}(k) - R(\pi), \end{aligned} \quad (4.20)$$

gde je  $R(\pi) = \sum_{r,s=1}^N \mathcal{J}_k^{rs} \ln \pi_{sr}$  i ne zavisi od  $\widehat{\pi}_{sr}$ .

**Napomena 4.** Ukoliko analiziramo (4.20) vidimo zašto koristimo metodu maksimiziranja očekivanja. Drugim rečima, kako je lanac Markova  $X_k$  skriven, sledi da ne možemo odmah maksimizirati (4.20) jer  $\mathcal{J}_k^{rs}$  nije data informacija. Srećom, znamo  $\gamma_k(J_k^{rs} X_k)$  pa možemo uvek da iskoristimo normalizator i vratimo nazad u  $E(\mathcal{J}_k^{rs} | \mathcal{Y}_k)$ . Stoga, umesto da maksimiziramo  $\ln L_k$  maksimiziramo  $E(\ln L_k | \mathcal{Y}_k)$ .

Dalje,

$$\begin{aligned} E(\ln L_k | \mathcal{Y}_k) &= E\left(\sum_{r,s=1}^N \mathcal{J}_k^{rs} \ln \widehat{\pi}_{sr}(k) - R(\pi) | \mathcal{Y}_k\right) = E\left(\sum_{r,s=1}^N \mathcal{J}_k^{rs} \ln \widehat{\pi}_{sr}(k) | \mathcal{Y}_k\right) - \widehat{R}(\pi) \\ &= \sum_{r,s=1}^N \ln \widehat{\pi}_{sr}(k) E(\mathcal{J}_k^{rs} | \mathcal{Y}_k) - \widehat{R}(\pi). \end{aligned}$$

Kako su  $\widehat{\pi}_{sr}(k)$  verovatnoće, mora biti zadovoljen uslov

$$\sum_{s=1}^N \widehat{\pi}_{sr}(k) = 1.$$

Cilj nam je da pronađemo  $\widehat{\pi}_{sr}(k)$  koje maksimizira  $E(\ln L_k | \mathcal{Y}_k)$  uz uslov  $\sum_{s=1}^N \widehat{\pi}_{sr}(k) = 1$ , pa formiramo funkciju Lagranža

$$L(\widehat{\pi}_{sr}(k), \lambda) = \sum_{r,s=1}^N \ln \widehat{\pi}_{sr}(k) E(\mathcal{J}_k^{rs} | \mathcal{Y}_k) - \widehat{R}(\pi) + \lambda \left( \sum_{s=1}^N \widehat{\pi}_{sr}(k) - 1 \right).$$



Diferenciranjem funkcije po  $\hat{\pi}_{sr}(k)$  i  $\lambda$ , i izjednačavanjem izvoda sa 0, dobijamo

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\pi}_{sr}(k)}(\hat{\pi}_{sr}(k), \lambda) = \frac{E(\mathcal{J}_k^{rs} | \mathcal{Y}_k)}{\hat{\pi}_{sr}(k)} + \lambda E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k) = 0, \forall r, s = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\hat{\pi}_{sr}(k), \lambda) = \sum_{s=1}^N E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k) \hat{\pi}_{sr}(k) - k = 0.$$

Sledi

$$\frac{E(\mathcal{J}_k^{rs} | \mathcal{Y}_k)}{\hat{\pi}_{sr}(k)} = -\lambda$$

i

$$\sum_{s=1}^N \hat{\pi}_{sr}(k) = 1.$$

Uočimo

$$\sum_{r,s=1}^N \mathcal{J}_k^{rs} = \mathcal{O}_k^r,$$

odnosno u formi očekivanja

$$\sum_{r,s=1}^N E(\mathcal{J}_k^{rs} | \mathcal{Y}_k) = E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k).$$

Dobijamo,

$$\lambda = -E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k).$$

Odnosno,

$$\hat{\pi}_{sr}(k) = \frac{E(\mathcal{J}_k^{rs} | \mathcal{Y}_k)}{E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k)} = \frac{\frac{\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs})}{\gamma_k(1)}}{\frac{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}{\gamma_k(1)}} = \frac{\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs})}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}.$$

Time je tvrđenje dokazano. □

Pošto smo dobili ocene verovatnoća prelaza, ostaje nam da ocenimo i ostale specifikacije lanca Markova - skup stanja  $S$ . Tačnije, trebaju nam ocene za  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$  i  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$ .

**Teorema 4.4.** [13] *Optimalne ocene elemenata vektora drifta,  $\hat{\mu}_r(k)$ , za data opažanja do vremena  $k$  su:*

$$\hat{\mu}_r(k) = \frac{\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y_k))}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}, r = 1, \dots, N.$$

**Dokaz.**

Da se podsetimo,

$$y_l = \langle \mu, X_{l-1} \rangle + \langle \sigma, X_{l-1} \rangle z_l$$

$$y_l : N(\langle \mu, X_{l-1} \rangle, \langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2), \forall l = 1, \dots, k.$$

Odmah možemo uočiti da razliku od ocenjivanja verovatnoća prelaza, ovde formiramo funkciju verodostojnosti parametara  $(y_1, \dots, y_k)$ .

Znamo da je

$$P(y_l | X_{l-1}, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle \sigma, X_{l-1} \rangle} e^{-\frac{(y_l - \langle \mu, X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2}},$$

pa funkcija verodostojnosti ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} P(y_1, \dots, y_k | \mathcal{F}_{k-1}, \mu, \sigma) &= P(y_1, \dots, y_k | X_0, X_1, \dots, X_{k-1}, \mu, \sigma) \\ &= P(y_1 | X_0, \mu, \sigma) \cdots P(y_k | X_{k-1}, \mu, \sigma) \\ &= \prod_{l=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle \sigma, X_{l-1} \rangle} e^{-\frac{(y_l - \langle \mu, X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2}}. \end{aligned}$$

Za datu ocenu vektora drifta,  $\hat{\mu}$ , funkcija verodostojnosti je

$$P(y_1, \dots, y_k | \mathcal{F}_{k-1}, \hat{\mu}(k), \sigma) = \prod_{l=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle \sigma, X_{l-1} \rangle} e^{-\frac{(y_l - \langle \hat{\mu}(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2}}.$$

Formiramo količnik verodostojnosti

$$L_k = \prod_{l=1}^k e^{[-\frac{(y_l - \langle \hat{\mu}(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2} + \frac{(y_l - \langle \mu, X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2}]}$$

EM metodom tražimo vrednost parametra za koje je očekivana vrednost logaritma prethodnog izraza optimalna, pa formiramo

$$\begin{aligned} \ln L_k &= \sum_{l=1}^k \left[ -\frac{(y_l - \langle \hat{\mu}(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2} + \frac{(y_l - \langle \mu, X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2} \right] \\ &= \sum_{l=1}^k \frac{2y_l \langle \hat{\mu}(k), X_{l-1} \rangle - \langle \hat{\mu}(k), X_{l-1} \rangle^2 - 2y_l \langle \mu, X_{l-1} \rangle + \langle \mu, X_{l-1} \rangle^2}{2\langle \sigma, X_{l-1} \rangle^2} \\ &= \sum_{l=1}^k \left( \sum_{r=1}^N \langle X_{l-1}, e_r \rangle \right) \frac{2y_l \langle \hat{\mu}(k), e_r \rangle - \langle \hat{\mu}(k), e_r \rangle^2 - 2y_l \langle \mu, e_r \rangle + \langle \mu, e_r \rangle^2}{2\langle \sigma, e_r \rangle^2} \\ &= \sum_{l=1}^k \left( \sum_{r=1}^N \langle X_{l-1}, e_r \rangle \right) \frac{2y_l \hat{\mu}_r(k) - \hat{\mu}_r^2(k) - 2y_l \mu_r + \mu_r^2}{2\sigma_r^2}. \end{aligned}$$

Problem optimizacije koji rešavamo je dakle

$$\max_{\hat{\mu}_r(k)} E\left(\sum_{l=1}^k \left(\sum_{r=1}^N \langle X_{l-1}, e_r \rangle\right) \frac{2y_l \hat{\mu}_r(k) - \hat{\mu}_r^2(k) - 2y_l \mu_r + \mu_r^2}{2\sigma_r^2} \middle| \mathcal{Y}_k\right). \quad (4.21)$$

Diferenciranjem (4.21) i izjednačavanjem sa 0 dobijamo

$$E\left(\sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle \frac{2y_l - 2\hat{\mu}_r(k)}{2\sigma_r^2} \middle| \mathcal{Y}_k\right) = 0, r = 1, \dots, N$$

A nakon sređivanja

$$E\left(\sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle y_l \middle| \mathcal{Y}_k\right) = E\left(\sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle \hat{\mu}_r(k) \middle| \mathcal{Y}_k\right) = \hat{\mu}_r(k) E\left(\sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle \middle| \mathcal{Y}_k\right)$$

i

$$E(\mathcal{T}_k^r(y_k) | \mathcal{Y}_k) = \hat{\mu}_r(k) E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k).$$

Odnosno:

$$\hat{\mu}_r(k) = \frac{E(\mathcal{T}_k^r(y_k) | \mathcal{Y}_k)}{E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k)} = \frac{\frac{\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y_k))}{\gamma_k(1)}}{\frac{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}{\gamma_k(1)}} = \frac{\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y_k))}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}.$$

□

**Teorema 4.5.** [13] *Optimalni izbori za elemente vektora volatilnosti,  $\hat{\sigma}_r(k)$ , za data opažanja do vremena  $k$  su*

$$\hat{\sigma}_r(k) = \sqrt{\frac{\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y_k^2)) - 2\hat{\mu}_r(k)\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y_k)) - \hat{\mu}_r^2(k)\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}}.$$

**Dokaz.**

Uz oznaku  $\mu_r = \hat{\mu}_r(k)$ , funkcija verodostojnosti prima sledeći oblik

$$P(y_1, \dots, y_k | \mathcal{F}_{k-1}, \mu(k), \hat{\sigma}(k)) = \prod_{l=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle \hat{\sigma}(k), X_{l-1} \rangle} e^{-\frac{(y_l - \langle \mu(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \hat{\sigma}(k), X_{l-1} \rangle^2}}.$$

Količnik verodostojnosti postaje

$$L_k = \prod_{l=1}^k \frac{\langle \sigma, X_{l-1} \rangle}{\langle \hat{\sigma}(k), X_{l-1} \rangle} e^{-\frac{(y_l - \langle \mu(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2\langle \hat{\sigma}(k), X_{l-1} \rangle^2} - (y_l - \langle \mu(k), X_{l-1} \rangle)^2 2\langle \sigma(k), X_{l-1} \rangle^2]},$$

a njegov prirodni logaritam

$$\begin{aligned}
\ln L_k &= \sum_{l=1}^k [\ln \langle \sigma, X_{l-1} \rangle - \ln \langle \hat{\sigma}(k), X_{l-1} \rangle - \frac{(y_l - \langle \mu(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2 \langle \hat{\sigma}(k), X_{l-1} \rangle^2} - \frac{(y_l - \langle \mu(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2 \langle \sigma(k), X_{l-1} \rangle^2}] \\
&= \sum_{l=1}^k \left( \sum_{r=1}^N \langle X_{l-1}, e_r \rangle \right) [\ln \langle \sigma, X_{l-1} \rangle - \ln \langle \hat{\sigma}(k), X_{l-1} \rangle - \frac{(y_l - \langle \mu(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2 \langle \hat{\sigma}(k), X_{l-1} \rangle^2} \\
&\quad + \frac{(y_l - \langle \mu(k), X_{l-1} \rangle)^2}{2 \langle \sigma(k), X_{l-1} \rangle^2}] \\
&= \sum_{l=1}^k \left( \sum_{r=1}^N \langle X_{l-1}, e_r \rangle \right) [\ln \langle \sigma, e_r \rangle - \ln \langle \hat{\sigma}(k), e_r \rangle - \frac{(y_l - \langle \mu(k), e_r \rangle)^2}{2 \langle \hat{\sigma}(k), e_r \rangle^2} + \frac{(y_l - \langle \mu(k), e_r \rangle)^2}{2 \langle \sigma(k), e_r \rangle^2}] \\
&= \sum_{l=1}^k \left( \sum_{r=1}^N \langle X_{l-1}, e_r \rangle \right) [\ln \sigma_r - \ln \hat{\sigma}_r(k) - \frac{(y_l - \hat{\mu}_r(k))^2}{2 \hat{\sigma}_r^2(k)} + \frac{(y_l - \hat{\mu}_r(k)r)^2}{2 \sigma_r^2}].
\end{aligned}$$

Rezonujemo kao i u prethodnim slučajevima, pa naš problem maksimizacije postaje

$$\max_{\hat{\sigma}_r(k)} E(\ln L_k | \mathcal{Y}_k).$$

Dobijamo:

$$E\left(\sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle \left(-\frac{1}{\hat{\sigma}_r(k)} + \frac{(y_l - \hat{\mu}_r(k))^2}{\hat{\sigma}_r^3(k)}\right) | \mathcal{Y}_k\right) = 0.$$

Odnosno,

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_r^3(k)} E\left(\sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle (y_l^2 - 2y_l \hat{\mu}_r(k) + \hat{\mu}_r(k)^2) | \mathcal{Y}_k\right) = \frac{1}{\hat{\sigma}_r(k)} E\left(\sum_{l=1}^k \langle X_{l-1}, e_r \rangle | \mathcal{Y}_k\right),$$

pa sledi

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_r^3(k)} (E(\mathcal{T}_k^r(y_k^2) | \mathcal{Y}_k) - 2\hat{\mu}_r(k) E(\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y_k)) | \mathcal{Y}_k) + \hat{\mu}_r(k)^2 E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k)) = \frac{1}{\hat{\sigma}_r(k)} E(\mathcal{O}_k^r | \mathcal{Y}_k).$$

Konačno dobijamo

$$\hat{\sigma}_r^2(k) = \frac{\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y_k^2)) - 2\hat{\mu}_r(k) \gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y_k)) - \hat{\mu}_r^2(k) \gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}.$$

Time je tvrđenje pokazano.  $\square$

Jednom kada se ocene parametri, ovaj metod se može koristiti za generaciju scenarija prinosa budućih cena, nakon što je ocenjen lanac Markova za sledeći period. Scenariji se generišu uzorkovanjem iz odgovarajućih raspodela, prema  $y_{k+1} = M_k + \Sigma_k z_{k+1}$ .

## Predviđanje cene rizične aktive

Pomoću ocena koje smo izveli za matricu prelaza, drift i volatilnost, možemo predvideti cenu rizične aktive za sledeći dan trgovanja.

Dakle, cilj nam je da izvedemo formulu za  $E(S_{k+1}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma)$ .

Znamo da je:

$$y_{k+1} = \ln \frac{S_k}{S_{k+1}},$$

što povlači

$$S_{k+1} = S_k e^{y_{k+1}}.$$

Pa, imamo

$$\begin{aligned} E(S_{k+1}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) &= E(S_k e^{y_{k+1}}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) = S_k E(e^{y_{k+1}}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) \\ &= S_k E\left(\sum_{i=1}^N \langle X_k, e_i \rangle e^{\langle \mu, X_k \rangle + \langle \sigma, X_k \rangle z_{k+1}}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma\right) \\ &= S_k \sum_{i=1}^N E(\langle X_k, e_i \rangle|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) E(e^{\mu_i}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) E(e^{\sigma_i z_{k+1}}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) \end{aligned}$$

Dalje znamo,

$$E(\langle X_k, e_i \rangle|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) = \langle E(X_k|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma), e_i \rangle = \left\langle \frac{\gamma_k(X_k)}{\gamma_k(1)}, e_i \right\rangle.$$

Kako je  $\mu_i, i = 1 \dots N$  nezavisno od  $\{\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma\}$  imamo

$$E(e^{\mu_i}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) = e^{\mu_i}.$$

Slično, i  $\sigma_i$  je nezavisno  $\{\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma\}$ , pa još uz činjenicu  $z_{k+1} : \mathcal{N}(0, 1)$  dobijamo

$$\begin{aligned} E(e^{\sigma_i z_{k+1}}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) &= E(e^{\sigma_i z_{k+1}}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma_i z_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_{k+1}^2}{2}} dz_{k+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(z_{k+1} - \sigma_i)^2}{2}} e^{-\frac{z_{k+1}^2}{2}} dz_{k+1} \\ &= e^{\frac{\sigma_i^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^{\frac{\sigma_i^2}{2}}. \end{aligned}$$

Konačno, dobijamo

$$E(S_{k+1}|\mathcal{Y}_k, \Pi, \mu, \sigma) = S_k \sum_{i=1}^N e^{\mu_i} e^{\frac{\sigma_i^2}{2}} \left\langle \frac{\gamma_k(X_k)}{\gamma_k(1)}, e_i \right\rangle.$$

## 4.5 Algoritam za generaciju scenarija pomoću metoda skrivenih lanaca Markova

Na samom kraju teorijskog dela o modelu zasnovanom na skrivenim lancima Markova ostaje da objasnimo kako se pomenuti model koristi za generaciju scenarija. Kada se ocene parametri, ovaj metod se može koristiti za generaciju scenarija prinosa budućih cena, nakon što je ocenjen lanac Markova za sledeći period. Scenariji se generišu uzorkovanjem iz odgovarajućih raspodela, prema postavljenoj formi u odeljku 4.1.

Osnovni koraci u proceduri generisanja scenarija su:

- ocenjivanje skupa parametara skrivenog lanca Markova za dat niz opažanja.
- generisanje trajektorije podataka prema modelu koristeći aproksimaciju statističkih osobina.

Prvo predstavljamo algoritam za dobijanje optimalnih ocena [9]:

1. Odaberemo početne vrednosti za vektor drifta  $\mu^0 = [\mu_1^0, \dots, \mu_N^0]$  prema očekivanoj vrednosti modelirane vremenske serije, za vektor volatilitnosti  $\sigma^0 = [\sigma_1^0, \dots, \sigma_N^0]$  s obzirom na standardnu devijaciju serije i za verovatnoće prelaza  $\Pi^0 = [\pi_{ij}^0]$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  za koje pretpostavljamo da su identično raspodeljene.
2. Sledeći korak je da postavimo početne vrednosti za procese  $\gamma_0(\mathcal{J}_0^{rs} X_0)$ ,  $\gamma_0(\mathcal{O}_0^r X_0)$  i  $\gamma_0(\mathcal{T}_0^r(h) X_0)$ . Uzimamo da su početne vrednosti nula vektori za sve procese.
3. Određujemo dužinu staze i u zavisnosti dužine vremenske serije koju posmatramo zavisi i broj obnavljanja pokretanja algoritma.
4. Računamo Radon-Nikodym izvode  $\Gamma^i(y_k)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .
5. Računamo ocenjivač stanja  $\gamma_k(X_k)$  kao i rekurzivne filtere za skokove, vreme zadržavanja i pomoćni proces.
6. Nakon što se odrede filteri za trenutnu stazu, određujemo ocene parametara koje se uzimaju kao početne vrednosti za sledeću iteraciju.

7. Dva poslednja koraka se ponavljaju sve dok se algoritam ne obnovi odabrani broj puta.
8. Dobijene ocene se koriste za generaciju scenarija prinosa finansijskih vremenskih serija.

Kada smo dobili ocene, koristimo sledeći algoritam za generaciju scenarija pomoću dobijenih optimalnih ocena parametara:

- Prvi korak je da generišemo standardizovane normalne slučajne promenljive uz pomoć simulacije  $\sqrt{k}\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Potom generišemo scenarije za sledeći vremenski period  $k + 1$ :
  - Računamo uslovno očekivanje lanca Markova u trenutku  $k + 1$ , to jest  $E(X_{k+1}|\mathcal{Y}_k)$
  - Računamo parametre:

$$\mu_{scen} = \langle \mu, E(X_{k+1}|\mathcal{Y}_k) \rangle$$

i

$$\sigma_{scen} = \langle \sigma, E(X_{k+1}|\mathcal{Y}_k) \rangle.$$

- Kreiramo scenarije za prinose:

$$S_{scen} = C(k)e^{(\mu_{scen} - \frac{\sigma_{scen}^2}{2})k + \sigma_{scen}z_{scen}},$$

gde je sa  $C(k)$  označen poslednji stvarni podatak u procesu opažanja, a  $z_{scen}$  su nezavisne standardizovane normalne slučajne promenljive nezavisne i od lanca Markova.

- I na kraju, pomoću ocenjenih cena računamo željeni prinosi date serije za različite scenarije.

## 5

# Numerički eksperiment

U ovom odeljku ispitatićemo učinak opisanog generatora scenarija.

Međutim, pre nego što počnemo sa samom generacijom, objasnićemo na jednostavnom primeru finansijsku primenu za koju model skrivenih lanaca Markova može biti veoma koristan. Zamislimo da raspolažemo izvesnim kapitalom koji želimo da uložimo u nekoliko različitih aktiva. Prirodno se javlja pitanje i odluka: kako raspodeliti budžet na ove aktive, a da prinos bude optimalan na kraju investicionog perioda? Kako su buduće cene aktiva nepoznate, prinosi su slučajne promenljive. Tu stupaju generatori scenarija, pomoću kojih raspodele tih slučajnih promenljivih aproksimiramo diskretnim raspodelama sa konačnim ishodima.

Pretpostavimo da se naš skup aktiva sastoji iz skupa istorijskih podataka sledećih finansijskih vremenskih serija:

- cene indeksa Standard & Poor 500 (S&P 500)
- cene indeksa Dow Jones Industrial (DJI)
- cene indeksa FTSE 350

Posmatrali smo dnevne cene tokom 2010. godine za sve tri vremenske serije (ukupno 252 radnih dana).

U našem eksperimentu prvo smo generisali scenarije dobijene metodom skrivenih lanaca Markova, izvršili ispitivanje scenarija istih serija, ali dobijenih GARCH(1,1) metodom i uporedili dobijene rezultate. Odlučili smo se da poredimo sa GARCH(1,1) modelom jer je on, ne samo dovoljan da opiše podatke, već i dobro modelira volatilitnost.

Za sve tri vremenske serije, prvi korak je da donesemo odluku o broju stanja lanca Markova. Konstruisaćemo smo lanac Markova sa tri stanja ( $N = 3$ ), što je konzistentno sa rezultatima koje su izveli Messina i Toscani [17]. Oni su, naime, uz pomoć kako

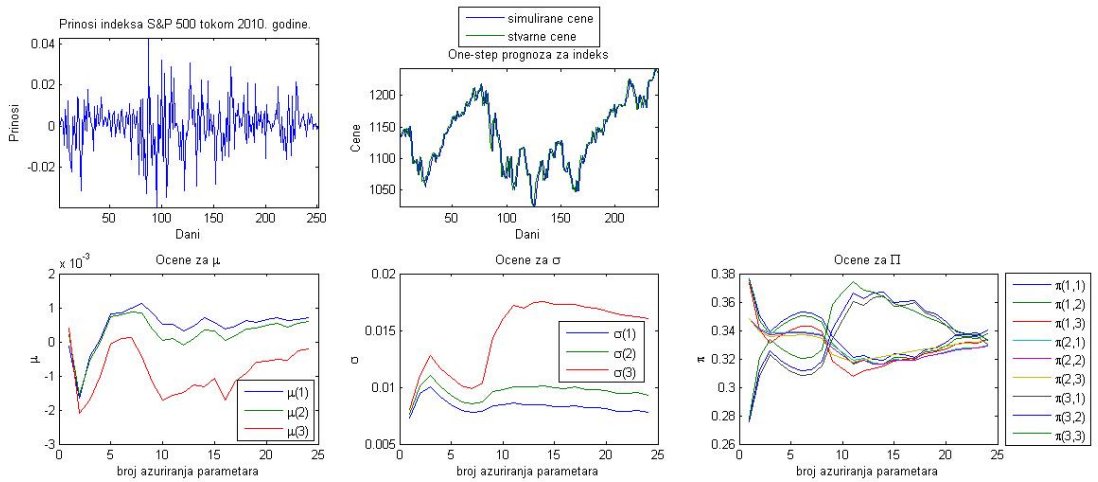


statističkih tehnika tako i ispitivanjem podataka ocenili dimenziju skupa stanja na 3 stanja i pokazali da model sa 3 stanja daje dobru reprezentaciju cena rizičnih aktiva.

Za dobijanje optimalnih ocena parametara i njihovu integraciju za generisanje scenarija koristili smo algoritam opisan u odeljku 4.5. Prilikom dobijanja ocena za sve tri vremenske serije, algoritam se pokretao 24 puta. Takođe, za skupove posmatranih podataka parametri su se ažurirali posle staze od 10 podataka.

**Napomena 5.** Rezultati vezani za implementaciju modela su dobijeni u programskom paketu *Matlab* (korišćeni kodovi su izloženi u poglavlju Dodatak).

## S&P 500



Slika 5.1: Ocena parametara za indeks S&P 500.

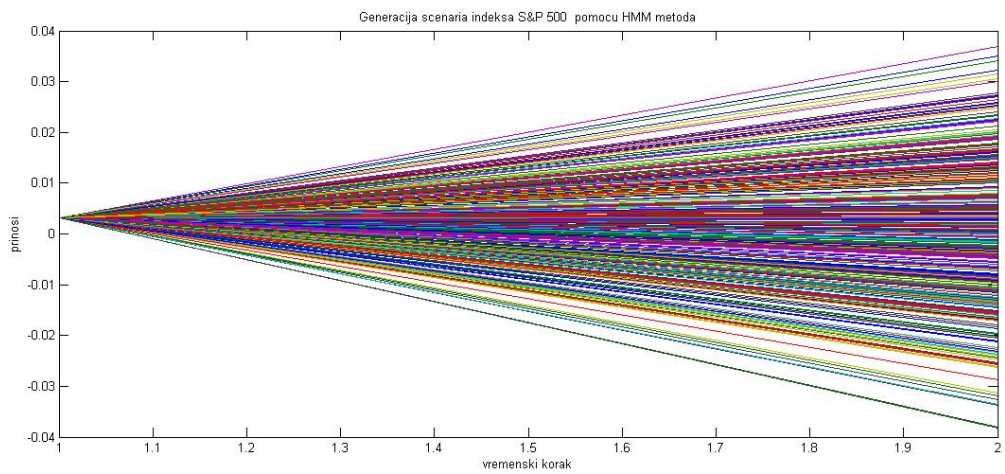
Počinjemo sa prvom serijom, to jest indeksom S&P 500.

Pošto smo odabrali da broj stanja lanca Markova bude tri, sledeći korak je da ocenimo parametre skrivenog lanca Markova. Dobijamo sledeće optimalne ocene parametara. Optimalna ocena matrice verovatnoća prelaza je:

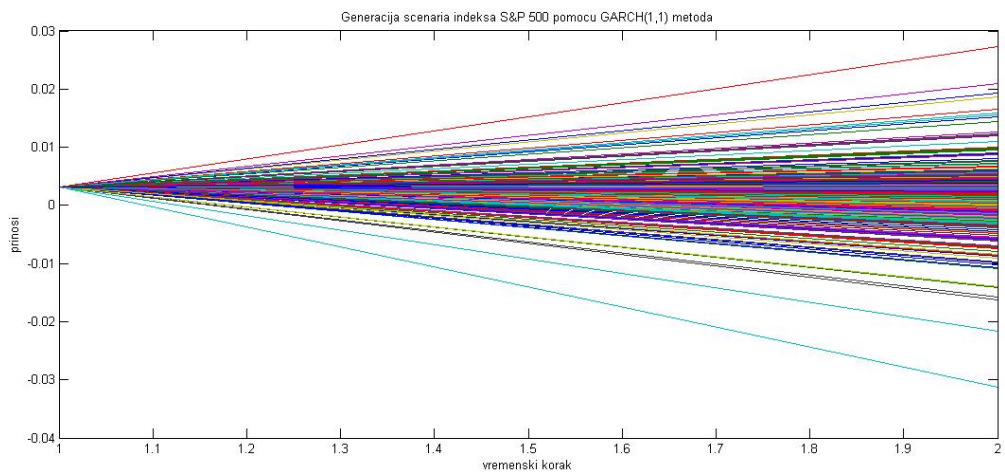
$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 0.3404 & 0.3380 & 0.3336 \\ 0.3295 & 0.3292 & 0.3327 \\ 0.3300 & 0.3329 & 0.3337 \end{bmatrix}$$

Optimalna ocena vektora drifta je

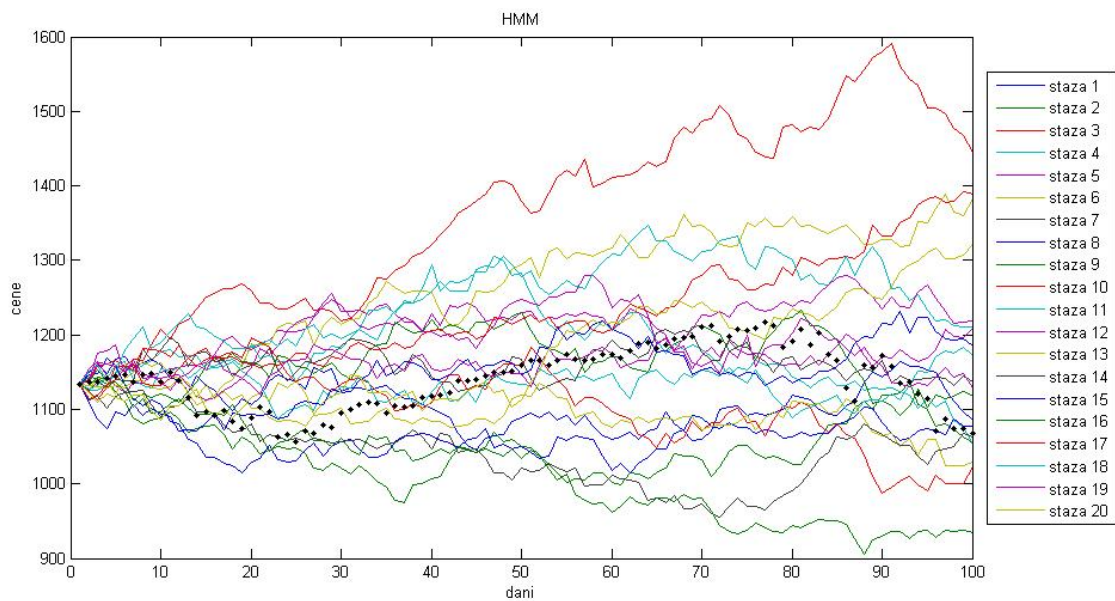
$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 0.7106 \times 10^{-3} \\ 0.6044 \times 10^{-3} \\ -0.2022 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$



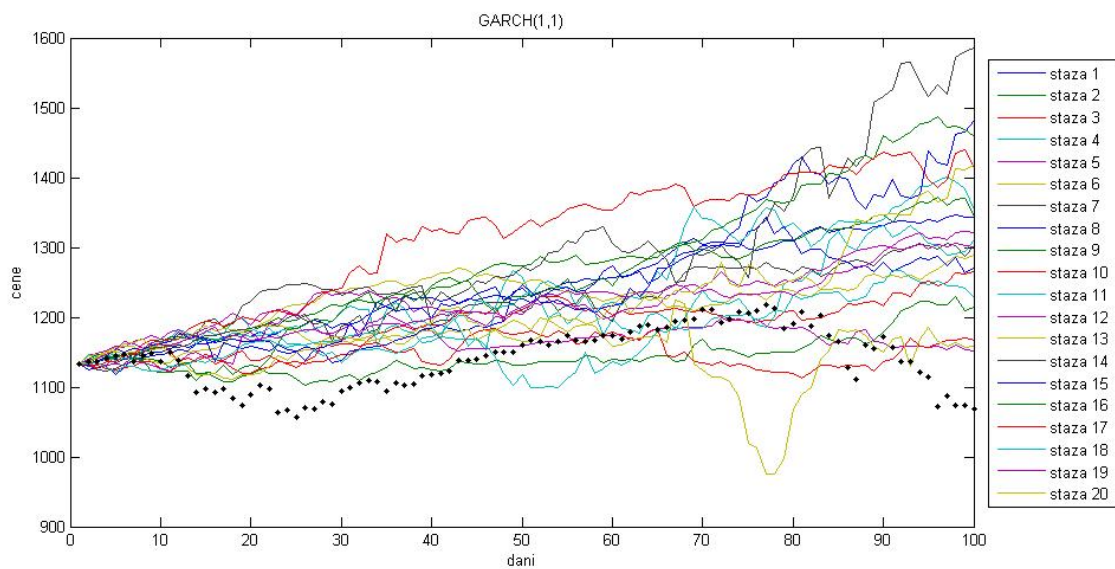
Slika 5.2: Simulacija prinosa indeksa S&P 500 za naredni vremenski trenutak pomoću skrivenog modela Markova.



Slika 5.3: Simulacija prinosa indeksa S&P 500 za naredni vremenski trenutak pomoću GARCH(1,1).



Slika 5.4: Simulirane cene indeksa S&P 500 pomoću modela skrivenih lanaca Markova, sa 20 staza tokom 100 dana.



Slika 5.5: Simulirane cene indeksa S&P 500 pomoću GARCH(1,1) modela, sa 20 staza tokom 100 dana.

a vektora volatilnosti

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0.0078 \\ 0.0093 \\ 0.0160 \end{bmatrix}.$$

Pored ocena parametara, na slici 5.1 predstavljeno je kretanje prinosa indeksa tokom posmatranog perioda kao i kretanje cena indeksa zajedno sa simuliranim cenama. Ukoliko pogledamo prinose vidimo da takvo ponašanje sugerise da bi pogodan izbor za opisivanje ovog procesa bio model skrivenih lanaca Markova koji karakterišu visok i srednji nivo volatilnosti. Ukoliko posmatramo ocene parametara lanca Markova, možemo videti da svi parametri konvergiraju.

Prateći dobijene oznake, generišemo scenarije za sledeći vremenski period i oni su prikazani na slici 5.2.

Potom pomoću GARCH(1,1) modela, isto generišemo scenarije za naredni vremenski period (slika 5.3). Možemo uočiti da za jedan period, nema značajnih razlika između ova dva modela.

Sada kada smo pokazali kako se generišu za jedan vremenski period, možemo da uporedimo scenarije sa istorijskim podacima za duži period. Generišemo 20 staza za posmatranu vremensku seriju pomoću oba metoda za 100 dana. Stazu cene aktiva simuliramo pomoću optimalnih ocena parametara. Na slikama 5.4 i 5.5 su prikazane staze koje smo dobili. Crnim tačkicama je označeno kretanje stvarnih cena indeksa. I zaista, možemo uočiti da se generator skrivenih lanaca Markova pokazuje kao razuman izbor. Vidimo da su predviđaja koja daje GARCH(1,1) model precenjena, za razliku od modela skrivenih lanaca koja su realistične, ali sa nekim ekstremno niskim ili visokim predviđanjima.

### **Dow Jones Industrial**

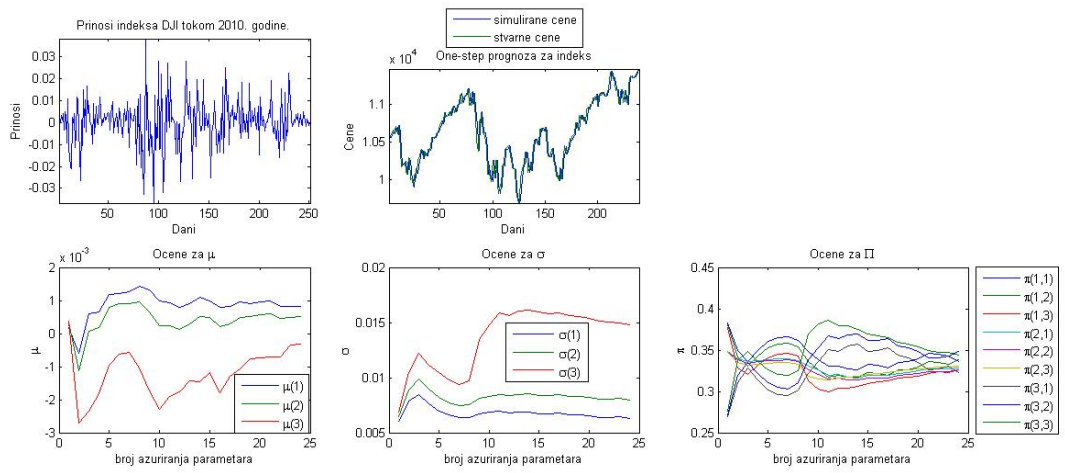
Za DJI indeks rezultati su sledeći.

Optimalna ocena matrice verovatnoća prelaza je:

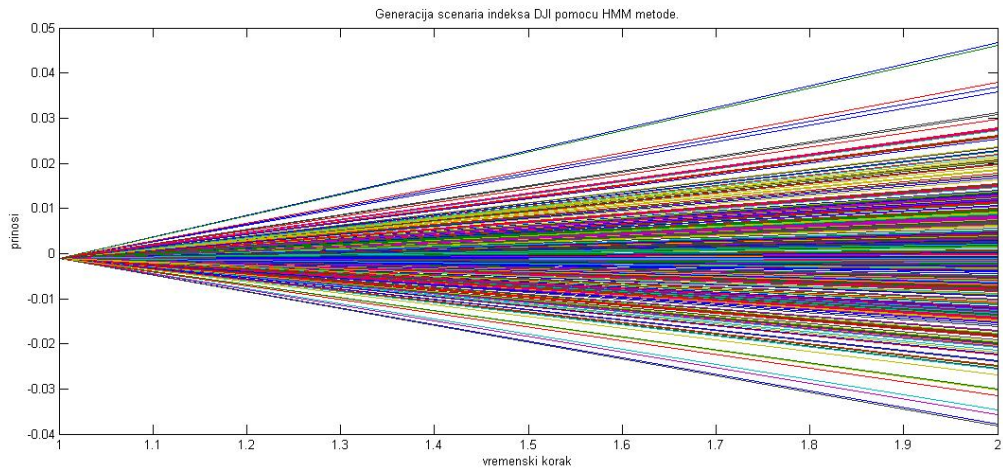
$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 0.3487 & 0.3383 & 0.3261 \\ 0.3286 & 0.3292 & 0.3305 \\ 0.3227 & 0.3359 & 0.3434 \end{bmatrix}$$

Optimalna ocena za vektor drifta je

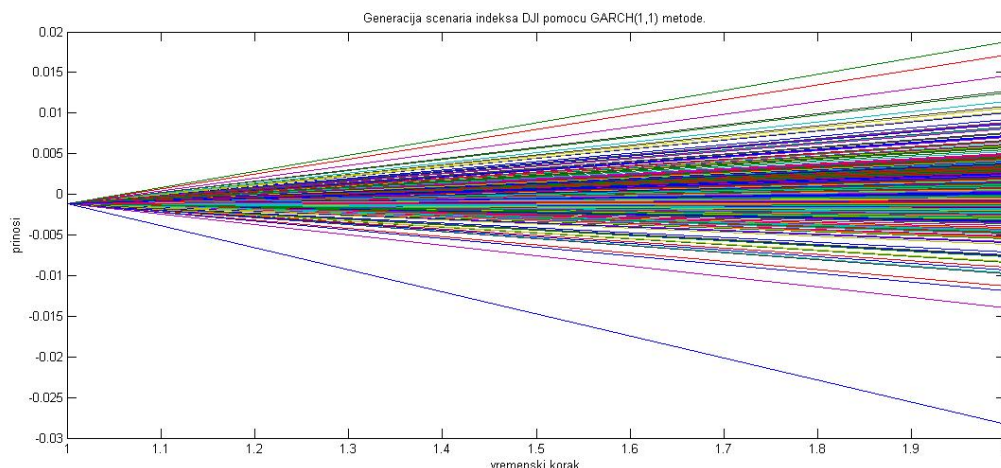
$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 0.8315 \times 10^{-3} \\ 0.5271 \times 10^{-3} \\ -0.3118 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$



Slika 5.6: Ocena parametara za indeks DJI.



Slika 5.7: Simulacija prinosa indeksa DJI za naredni vremenski trenutak pomoću skrivenog modela Markova.



Slika 5.8: Simulacija prinosa indeksa DJI za naredni vremenski trenutak pomoću GARCH(1,1) modela.

a za vektor volatilnosti

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0.0063 \\ 0.0079 \\ 0.0148 \end{bmatrix}.$$

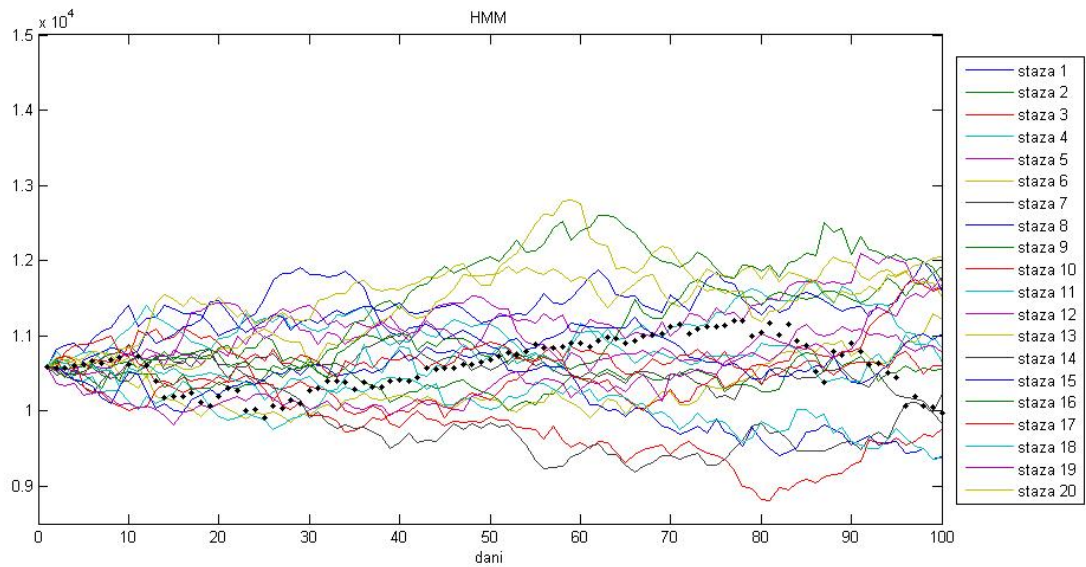
Sa slike 5.6, posmatranjem prinosa indeksa DJI, možemo uočiti da se oni ponašaju slično kao prinosi indeksa S&P 500, pa se opet skriveni model sa tri stanja javlja kao logičan izbor za modeliranje.

Kao i za prethodni slučaj upredićemo simulacije pomoću oba modela. Na osnovu dobijenih ocena, generišemo scenarije (po 400 staza) za sledeći vremenski period (i oni su prikazani na slici 5.7 pomoću modela skrivenih lanaca Markova, i na 5.8 pomoću GARCH(1,1) modela), a onda za prvih 100 podataka simuliramo cene i prikazujemo ih zajedno sa prvih 100 vrednosti cena indeksa. Za oba modela smo generisali samo po 20 slučajnih staza radi bolje preglednosti. GARCH(1,1) model zadržava tendenciju da precenjuje cene. Generisane staze su takve da su pretežno raspodeljene iznad stvarnih vrednosti cena.

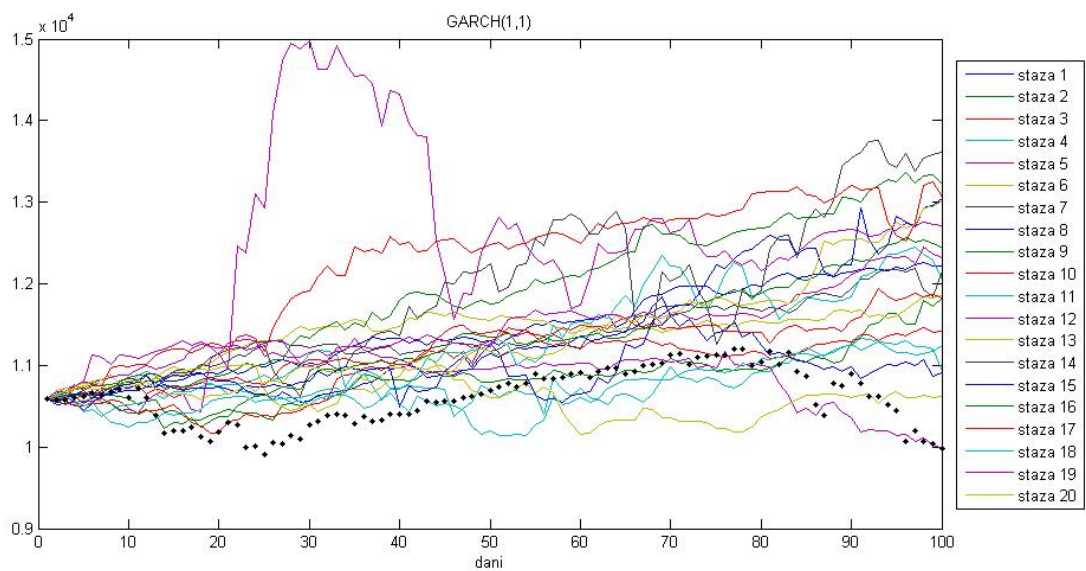
### FTSE 350

Vršimo potpuno analogan postupak sa indeksom FTSE 350, kako bismo se uverili u efikasnost generatora. Optimalna ocena matrice verovatnoća prelaza za FTSE 350 indeks je:

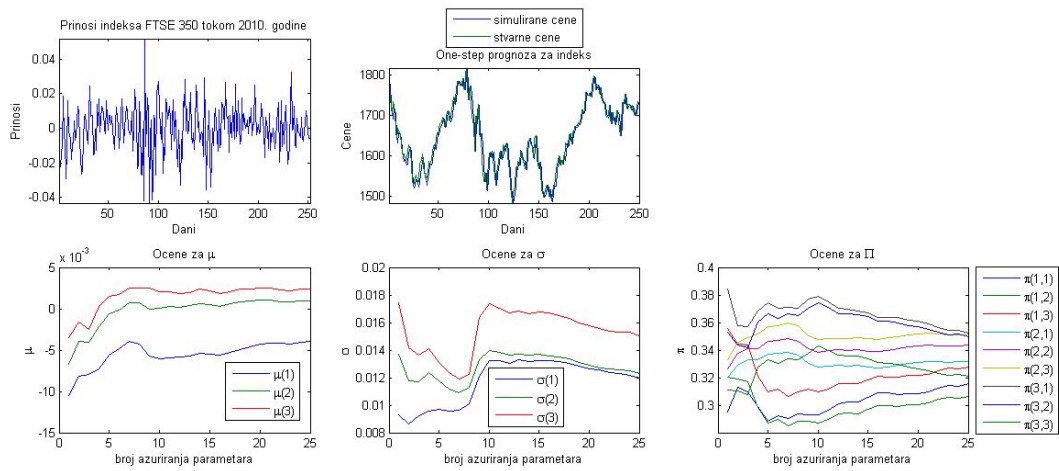
$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 0.3155 & 0.3066 & 0.3276 \\ 0.3320 & 0.3434 & 0.3514 \\ 0.3525 & 0.3500 & 0.3210 \end{bmatrix}$$



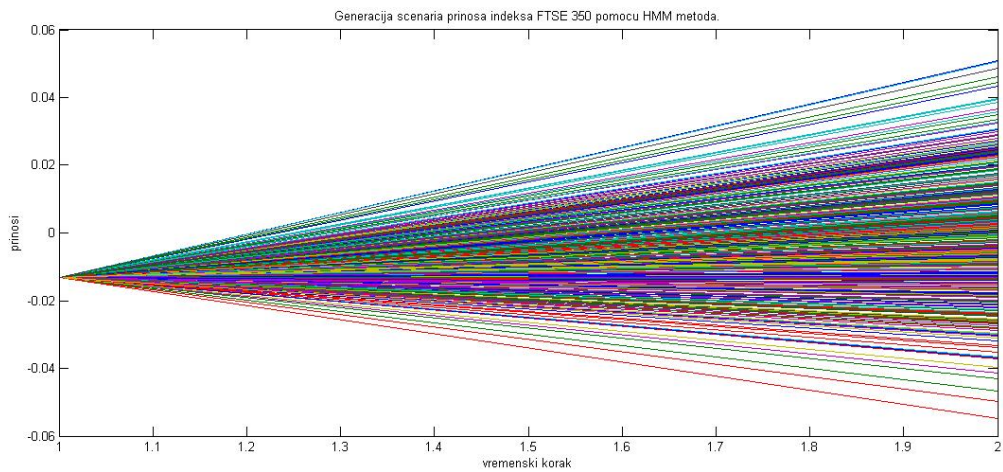
Slika 5.9: Simulirane cene indeksa DJI pomoću modela skrivenih lanaca, sa 20 staza tokom 100 dana.



Slika 5.10: Simulirane cene indeksa pomoću GARCH(1,1) modela, sa 20 staza tokom 100 dana.

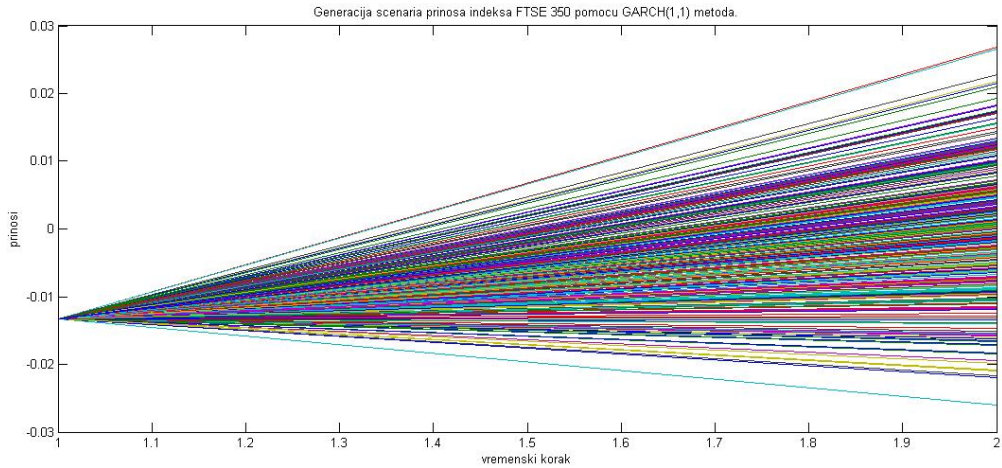


Slika 5.11: Ocena parametara za indeks FTSE 350.



Slika 5.12: Simulacija prinosa indeksa FTSE 350 za naredni vremenski trenutak pomoću skrivenog modela Markova.





Slika 5.13: Simulacija prinosa indeksa FTSE 350 za naredni vremenski trenutak pomoću GARCH(1,1) modela.

Optimalna ocena vektora drifta je

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} -0.0039 \\ 0.0009 \\ 0.0023 \end{bmatrix},$$

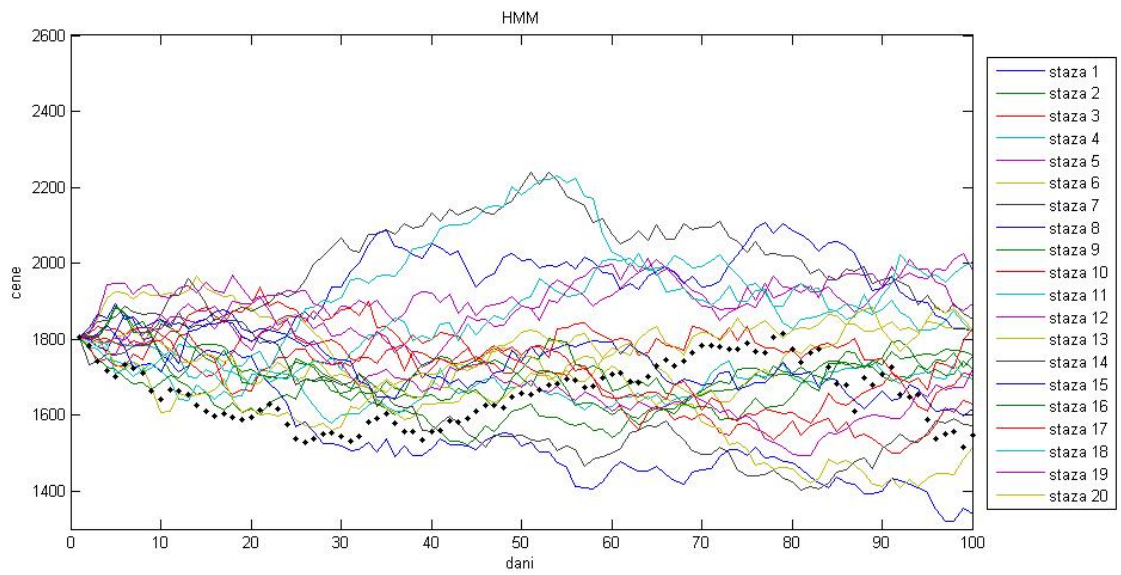
a vektora volatilnosti

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0.0120 \\ 0.0123 \\ 0.0151 \end{bmatrix}.$$

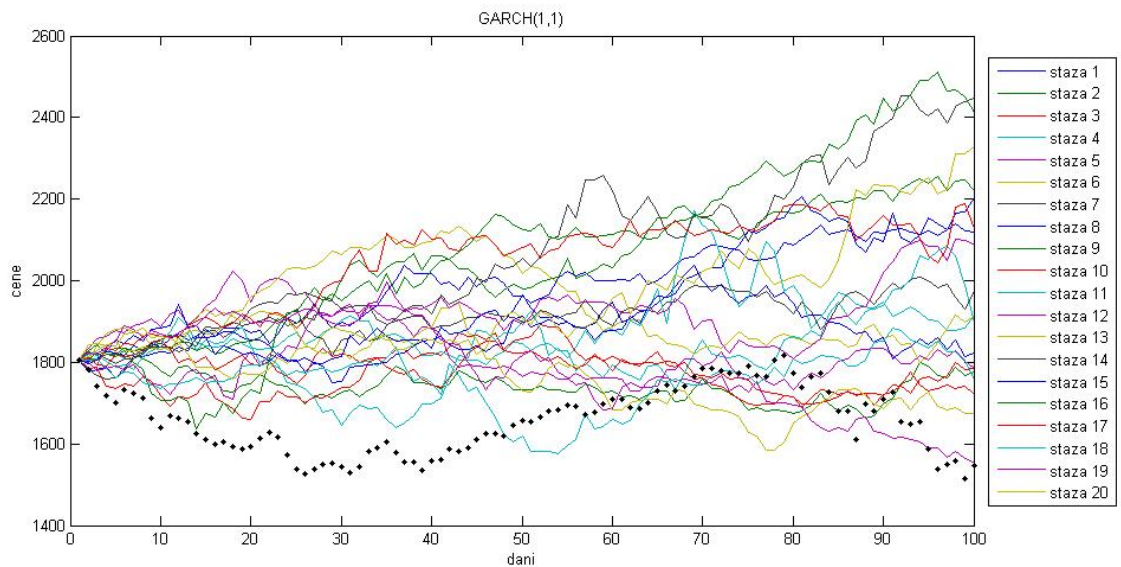
Na slici 5.11 predstavljeno je kretanje prinosa indeksa tokom posmatranog perioda, kretanje cene indeksa zajedno sa simuliranim cenama kao i dobijanje optimalnih ocena. Na slikama 5.12 i 5.13 prikazana je generacija scenarija sa 400 staza za naredni vremenski korak, a na 5.14 i 5.15 poređenje dobijenih scenarija za prvih 100 dana sa stvarnim istorijskim podacima za isti period (respektivno pomoću modela skrivenih lanaca i pomoću GARCH(1,1) za oba slučaja).

Ono što možemo da uočimo na datim slikama je da, generisanjem pomoć skrivenih lanaca Markova ekstremna kretanja cena nisu zastupljena, kao što je slučaj kod geometrijskog Braunovog kretanja. Generator postavlja staze oko stvarnih podataka (sa nekim ekstremnim predviđanjima), za razliku od GARCH(1,1) generiše visoke vrednosti cena koje nadmašuju stvarne podatke.

Dakle, za sve tri vremenske serije dobilazimo do gotovo istih zaključaka. Predloženi model, u poređenju sa GARCH(1,1) modelom, prevenstveno zbog mogućnosti menjanja između tri stanja, nesumljivo daje bolje rezultate, ali da bi se utrdile sve prednosti



Slika 5.14: Simulirane cene indeksa FTSE 350 pomoću modela skrivenih lanaca Markova, sa 20 staza tokom 100 dana.



Slika 5.15: Simulirane cene indeksa FTSE 350 pomoću GARCH(1,1) modela, sa 20 staza tokom 100 dana.

modela neophodno je izvršiti dalja ispitivanja. Tu se, na prvom mestu, podrazumeva ispitivanje stabilnosti generatora kada su integrisani u probleme odluke. Stabilnost je neophodno ispitati, jer optimalna rešenja problema optimizacije modela odluke ne treba da zavise od određenog skupa scenarija, a znamo da svaki put kad se pokrene generator, dobijaju se različiti skupovi scenarija (jer generatori sadrže elemente slučajnosti).

## 6

# Zaključak

U ovom radu, predstavljena je jedan od predloženih alternativa tradicionalnim pristupima modeliranja finansijskih vremenskih serija za generaciju scenarija. Odnosno, predstavljen je pristup zasnovan na skrivenim modelima Markova.

Osnovna pretpostavka modela jeste da je proces opažanja zadržava osobinu geometrijskog Braunovog kretanja, ali sa oslabljenim hipotezama. Tačnije, parametri tog procesa (drift i volatilnost) mogu da menjaju stanja i stoga se ne mogu direktno opažati. Predloženi model se dakle ne razlikuje fundamentalno od ranijih metoda ali uspeva da objasni važne osobine vremenskih serija kao što su ekstremna kretanja i grupisanje volatilnosti. Takođe, model priznaje svoj nedostatak - da postoji jednodnevno kašnjenje u prostiranju informacija, ali je zavisnost od prethodnog dana trgovanja stohastička funkcija. U numeričkom eksperimentu, pokazano je da su rezultati implementacije više nego značajni, kao što je neosporna i bolja generacija od GARCH modela. Parametri modela su ocenjeni na osnovu tehnike rekursivnih filtera. Nakon ocene parametara, na osnovu istorijskih podataka, mogu se generisati staze senarija, što je i urađeno u ovom radu.

Buduća istraživanja za predloženi generator scenarija biće zasnovana na testiranju njegove stabilnosti u problemu portfolio optimizacije.

# Dodatak

Kao dodatak ovom radu navodimo kodove u programskom paketu Matlab.

Ocene parametara i grafici dobijeni su na sledeći način:

```
clear;
load S&P500
% load DJI
% load FTSE350
h=1;
C=[];
P=[];

% definišemo skup podataka koje želimo da modeliramo(sa C je označena cena serije)
C=S&P500;

% računamo prinose posmatrane serije
P=price2ret(C);

% odedujemo dužinu staze za algoritam
batch=10;

% računamo broj update-ovanja parametara u zavisnosti dužine procesa opažanja
brparamupdate=(floor((length(P)-2)/batch))

% definišemo broj stanja lanca Markova
state=3;

% određujemo početne vrednosti

% prvo računamo očekivanje i standardnu devijaciju procesa prinosa (posmatramo prvih 30 podataka)
meanP=mean(P(1:30))
stdP=std(P(1:30))

% početne vrednosti se biraju na osnovu očekivanja i standardne devijacije prvih 30 članova supa podataka
mu=[1.5*meanP; meanP];
```

```

sigma=[0.8*stdP; stdP];

% početne verovatnoće prelaza lanca Markova
A=[1/3 1/3 1/3; 1/3 1/3 1/3; 1/3 1/3 1/3];

% početno stanje lanca Markova
xi(:,1)=[0.998 0.001 0.001]';

% definišemo jediničnu matricu dimenzije stanja
E=eye(state);

% prva ocena stanja  $p = E[X_1|Y_1]$ 
x1=xi(:,1);
xhat(:,1)=x1./sum(x1);

% prva dijagonalna matrica za prve game
for i=1:state
    Y11(i)=(P(1)-mu(i))/(sigma(i));
    Z11(i)=(normpdf(Y11(i),0,1))/(sigma(i)*normpdf(P(1),0,1));
    D1(i)=Z11(i);
end

% dijagonalna matria koja se koristi za promenu prostora verovatnoća
DD1=diag(D1);

% xi
xi(:,2)=A*DD1*xi(:,1);

x2=xi(:,2);
xhat(:,2)=x2./sum(x2);

% početne game za rekurzivne formule
for i=1:state
    gammaj1(:,i)=[0;0;0]; % proces za broj skokova
    gammaj2(:,i)=[0;0;0];
    gammaj3(:,i)=[0;0;0];
    gammao(:,i)=[0;0;0]; % proces za vreme zadržavanja
    gammat(:,i)=[0;0;0]; % pomoćni procesi
    gammatq(:,i)=[0;0;0];
end

% normalizovani filteri
normfactor = sum(xi(:,2));
remainderSJ1(:,1)=(sum(gammaj1)./normfactor)';
remainderSJ2(:,1)=(sum(gammaj2)./normfactor)';

```

```

remainderSJ3(:,3)=(sum(gammaj2)./normfactor)';
remainderSO(:,1)=(sum(gammao)./normfactor)';
remainderST(:,1)=(sum(gammat)./normfactor)';
remainderSTQ(:,1)=(sum(gammatq)./normfactor)';

% podešavanje intervala za podatke koje razmatramo u prvom pokretanju
a=2;
e=batch+a;

for u=1:brparamupdate
    B=P(a:e); % staze od staze podataka
    n=length(B); % koliko podataka
    % računanje ocenjivača stanja
    for k=1:batch
        % skalirajući faktor
        hh=(xi(:,a+k-2));
        % računanje dijagonalne matrice
        for i=1:state
            % *hh(i)
            Y1(k,i)=(B(k)-mu(i))/(sigma(i));
            Z1(k,i)=(normpdf(Y1(k,i),0,1));
            D(k,i)=(Z1(k,i))/(sigma(i)*hh(i)*normpdf(B(k),0,1));
            NennerD(k,i)=(sigma(i)*normpdf(B(k),0,1));
        end
        % Monitoring funkcija za uočavanje outlier-a
        monitorY1(a+k-1,:)=Y1(k,:);
        monitorZ1(a+k-1,:)=Z1(k,:);
        monitorD1(a+k-1,:)=D(k,:);
        monitorNennerD(a+k-1,:)=NennerD(k,:);
        DD=diag(D(k,:)); % dijagonalna matrica=DD
        xi(:,a+k-1)=(A*diag(D(k,:))*xi(:,a+k-2))./hh; % xi
        % xhat (normalizovano)
        ff1=xi(:,a+k-1);
        xhat(:,a+k-1)=ff1./(sum(xi(:,a+k-1)));
    end
    % REKURZIVNI FILTERI
    % for k=1:batch
    for r=1:state
        % Gamma(J|rX)_k
        gammaj1(:,r)=(A*diag(D(k,:))*(gammaj1(:,r))+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*A(1,r)*E(:,1));
    end
end

```

```

% Gamma(J2rX)_k
gammaj2(:,r)=(A*diag(D(k,:))*(gammaj2(:,r))+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*A(2,r)*E(:,2));
% Gamma(J3rX)_k
gammaj3(:,r)=(A*diag(D(k,:))*(gammaj3(:,r))+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*A(3,r)*E(:,3));
% Gamma(OrX)_k
gammao(:,r)=(A*diag(D(k,:))*gammao(:,r)+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*A*E(:,r));
% Gamma(Tr(y)X)_k
gammat(:,r)=(A*diag(D(k,:))*gammat(:,r)+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*B(k)*A*E(:,r));
% Gamma(Tr(y^2)X)_k
gammatq(:,r)=(A*diag(D(k,:))*gammatq(:,r)+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*B(k)^2*A*E(:,r));
end

normfactor = sum(xi(:,a+k-1));
remainderSJ1(:,a+k-1)=(sum(gammaj1)./normfactor)';
remainderSJ2(:,a+k-1)=(sum(gammaj2)./normfactor)';
remainderSJ3(:,a+k-1)=(sum(gammaj3)./normfactor)';
remainderSO(:,a+k-1)=(sum(gammao)./normfactor)';
remainderST(:,a+k-1)=(sum(gammat)./normfactor)';
remainderSTQ(:,a+k-1)=(sum(gammatq)./normfactor)';
end

% PREDVIĐANJA VREMENSKE SERIJE
for k=1:batch
chi=xi(:,a+k-2);
phat=chi./sum(chi); % p_hat_k=E[X_k|Y_k]
d=(A*hat{h})*phat;
sum1=d(1)*exp(mu(1)+0.5*sigma(1)^2)+d(2)*exp(mu(2)+0.5*sigma(2)^2);
S(k+h)=C(a+k-2)*sum1;
end
F(:,u)=S(1+h:batch+h)';

% AŽURIRANJE PARAMETARA
% parametri se ažuriraju nakon što su ocenjeni filteri za trenutni batch
for i=1:state
AA(1,i)=remainderSJ1(i,a+batch-1)/remainderSO(i,a+batch-1);
AA(2,i)=remainderSJ2(i,a+batch-1)/remainderSO(i,a+batch-1);
AA(3,i)=remainderSJ3(i,a+batch-1)/remainderSO(i,a+batch-1);
end
A=AA;
for i=1:state

```



```

    mu(i)=remainderST(i,a+batch-1)/remainderSO(i,a+batch-1);
    end
    for i=1:state
        sigma(i)=sqrt((remainderSTQ(i,a+batch-1)-2*mu(i)*remainderST(i,a+batch-1)+mu(i)^2*remain
1))/remainderSO(i,a+batch-1));
    end

    M1(u,:)=mu(1);
    M2(u,:)=mu(2);
    M3(u,:)=mu(3);

    SI1(u,:)=sigma(1);
    SI2(u,:)=sigma(2);
    SI3(u,:)=sigma(3);

    PROB1(u,:)=A(1,1);
    PROB2(u,:)=A(1,2);
    PROB3(u,:)=A(1,3);
    PROB4(u,:)=A(2,1);
    PROB5(u,:)=A(2,2);
    PROB6(u,:)=A(2,3);
    PROB7(u,:)=A(3,1);
    PROB8(u,:)=A(3,2);
    PROB9(u,:)=A(3,3);

    a=a+batch;
    e=e+batch;
    end
forecast1(:,h)=F(:);
m=length(forecast1(:,h));
Px1=(1:m);
datap=C(2:m+1);

% predviđanja za procese
FReturn=price2ret(forecast1);
len=length(FReturn);
Px2=(1:len);
plot(Px2, FReturn, Px2, P(2:len+1))

% grafici predviđanja i ocena parametra
Xaxis=[1:1:brparamupdate]';
subplot(2,3,1)

```

```

plot(P)
title('Prinosi')
axis tight
subplot(2,3,2)
plot(Px1,forecast1(1:m,h), Px1, datap)
title('One-step prognoza za indekse')
axis tight
subplot(2,3,4)
plot(Xaxis,M1,Xaxis, M2)
title('Ocene drifta  $\mu$  ')
subplot(2,3,5)
plot(Xaxis, SI1, Xaxis, SI2)
title('Ocene volatilnosti  $\sigma$  ')
subplot(2,3,6)
plot(Xaxis, PROB1,Xaxis, PROB2,Xaxis, PROB3,Xaxis, PROB4)
title('Ocene matrice verovatnoća prelaza  $\Pi$  ')

```

Za generaciju scenarija pomoću HMM modela upotrebljen je sledeći kod:

```

% računaju se prinosti serije koju modeliramo (npr S&P _500)
prinosi=price2ret(S&P_500);
% unesu se optimalne vrednosti iz prethodnog koda
P=[0.3404 0.3380 0.3336; 0.3295 0.3292 0.3327;0.3300 0.3329 0.3337];
mu=1.0e-003 *[0.7106;0.6044;-0.2022];
sigma=[0.0078; 0.0093; 0.0160];
ksi=[81.689;80.362;82.374];
% skaliramo ocenjivač stanja
x=ksi./sum(ksi);
A=[];
for s=1:20
    x=x_0;
    Sscen(1)=S&P_500(1);
    for t=2:100
        wscen=randn(1,1);
        x=P*x;
        fscen=sum(f.*x);
        sigmascen=sum(sigma.*x);
        Sscen(t)=Sscen(t-1)*exp((fscen-0.5*sigmascen^2)+sigmascen.*wscen);
    end
end

```

```

    A=[A;Scen];
    end
    plot(A')
    hold on
    plot(S &P _500(1:100),'k.');
```

Za generaciju scenarija pomoću GARCH(1,1) modela upotrebljen je sledeći kod:

```

prinosi=price2ret(S&P_500);
spec=garchset('VarianceModel','GARCH','P',1,'Q',1);
spec=garchset(spec,'Distribution','t','Display','off');
[coeff,errors,LLf,eFit,sFit]=garchfit(spec,prinosi);
horizon=100;
nPaths=20;
[eSim,sSim,ySim]=garchsim(coeff,horizon,nPaths,[],[],eFit,sFit,prinosi);
cenaSim=ret2price(ySim,S &P _500(1));
plot(cenaSim);
hold on
plot(S&P_500(1:100),'k.');
```

# Literatura

- [1] Borodin A. N., Salminen P., *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae (Second Edition)*, Birkhauser Verlag, Basel-Berlin-Boston, 2002.
- [2] Engle R., *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of United Kingdom Inflation*, *Econometrica* 50, 1982.
- [3] Engle R. E., Focardi S. M., Fabozzi F. J., *ARCH/GARCH Models in Applied Financial Econometrics*, JWPR026-Fabozzi c114-NP, 2007.
- [4] Bollerslev T., *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity* *Journal of Econometrics*, 1986.
- [5] Hamilton J. D., *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series*, *Econometrica* 57, 1989.
- [6] Rabiner, L. R., *A tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*, *Proc. of IEEE* 77(2), 1989.
- [7] Zakai, M., *On the optimal filtering of diffusion processes*, *OZ. Wahrsch. Verw. Gebiete* 11, 1969.
- [8] Mitra L., Mitra G., Roman D., *Scenario generation for financial modeling: Desirable properties and a case study*, Carisma, 2009.
- [9] Erlwein C., Mitra G., Roman D., *HMM based scenario generation for an investment optimisation problem*, Springer Science+Business Media, 2011.
- [10] Roman D., Mitra G., Spagnolo N., *Hidden Markov models for financial optimisation problems*, *IMA Journal of Management Mathematics*, 21(2), 111-129, 2010.
- [11] Zhang Y., *Prediction of financial time series with Hidden Markov Models*, M.Sc Thesis, Simon Fraser University, China, 2004.
- [12] Baum, L. E., Perrie T., *Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains*, *Ann. Math. Stat.*, 1966.

- [13] Elliot R. J, Aggoun L., Moore J. B., *Hidden Markov models: estimation and control*, Springer, 1995.
- [14] Mamom R. S., Elliot R. J., *Hidden Markov Models in finance*, Springer, 2007.
- [15] Jalen L., *Some contributions to filtering theory with applications in financial modelling*, PhD Thesis, Brunel University, 2009.
- [16] Elliott R., Van der Hoek J., *An application of hidden Markov models to asset allocation problems*, Finance and Stochastics, vol. 1, 1997.
- [17] Messina E., Toscani D., *Hidden Markov models for scenario generation*, IMA Journal of Management Mathematics 19, 397-401, 2008.
- [18] Siu T. K., Yang H., Lau J.W., *Option Pricing When the Regime-Switching Risk is Priced*, 2007.
- [19] Lee J., Shin M., *Stock Forecasting using Hidden Markov Processes*, cs229 Project, 2009.
- [20] <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=GSPC+Historical+Prices>
- [21] <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=DJI+Historical+Prices>
- [22] <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=TLC+Historical+Prices>

# Kratka biografija

Milena Kresoja je rođena 9. maja 1988. godine u Kikindi. Završila je Osnovnu školu *Petar Kočić* u Nakovu, kao nosilac *Vukove diplome*, a potom prirodno-matematički smer gimnazije *Dušan Vasiljev* u Kikindi, takođe kao nosilac *Vukove diplome*. 2006. godine upisuje studije matematike finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Osnovne studije završava u junu 2010. godine sa prosečnom ocenom 9.81. Iste godine upisuje master studije primenjene matematike, modul matematika finansija, na istom fakultetu. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine, polaže sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 10.00.



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

**RBR**

Identifikacioni broj:

**IBR**

Tip dokumentacije:

**TD**

monografska dokumentacija

Tip zapisa:

**TZ**

tekstualni štampani materijal

Vrsta rada:

**VR**

master rad

Autor:

**AU**

Milena Kresoja

Mentor:

**ME**

dr Nataša Krejić

Naslov rada:

**NR**

Generacija scenarija pomoću skrivenih modela  
Markova

Jezik publikacije:

**JP**

srpski (latinica)

Jezik izvoda:

**JI**

s/en

Zemlja publikovanja:

**ZP**

Republika Srbija

Uže geografsko područje:

**UGP**

Vojvodina

Godina:

**GO**

2011

Izdavač: autorski reprint  
**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4  
**MA**

Fizički opis rada: (6/84/22/3/2/15/3)  
**FOR** (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/  
grafika/priloga)

Naučna oblast: matematika  
**NO**

Naučna disciplina: primenjena matematika  
**ND**

Predmetne odrednice, ključne reči (**PO, UDK**): generacija scenarija, geometrijsko Braunovo kre-  
tanje, skriveni modeli Markova  
Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i  
**ČS** informatiku

Važna napomena:  
**VN**

Izvod (**IZ**): Skriveni modeli Markova su postali osnovni alat za  
modeliranje stohastičkih sistema sa širokim ran-  
gom primena u ekonometriji i modeliranju finansi-  
jskih vremenskih serija, gde je primena u modeli-  
ranju stohastičke volatilnosti jedna od najvažnijih.  
U ovom radu, problemu modeliranja finansijskih  
vremenskih serija upravo pristupamo koristeći skr-  
vene modele Markova sa geometrijskim Braunovim  
kretanjem u svakom stanju. Cilj naše analize vre-  
menskih serija je generacija scenarija koja se može  
primeniti u modelu odluke. Pored teorijskog dela,  
predstavljani su numerički rezultati.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 31.05.2011.  
**DP**

Datum odbrane: \*\* 2011  
**DO**



Članovi komisije:  
**KO**

Predsednik: dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Dora Seleši, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number:

**SNO**

Identification number:

**INO**

Document type:

monograph type

**DT**

Type of record:

printed text

**TR**

Contents code:

master's thesis

**CC**

Author:

Milena Kresoja

**AU**

Mentor:

dr Nataša Krejić

**ME**

Title:

HMM based scenario generation

**TI**

Language of text:

Serbian (Latin)

**LT**

Language of abstract:

s/en

**LA**

Country of publication:

Republic of Serbia

**CP**

Locality of publication:

Vojvodina

**LP**

Publication year:

2011

**PY**

Publisher:

author's reprint

**PU**

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

**PP**

Physical description: (6/84/22/3/2/15/3)

**PD** (chapters/pages/literature/tables/pictures/  
graphs/add.lists)

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Applied Mathematics

**SD**

Subject, key words (**SKW**): scenario generation, geometrical Brownian  
motion, hidden Markov model

Holding data: In library of Department of Mathematics and  
**HD** Informatics

Note:

**N**

Abstract (**AB**): Hidden Markov Models have become a basic tool for modeling stochastic systems with wide range of applications in econometrics and financial time series modelling, stochastic volatility being one important application. In this paper, the problem of modeling financial time series has been approached using hidden Markov models with geometrical Brownian motion in each state. The goal of our time series analysis model is the generation of scenarios that can be included in decision models. Numerical results are presented.

Accepted on Scientific board 31.05.2011.

on:

**AS**

Defended: \*\*2011

**DE**

Thesis Defend board:  
**DB**

President: dr Zorana Lužanin, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: dr Dora Seleši, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: dr Nataša Krejić, full professor , Faculty of Sciences, University of Novi Sad