УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

Светлана Миловановић

СТАБИЛНОСТ МАТРИЦЕ КОВАРИЈАНСЕ И ПРОБЛЕМ ОПТИМИЗАЦИЈЕ ПОРТФОЛИЈА

- мастер рад -

Ментор: проф. др Наташа Крејић

Нови Сад, 2011.

Садржај

1 Увод

1.1 Мотивација

Данас се инвеститори суочавају са широком понудом хартија од вредности, при чему свака има свој потенцијални ризик и добит. Оптимизација портфолија игра критичну улогу у одређивању стратегије за конструкцију портфолија. Међутим, не постоји ниједан оптимизовани портфолио који може да задовољи све инвеститоре. У коју комбинацију хартија од вредности ће изабрати да инвестирају зависи пре свега од њихових преференција у погледу добити и склоности према ризику.

Хари Марковиц (Harry Markowitz) био је пионир модерне ере теорије портфолија. У свом раду "*Portfolio Selection*" објављеном 1952. године у часопису *Journal of Finance*, полазећи од претпоставке да већина инвеститора тежи да максимизира добит портфолија и минимизира његов ризик, формулисао је концепт очекивани принос-варијанса, где је добит моделирана очекиваним приносом портфолија, а ризик његовом варијансом. Привлачан и разуман са теоријске тачке гледишта, његов модел је био основа за бројна будућа истраживања, примене, проширења и побољшања. Слободно можемо рећи да у послератној економији није било доприноса теорији портфолија који би у том смислу, и у погледу оригиналности, могао да се упореди са Марковицовим радом. Његов приступ и данас је најједноставнији и најопштији проблем селекције портфолија. Захваљујући свом раду, Марковиц је 1990. године добио Нобелову награду из економије.

Марковицов модел је проблем квадратног програмирања и уједно једна од најважнијих примена ове области нумеричке оптимизације. Иако је аналитички једноставан, неколико проблема јављају се у примени модела у пракси. Није ни најмање тривијалан задатак превести Марковицов концепт у практични алгоритам који ће дати задовољавајуће резултате. Штавише, DeMiguel, Garlappi и Uppal у свом раду из 2007. године (Brodie et al. [3]) пратили су неколико алгоритама инспирисаних Марковицивим проблемом оптималног портфолија и показали су да ниједан од њих нема значајно боље перформансе од наивне стратегије у којој је сваком добру у саставу портфолија додељен једнак тежински коефицијент. Овако разочаравајуће перформансе алгоритама последица су структуре оригиналног Марковицовог модела. Оптимизација у сржи модела је емпиријски нестабилна – мале пертурбације у претпостављеним приносима, варијансама и коваријансама добара у портфолију могу да дају снажне ефекте на резултате оптимизационог поступка. У том смислу, класичан Марковицов модел може се посматрати као лоше постављен (лоше условљен) проблем. С тим у вези, оцена параметара проблема, вектора очекиваних приноса и матрица коваријансе приноса током инвестиционог периода је компликован задатак. И сам Марковиц у свом раду [17] истицао је да само историјски подаци нису довољни да би се у потпуности сагледало и успешно предвидело кретање вредности добара. Лоше оцењени параметри могу драстично да промене тежинске коефицијенте траженог оптималног портфолија, што нас може довести до честог и погрешног ребалансирања портфолија, изазивајући тако и непотребне трошкове трансакција.

У наставку првог поглавља овог рада дат је преглед основних ознака, дефиниција и теорема. Друго поглавље бави се формулацијом и аналитичким решењима Марковицовог модела очекивани принос – варијанса за одређивање оптималног инвестиционог портфолија. Дат је и осврт на теоријске предности и практичне недостатке модела, посебно осетљивост модела на пертурбације очекиваних приноса. У трећем поглављу посматран је оптимизациони проблем апроксимације узорачке матрице корелације матрицом која је симетрична, позитивно семидефинитна и има јединичну дијагоналу и изведен је оптимизациони алгоритам. Поглавље 4 даје преглед нумеричких резултата. Уз помоћ Марковицовог модела оптимизован је портфолио састављен од 6 европских индекса. Затим су у модел уведене пертурбације очекиваног приноса и посматран је њихов ефекат на резултујуће тежинске коефицијенте портфолија. На матрицу корелације пертурбованог модела примењен је алгоритам из трећег поглавља имплементиран у програмском окружењу MATLAB, а затим је анализиран његов утицај на ефекте пертурбација и изведени закључци су презентовани у петом поглављу.

1.2 Листа ознака

$\mathbb{R}$	Скуп реалних бројева
$E[X]$	Математичко очекивање случајне променљиве X
$D[X]$	Дисперзија (варијанса) случајне променљиве X
σ_X	Стандардна девијација (одступање) случајне променљиве X
$\sigma_{XY} = \mathrm{cov}(X,Y)$	Коваријанса случајних променљивих X и Y
Σ	Матрица коваријансе n-димензионалне случајне променљиве
$w = [w_1, w_2, ..., w_n]^T$	Вектор портфолија
$r = [r_1, r_2, ..., r_n]^T$	Случајна променљива приноса портфолија
$\overline{r} = [\overline{r}_1, \overline{r}_2, ..., \overline{r}_n]^T$	Вектор очекиваних приноса портфолија
ρ	Фиксирани очекивани принос
$e = [1,1,...,1]^T$	Јединични вектор
$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n]^T$	Вектор пертурбације
$A > 0$	Позитивно дефинитна матрица A
$A \geq 0$	Позитивно семидефинитна матрица A
A^T	Транспонована матрица матрице A
$trace(A)$	Траг матрице A
$\|A\|_1$	Норма 1 матрице A
$\|A\|_2$	Норма 2 (еуклидска норма) матрице A
$\|A\|_\infty$	Норма ∞ матрице A
$\|A\|_F$	Фробенијусова норма матрице A
$\|A\|_W$	Тежинска Фробенијусова W-норма матрице A
$\|A\|_H$	Тежинска Фробенијусова H-норма матрице A
$diag(w_i)$	Дијагонална матрица са елементима $w_1, w_2, ..., w_n$ на главној дијагонали

$A \circ B$	Адамаров производ матрица A и B
$\partial K(B)$	Нормални конус конвексног скупа K у тачки $B \in K$
$\langle A, B \rangle = trace(A^T WBW)$	Унутрашњи производ матрица A и B који индукује W -норму
$A = Q \Lambda Q^T$	Спектрална декомпозиција матрице A
$null(A)$	Нула-простор матрице A
S	Скуп симетричних, позитивно семидефинитних матрица
U	Скуп симетричних матрица са јединичном дијагоналом
$P_S(A)$	Пројекција матрице A на скуп S
$P_U(A)$	Пројекција матрице A на скуп U
$\kappa(A)$	Условни број матрице A
$rank(A)$	Ранг матрице A
E	Јединична матрица

1.3 Преглед дефиниција и теорема

1.3.1 Линеарна алгебра

Предмет нашег интересовања у овом раду биће вектори и матрице чије компоненте су реални бројеви. Простор реалних вектора димензије n означава се са $\mathbb{R}^n$, а простор реалних матрица димензије $m \times n$ означавамо са $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Дефиниција 1.1 *Матрица* типа $m \times n$ над пољем P је правоугаона таблица елемената из P која има m врста и n колона:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Елементе $a_{ij} \in P$, где је $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, називамо *елементима* матрице.

Дефиниција 1.2 Матрица код које је број врста једнак броју колона, тј. матрица типа $n \times n$, назива се *квадратна* матрица реда n.

Дефиниција 1.3 Квадратну матрицу реда n чији су сви елементи на главној дијагонали јединице, а остали нуле, називамо *јединична матрица* реда n. Јединичну матрицу означавамо са E.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 1.4 Квадратна матрица A је *регуларна* ако постоји квадратна матрица B таква да је

$$AB = BA = E. \tag{1.1}$$

Матрицу B која задовољава услов (1.1) зовемо *инверзна матрица* за матрицу A и означавамо је са A^{-1}.

Квадратна матрица за коју не постоји инверзна матрица називамо *сингуларна* матрица.

Дефиниција 1.5 Димензија простора колона матрице A назива се *ранг по колонама* матрице A. Димензија простора врста матрице A назива се *ранг по врстама* матрице A.

Теорема 1.6 Ранг по колонама произвољне матрице A једнак је рангу по врстама те матрице.

Теорема 1.7 Ранг матрице једнак је максималном броју линеарно независних вектора колона (или врста) те матрице.

Дефиниција 1.8 Ранг по колонама, тј. ранг по врстама матрице A, називамо *ранг* матрице A и означавамо га са $rank(A)$.

Дефиниција 1.9 Ако је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

матрица типа $m \times n$, онда се матрица

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

типа $n \times m$ чије су врсте једнаке колонама матрице A назива *транспонована матрица* матрице A и означава се са A^T.

Теорема 1.10 Ако су A и B матрице такве да су све наведене операције дефинисане, онда важи:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$,

2. $(A^T)^T = A$,

3. $(aA)^T = aA^T$,

4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Дефиниција 1.11 Збир елемената са главне дијагонале квадратне матрице A назива се *траг матрице* A и означава се са $trace(A)$:

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,.$$

Дефиниција 1.12 Матрица A је *симетрична* ако је $A^T = A$.

Дефиниција 1.13 Матрица A је *ортогонална* ако је $A^T A = AA^T = E$.

Дефиниција 1.14 Квадратна матрица A реда n је *позитивно дефинитна*, у ознаци $A > 0$, ако важи

$$x^T Ax > 0 \text{, за све } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \,.$$

Матрица A је *позитивно семидефинитна*, у ознаци $A \geq 0$, ако важи

$$x^T Ax \geq 0 \text{ за све } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \,.$$

Дефиниција 1.15 Матрица D чији су елементи на главној дијагонали редом једнаки $d_1, d_2, ..., d_n$, а остали елементи нуле, назива се *дијагонална* матрица и означавамо је са $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$.

Дефиниција 1.16 *Детерминанта* матрице A дефинише се као

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} .$$

Дефиниција 1.17 Нека је $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ако постоје $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ такви да важи

$$Aq = \lambda q \,,$$

онда је q *карактеристични вектор*, а λ *карактеристична вредност (карактеристични корен)* матрице A.

Дефиниција 1.18 Скуп сви карактеристичних вредности матрице A назива се *спектар* матрице A и означава се са $\sigma(A)$.

Нека је $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ њене карактеристичне вредности и $q_1, q_2, .,., q_n$ њени карактеристични вектори. Тада матрица A може да се запише у облику

$$A = Q \Lambda Q^T \,,$$

који се назива *спектрална декомпозиција* матрице A, где је $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ и $Q = \left[q_1 \,|\, q_2 \,|\, ... \,|\, q_n \right]$. Матрица Q је ортогонална, тј. $Q^T Q = QQ^T = E$.

Дефиниција 1.19 *Скаларни (унутрашњи) производ* вектора $x, y \in \mathbb{R}^n$ дефинише се као

$$(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Вектори $x, y \in \mathbb{R}^n$ су *ортогонални* ако им је скаларни производ једнак нули, тј.

$$(x, y) = 0 .$$

Ако су два јединична вектора ортогонална, кажемо да су *ортонормални*.

Сада ћемо навести дефиниције најчешће употребљаваних векторских норми.

Нека је $x \in \mathbb{R}^n$. Тада су:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{(норма 1)}$$

$$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} = (x^T x)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(норма 2)} \tag{1.2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,...,n} |x_i| \qquad \text{(норма } \infty\text{)}$$

Нека је сада са $\|.\|$ означена било која векторска норма из (1.2). Одговарајућа матрична норма произвољне матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ дефинише се на следећи начин:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

За матричне норме дефинисане на овај начин кажемо да су *конзистентне* са одговарајућим векторским нормама из (1.2).

Експлицитне формуле ових матричних норми су следеће:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,...,n} \sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|$$

$\|A\|_2 = \lambda_1(A^T A)^{\frac{1}{2}}$, где је λ_1 означава највећу карактеристичну вредност матрице A

$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

Још једна корисна матрична норма, која није конзистентна ни са једном векторском нормом је Фробенијусова норма:

$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Норму 2 називамо још и Еуклидска и обично је означавамо са $\|\cdot\|$.

Дефиниција 1.20 Условни број матрице A (у односу на норму $\|\cdot\|$), у означи $\kappa(A)$, дефинише се на следећи начин:

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Ако је $\kappa(A)$ мали, за матрицу A кажемо да је *добро условљена*, а ако је $\kappa(A)$ велики, онда је A *лоше условљена*. Ако је матрица A сингуларна, онда обично пишемо $\kappa(A) = \infty$.

Приметимо да ако је $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, онда је $\|A\| = \lambda_1$, а $\|A^{-1}\| = \dfrac{1}{\lambda_n}$, где је λ_1 највећа, а λ_n најмања карактеристична вредност матрице A. Сада имамо

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n},$$

у норми 2 и ово је формула која се обично користи за израчунавање условног броја матрице у норми 2.

Дефиниција 1.21 *Нула простор* матрице A је потпростор

$$Null(A) = \{w \mid Aw = 0\}.$$

1.3.2 Теорија вероватноће

Нека је Ω скуп елементарних догађаја.

Дефиниција 1.22 Колекција подскупова $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ назива се σ*-алгебра* над Ω ако задовољава следеће услове:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $\Omega \in \mathcal{F}$,
3. Ако је $A \in \mathcal{F}$, онда је $\overline{A} \in \mathcal{F}$,
4. Нека је $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$. Тада важи $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Са $\overline{A}$ означили смо комплемент скупа A:

$$\overline{A} = \{ w \in \Omega \mid w \notin A \}.$$

Дефиниција 1.23 Функција $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ се назива *вероватноћа* на $(\Omega, \mathcal{F})$ ако важи:

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$,
2. $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$,
3. Ако су $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ по паровима дисјунктни, тј. $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $i \neq j$, онда је $\mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i)$.

Тројку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ називамо *простор вероватноће*.

Дефиниција 1.24 Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ простор вероватноће. Нека је $X : \Omega \to \mathbb{R}$ такво да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\{ \omega \mid \omega \in \Omega,\ X(\omega) < x \} \in \mathcal{F}.$$

Тада је X *случајна промењива* над простором вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Дефиниција 1.25 Пресликавање $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ је *функција расподеле* случајне промењиве X ако важи

$$F_X(x) = P(\{\omega \mid \omega \in \Omega,\ X(\omega) < x\}),\ \text{за све}\ x \in \mathbb{R}.$$

Разликујемо два важна типа случајних променљивих.

Случајна променљива $X : \Omega \to \mathbb{R}$ је *дискретна* ако постоји коначан или пребројив скуп $\mathcal{R}_X \subset \mathbb{R}$ такав да је

$$P(\{X \in \mathcal{R}_X\}) = 1.$$

Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је *Борелова функција* ако важи $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}$ за свако $S \in \mathcal{B}$, где је $\mathcal{B}$ Борелова σ - алгебра.

Случајна променљива је *апсолутно непрекидног типа* ако постоји Борелова ненегативна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да је

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,d\lambda(t),\ x \in \mathbb{R},$$

где је $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,d\lambda(t)$ Лебегов интеграл функције f у одноду на Лебегову меру λ. Функција f се назива *густина расподеле* случајне променљиве X.

Дефиниција 1.26 Нека је X дискретна случајна променљива

$$X : \begin{pmatrix} x_2 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Ако је $\sum_i |x_i| p_i < \infty$, онда је

$$E[X] = \sum_i x_i p_i$$

математичко очекивање случајне променљиве X.

Нека је X случајна променљива апсолутно непрекидног типа са густином расподеле $f(x)$ таква да је

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\,dx < \infty.$$

Тада је

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$$

математичко очекивање случајне променљиве X .

Особине математичког очекивања

1. Ако је $X\geq 0$, онда је $E[X]\geq 0$.
2. $E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$, за $a,b\in\mathbb{R}$.
3. Ако је $X\geq Y$, онда је $E[X]\geq E[Y]$.
4. $\left|E[X]\right|\leq E\left[\left|X\right|\right]$.
5. Ако су X и Y независне случајне променљиве, онда је $E[XY]=E[X]\cdot E[Y]$.
6. (*Коши-Шварцова неједнакост*) $\left(E\left[\left|XY\right|\right]\right)^2\leq E[X^2]\cdot E[Y^2]$.

Дефиниција 1.27 *Дисперзија (варијанса)* D случајне променљиве X дефинише се са

$$D[X]=E\left[(X-E[X])^2\right].$$

У израчунавањима обично се користи следећа једноставна формула за дисперзију:

$$D[X]=E\left[(X-E[X])^2\right]=E[X^2]-2E[X]E[X]+E[X]^2=E[X^2]-E[X]^2$$

Особине дисперзије

1. $D[X]\geq 0$.
2. $D[X]=0\Leftrightarrow X$ је константа.
3. $D[cX]=c^2D[X]$, за $c\in\mathbb{R}$.
4. $D[X+c]=D[X]$, за $c\in\mathbb{R}$.
5. Ако су случајне променљиве X и Y независне и имају дисперзије, онда је

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y].$$

Дефиниција 1.28 *Стандардно одступање (стандардна девијација)* случајне промењиве X, у ознаци σ_X, дефинише се на следећи начин:

$$\sigma_X = \sqrt{D[X]}.$$

Дефиниција 1.29 *Коваријанса* случајних промењивих X и Y, у ознаци σ_{XY}, дефинише се на следећи начин:

$$\sigma_{XY} = \mathrm{cov}(X,Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right].$$

Алтернативна формула која се користи у израчунавањима је

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Ако је $\sigma_{XY} = 0$, кажемо да су случајне промењиве X и Y *некорелиране*. За $\sigma_{XY} > 0$, кажемо да су X и Y *позитивно корелиране*, а за $\sigma_{XY} < 0$, X и Y су *негативно корелиране*.

Важи:

$$\sigma_{XX} = \sigma_X^2.$$

Дефиниција 1.30 Нека је $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ $n-$димензионална случајна промењива. *Матрица коваријансе*, у ознаци Σ, је квадратна матрица дефинисана на следећи начин:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{cov}(X_1, X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & \mathrm{cov}(X_2, X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_n, X_1) & \mathrm{cov}(X_n, X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

или

$$\Sigma = E\left[(X - E[X])(X - E[X])^T\right].$$

Дефиниција 1.31 *Коефицијент корелације* случајних промењивих X и Y, у ознаци ρ_{XY}, дефинише се формулом

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

За коефицијент корелације било које две случајне промењиве важи

$$\left|\rho_{XY}\right| \leq 1.$$

Ако су X и Y независне случајне променљиве, онда важи:

$$\rho_{XY} = 0.$$

Дефиниција 1.32 Нека је $D[X_i] > 0$, $i = 1,...,n$. *Матрица корелације* n-димензионалне случајне променљиве $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ је квадратна матрица облика

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X_1X_2} & \cdots & \rho_{X_1X_n} \\ \rho_{X_2X_1} & 1 & \cdots & \rho_{X_2X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_nX_1} & \rho_{X_nX_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

где је $\rho_{X_iX_j}$ коефицијент корелације компонената X_i и X_j, $i \neq j$.

Важи следећа релација:

$$\Sigma = \sigma_{X_1}^2 \cdot \sigma_{X_2}^2 \cdot ... \cdot \sigma_{X_n}^2 \cdot R.$$

1.3.3 Теорија оптимизације

Оптимизација представља минимизирање или максимизирање функције у зависности од ограничења над њеним променљивим. Без губитка општости, посматраћемо само проблеме минимизације функције. Нека је x реални вектор променљивих, f *функција циља*, тј. функција коју желимо да минимизирамо и нека је c вектор ограничења које променљиве морају да задовољавају. Тада оптимизациони проблем може да се запише у облику:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{тако да важи} \quad \begin{cases} c_i(x) = 0, \ i \in E \\ c_i(x) \geq 0, \ i \in I \end{cases}, \tag{1.3}$$

где су f, и c_i реалне глатке функције променљиве x, а E и I коначни индексни скупови. Функције c_i, $i \in E$, зовемо *ограничења типа једнакости*, а функције c_i, $i \in I$ *ограничења типа неједнакости*.

Скуп Ω тачака које задовољавају сва ограничења назива се *допустиви скуп*.

$$\Omega = \{x \mid c_i(x) = 0,\ i \in E;\ \mathrm{c}_i(x) \geq 0,\ i \in I\}.$$

Проблем (1.3) сада можемо писати у облику:

$$\min_{x \in \Omega} f(x). \tag{1.4}$$

Тачку $x^* \in \Omega$ зовемо *глобални минимизатор* проблема (1.3) ако важи

$$f(x^*) \leq f(x),\ \text{за све}\ x \in \Omega.$$

Тачка $x^* \in \Omega$ је *локални минимизатор* проблема (1.3) ако постоји околина O тачке x^* таква да важи

$$f(x^*) \leq f(x),\ \text{за све}\ x \in O \cap \Omega.$$

Тачку x^* која задовољава претходни услов некада зовемо и *слаби локални минимизатор*.

$x^* \in \Omega$ је *строги локални минимизатор* проблема (1.3) ако постоји околина O тачке x^* таква да важи:

$$f(x^*) < f(x),\ \text{за све}\ x \in (O \cap \Omega) \setminus \{x^*\}.$$

Дефинишемо Лагранжову функцију проблема (1.3):

$$L(x;\lambda) = f(x) - \sum_{i \in E \cup I} \lambda_i c_i(x).$$

Нека је x^* тачка која задовољава ограничења

$$\begin{cases} c_i(x) = 0,\ i \in E \\ c_i(x) \geq 0,\ i \in I \end{cases} \tag{1.5}$$

и нека је $J \subseteq I$ скуп индекса j за које важи $c_j(x^*) = 0$. Тада кажемо да је x^* *регуларна тачка* за ограничења (1.5) ако су градијенти $\nabla c_i(x^*)$, $\nabla c_j(x^*)$, $i \in E$, $j \in J$ линеарно независни.

За ограничење c_i, такво да важи $c_i(x^*) = 0$, кажемо да је *активно* у тачки x^*. Сва ограничења типа једнакости су увек активна у свакој допустивој тачки. Са $A(x^*)$ означавамо *скуп свих активних ограничења* за тачку x^*:

$$A(x^*) = E \cup \left\{ j \in I \mid c_j(x^*) = 0 \right\}.$$

Дефинишемо следеће скупове:

$$F_1 = \left\{ \alpha p \mid \alpha > 0,\ p^T \nabla c_i(x^*) = 0,\ \text{за све } i \in E,\ p^T \nabla c_i(x^*) = 0,\ \text{за све } i \in J = A(x^*) \cap I \right\},$$

$$F_2(\lambda^*) = \left\{ v \in F_1 \mid \nabla c_i(x^*)^T v = 0,\ i \in J,\ \lambda_i^* > 0 \right\}.$$

Потребни услови првог реда. Нека је x^* локални минимизатор оптимизационог проблема (1.3) и регуларна тачка ограничења. Тада постоји вектор Лагранжових множитеља λ^*, чије су компоненте λ_i^*, $i \in E \cup I$, такав да важе следећи услови:

$$\nabla_x L(x^*; \lambda^*) = 0,$$

$$c_i(x^*) = 0,\ i \in E,$$

$$c_i(x^*) = 0,\ i \in I$$

$$\lambda_i^* \geq 0,\ i \in I,$$

$$\lambda_i^* c_i(x^*) \geq 0,\ i \in E \cup I.$$

Ови услови називају се *ККТ услови* (Karush-Kuhn-Tucker).

Потребни услови другог реда. Нека је x^* локални минимизатор оптимизационог проблема (1.3) и регуларна тачка ограничења. Нека је λ^* вектор Лагранжових множитеља који задовољава ККТ услове. Тада важи

$$z^T \nabla_x L(x^*; \lambda^*) z \geq 0,\ \text{за } z \in F_2(\lambda^*).$$

Довољни услови другог реда. Нека је $x^* \in \mathbb{R}^n$ допустива тачка за коју постоји вектор Лагранжових множитеља λ^*, такав да су ККТ услови задовољени. Ако је

$$z^T \nabla_x L(x^*; \lambda^*) z > 0,\ \text{за } z \in F_2(\lambda^*) \setminus \left\{ 0 \right\},$$

онда је x^* строги локални минимизатор проблема (1.3).

Некада је практичније посматрати допустиви скуп са геометријске тачке гледишта, уместо да га дефинишемо помоћу алгебарских једначина.

За оптимизациони проблем (1.4) , где је Ω затворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, теорија се углавном заснива на тангентним и нормалним конусима скупа Ω у различитим допустивим тачкама $x \in \Omega$.

Дефиниција 1.33 Вектор $w \in \mathbb{R}^n$ је *тангента* на скуп Ω у тачки $x \in \Omega$ ако за све низове $\{x_i\}$ за које важи $x_i \to x$ и $x_i \in \Omega$, и за све позитивне низове скалара $t_i \downarrow 0$, постоји низ $w_i \to w$, такав да је $x_i + t_i w_i \in \Omega$ за све i.

Тангентни конус $T_\Omega(x)$ је колекција свих тангентних вектора на Ω у тачки $x \in \Omega$.

Нормални конус $N_\Omega(x)$ је ортогонални комплемент тангентног конуса, тј.

$$N_\Omega(x) = \left\{ v \mid v^T w \leq 0, \text{ за све } w \in T_\Omega(x) \right\}.$$

Приметимо да нула-вектор припада и $T_\Omega(x)$ и $N_\Omega(x)$.

2 Марковицов модел оптимизације портфолија

Инвестициони портфолио је скуп финансијских инструмената, тј. добара (новца, хартија од вредности,...) које поседује појединац или институција. Како најбоље инвестирати капитал који је на располагању инвеститорима, сложено је питање на које што бољи одговор покушавају да дају финансијски аналитичари и финансијске институције. Оптимално управљање ризиком портфолија је кључна компонента модерног управљања добрима. Хари Марковиц, отац модерне теорије портфолија, формулисао је проблем селекције портфолија као компромис између приноса и ризика. Дао је класичну дефиницију оптималности портфолија: портфолио је ефикасан ако даје највећи очекивани принос за дати ниво ризика, или је најмање ризичан за исти ниво приноса од свих портфолија из датог скупа хартија од вредности, при чему је ризик портфолија оцењен варијансом приноса портфолија.

Важна порука његове теорије је да добра не могу бити изабрана само на основу својих појединачних карактеристика, него инвеститор треба да узме у обзир како се вредност сваког добра мења у односу на кретања вредности свих осталих добара у портфолију. Узимајући у обзир ове узајамне промене, Марковиц је био у могућности да конструише портфолио са истим очекиваним приносом и мањим ризиком него код портфолија конструисаног игноришући интеракције између добара. Наравно, разматрање само очекиваног приноса и варијансе портфолија је упрошћено моделирање. Међутим, модел очекивани принос-варијанса је остао камен темељац модерне теорије, а његове импликације су добро развијене, општепознате и интуитивно су веома привлачне.

Теорија очекивани принос-варијанса развијена је да би се пронашао оптимални портфолио када инвеститора занима расподела приноса током једног периода инвестирања. Претпоставка да инвестиционе ситуације обухватају један период је понекад добра апроксимација, мада неке инвестиције не могу да се сведу на једнопериодни модел. У сваком случају, чак и такве инвестиције се често анализирају на једнопериодној основи као добром поједностављеном моделу. Овај модел узима за претпоставку да у почетном тренутку улажемо новац, а на крају периода очекујемо исплату. Почетни улог нам је познат, а повраћај новца је неизвестан.

2.1 Очекивани принос и варијанса портфолија

2.1.1 Приноси добара у једнопериодном моделу

Претпоставимо да купујемо добро у нултом временском тренутку, а на крају периода га продајемо. Тотални принос наше инвестиције дефинише се на следећи начин: нека су X_0 и X_1, респективно, уложени и враћени износ новца, а R је (тотални) принос, онда важи

$$R = \frac{X_1}{X_0}.$$

Стопа приноса r дефинисана је као:

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}, \tag{2.1}$$

где су поново X_0 и X_1, респективно, уложени и враћени износ новца.

Краћи термин, „принос“, се често користи и за стопу приноса, а из контекста треба да буде јасно на коју величину се термин односи.

Веза између тоталног приноса и стопе приноса је

$$R = 1 + r$$

и тада (2.1) може да се запише у облику

$$X_1 = (1 + r)X_0.$$

2.1.2 Кратка позиција

Некада је могуће продати добро које не поседујемо путем поступка који се назива кратка продаја. Да бисмо то урадили, морамо позајмити добро од оног ко га поседује (рецимо, брокерске фирме), а онда га продајемо неком другом, добијајући притом износ X_0. Касније, враћамо свој зајам куповином добра за износ X_1 и враћамо га власнику од кога смо позајмили. Ако је износ X_1 мањи од износа X_0, остварујемо профит $X_0 - X_1$. Зато је кратка продаја профитабилна ако цена добра опада. Ако је инвеститор позајмио добро и чека да његова цена опадне да би профитирао, кажемо да је заузео кратку позицију у том добру.

Кратку продају многи инвеститори сматрају прилично ризичном, или чак опасном. Разлог је чињеница да је потенцијални губитак неограничен. Ако се цена добра повећава, губитак је $X_1 - X_0$. Пошто X_1 може да се повећава произвољно, то се може десити и са губитком. Из овог и других разлога у неким финасијским институцијама кратка позиција је забрањена, а многи појединци или институције спроводе политику избегавања кратке позиције. Међутим, генерално је дозвољена и може се рећи да се на тржишту хартија од вредности релативно често јавља.

Ако акција плаћа дивиденде током периода позајмице, морамо платити исту дивиденду лицу од којег смо позајмили ту акцију.

У пракси кратка позиција укључује одређена ограничења и заштиту. На пример, морамо да уложимо депозит код брокера од којег смо позајмили добро. Међутим, у теоријске сврхе обично подразумевамо да је дозвољена чиста кратка продаја добра.

Тотални принос везан за кратку продају одређујемо на следећи начин: иницијално, добијамо износ X_0, а касније плаћамо X_1, тако да је улог $-X_0$, а приход $-X_1$, што даје формулу:

$$R = \frac{-X_1}{-X_0} = \frac{X_1}{X_0}.$$

Приметимо да смо добили исту једнакост као код обичне продаје добра.

Важи:

$$-X_1 = -X_0 R = -X_0(1+r).$$

Помало је необично посматрати стопу приноса везану за идеализован поступак кратке продаје, пошто нема почетног улагања. Међутим, то је исправна процедура.

У пракси се ипак захтева почетно улагање и приход од продаје се чува док се позајмица не врати, тако да ће стопа приноса бити другачија. Али у теоријске сврхе се обично користи идеализована процедура без додатних ограничења.

2.1.3 Принос портфолија

Претпоставимо сада да нам је доступно n добара, од којих формирамо инвестициони портфолио. Износ почетног улога X_0 делимо између n добара. Тада бирамо износе X_{0i}, $i = 1,...,n$ такве да важи

$$\sum_{i=1}^{n} X_{0i} = X_0,$$

где X_{0i} представља износ инвестиран у i-то добро. X_{0i} су сви ненегативни, осим ако је дозвољена кратка продаја добра, када неки од износа X_{0i} могу бити и мањи од нуле.

Инвестирани износи у појединачна добра могу бити представљени као удео у укупној почетној инвестицији. Пишемо:

$$X_{0i} = w_i X_0, \quad i = 1,...,n,$$

где је w_i тежина i-тог добра у портфолију. Очигледно важи

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Неки од тежинских коефицијената w_i могу бити негативни ако је дозвољена кратка продаја; у супротном, сви су ненегативни.

Означимо са R_i тотални принос добра i. Тада износ који добијамо на крају периода генерисан i-тим добром једнак је

$$R_i X_{0i} = R_i w_i X_0 .$$

Тотални принос портфолија је зато

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_o}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \ .$$

Еквивалентно, из

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

добијамо

$$r = R - 1 = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i (R_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \ .$$

Другим речима, *тотални принос и стопа приноса портфолија једнаки су тежинским сумама одговарајућих приноса тј. стопа приноса појединачних добара, где су тежине добара њихове релативне тежине у портфолију.*

2.1.4. Случајни приноси

Стопе приноса добара су величине које не познајемо са сигурношћу. У складу са тим, стопу приноса добра r сматраћемо случајном променљивом. У даљој анализи занимаће нас њена очекивана вредност, $E[r] = \overline{r}$, варијанса (дисперзија), $D[r] = E[(r - \overline{r}^2)] = \sigma^2$, као и њена коваријанса са осталим добрима која нас интересују.

2.1.5 Очекивани принос портфолија

Претпоставимо поново да имамо n добара са случајним приносима $r_1, r_2, ..., r_n$. Њихове очекиване вредности означимо са $\overline{r_1}, \overline{r_2}, ..., \overline{r_n}$. Формирамо портфолио са одговарајућим тежинским коефицијентима $w_1, w_2, ..., w_n$. Стопа приноса портфолија тада је

$$r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + ... + w_n r_n \ .$$

Ако на обе стране ове једнакости применимо математичко очекивање и искористимо особину линеарности очекивања, добијамо

$$\overline{r} = E[r] = w_1 E[r_1] + w_2 E[r_2] + \ldots + w_n E[r_n] = w_1 \overline{r_1} + w_2 \overline{r_2} + \ldots + w_n \overline{r_n} = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i} \; .$$

Дакле, *очекивана стопа приноса портфолија једнака је тежинској суми очекиваних стопа приноса појединачних добара од којих је портфолио конструисан.*

2.1.6 Варијанса приноса портфолија

Нека је са σ_i^2 означена варијанса i-тог добра, $i = 1, \ldots, n$. Нека су σ_{ij} ознаке за коваријансе приноса i-тог добра са j-тим добром, $i, j = 1, \ldots, n$. Означимо са σ^2 варијансу приноса портфолија. Рачунамо:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(r - \overline{r}^2)] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i})^2] \\
&= E[(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \overline{r_i}))(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \overline{r_j}))] \\
&= E[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \overline{r}_i)(r_j - \overline{r_j})] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}
\end{aligned}$$

Закључујемо да се варијанса приноса портфолија може израчунати помоћу коваријанси парова приноса добара и тежина добара у портфолију.

2.2 Марковицов модел

У овом одељку формулисаћемо Марковицов математички модел за одређивање портфолија минималне варијансе. Претпоставимо да имамо n ризичних добара. Нека су очекиване стопе приноса добара означене са $\overline{r}_1, \overline{r}_2, ..., \overline{r}_n$, а њихове међусобне коваријансе са σ_{ij}, за $i, j = 1, ..., n$. Портфолио је дефинисан скупом n тежина w_i, $i = 1, ..., n$, чија сума је 1.

Даље, уводимо још неколико ознака.

Нека је $r = \left[r_1, r_2, ..., r_n\right]^T \in \mathbb{R}^n$ случајна променљива приноса портфолија, чије су компоненте случајни приноси добара. Са $\overline{r} = E[r] = [\overline{r}_1, \overline{r}_2, ..., \overline{r}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ означићемо вектор очекиваног приноса портфолија. Нека је $w = \left[w_1, w_2, ..., w_n\right]^T \in \mathbb{R}^n$ вектор портфолија и $e = \left[1, 1, ...1\,,\right]^T \in \mathbb{R}^n$ вектор чије су компоненте јединице. Дефинишемо матрицу коваријансе портфолија:

$$\Sigma = E\left[(r - \overline{r})(r - \overline{r})^T\right] = E[rr^T] - \overline{r} \cdot \overline{r}^T .$$

Очекивани принос портфолија је

$$w^T \overline{r} = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r}_i ,$$

а ризик (варијанса) портфолија

$$w^T \Sigma w = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} .$$

Уводимо основне претпоставке модела:

(П1) Матрица коваријансе је позитивно дефинитна, тј. $\Sigma > 0$.

(П2) Очекивање $\overline{r}$ није умножак вектора e.

Формулишемо два облика оптимизационог проблема:

Проблем 1. Одредити портфолио минималне варијансе

$$\min_{w} \frac{1}{2} w^T \Sigma w \tag{2.2}$$

$$s.t. \quad e^T w = 1 .$$

Проблем 2. Одредити портфолио минималне варијансе са фиксираним очекиваним приносом ρ

$$\min_{w} \frac{1}{2} w^T \Sigma w$$

$$s.t. \quad e^T w = 1 \tag{2.3}$$

$$\overline{r}^T w = \rho .$$

Ако желимо да у нашој оптимизацији искључимо могућност кратке продаје, уводимо додатно ограничење, $w \geq 0$.

Овакав проблем називамо квадратним програмом, јер је функција циља квадратна, а ограничења су линерна типа једнакости. За решавање овог облика проблема доступни су многобројни рачунарски програми.

Када је кратка продаја дозвољена, већина тежина, ако не и све, имаће ненула вредности, што значи да ћемо у портфолију вероватно употребити сва расположива добра. С друге стране, када кратка продаја није дозвољена, обично је више тежинских коефицијената једнако нули [13].

Претпоставка П1 значи да су свих n добара (и било која њихова конвексна комбинација) стварно ризична; неризична добра, као што је готовина, ће бити посебно третирана, ако су присутна. Друга претпоставка П2 имплицира да је $n \geq 2$ и гарантује недегенерисану ситуацију, иначе би проблем имао увек исто оптимално решење, $x = \dfrac{\Sigma^{-1} e}{(e^T \Sigma^{-1} e)}$, и проблем би имао неконзистантна ограничења, изузев за једну специфичну вредност фиксираног очекиваног приноса: $\rho = \dfrac{\overline{r}^T e}{n}$ [23].

Из П1 следи да је матрица коваријансе регуларна и да је њена инверзна матрица позитивно дефинитна, тј. $\Sigma^{-1} > 0$. То знамо на основу чињенице да је свака позитивно дефинитна матрица регуларна и да је њој инверзна матрица такође позитивно дефинитна. Пошто је Σ симетрична матрица, и Σ^{-1} ће бити симетрична.

Дефинишемо следеће контанте:

$$\alpha = e^T \Sigma^{-1} e,$$

$$\beta = e^T \Sigma^{-1} \overline{r},$$

$$\gamma = \overline{r}^T \Sigma^{-1} \overline{r},$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2.$$

Важи следећа лема:

Лема 2.1 [23] Константе α, γ и δ су позитивне. Прецизније, важи

$$\alpha \in \left[\frac{n}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right],$$

$$\gamma \in \left[\frac{\|\overline{r}\|_2^2}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{\|\overline{r}\|_2^2}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right],$$

$$|\beta| < \frac{\sqrt{n}\|\overline{r}\|_2}{\lambda_{\min}(\Sigma)},$$

где $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ означавају минималну и максималну карактеристичну вредност матрице Σ, респективно.

Доказ. Из П1 знамо да је $\Sigma > 0$. Зато важи:

$$\alpha = e^T \Sigma^{-1} e \in \left[\|e\|_2^2 \lambda_{\min}(\Sigma^{-1}), \|e\|_2^2 \lambda_{\max}(\Sigma^{-1}) \right] = \left[\frac{n}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right].$$

Извођење за константу γ је аналогно. Пошто из П1 и П2 знамо да су вектори $\overline{r}$ и e линеарно независни и $\Sigma > 0$, матрица 2×2

$$\begin{pmatrix} e^T \\ \overline{r}^T \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} e & \overline{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} > 0$$

има позитивну детерминанту δ. Зато, $|\beta| < \sqrt{\alpha\gamma} \leq \sqrt{n}\|\overline{r}\|_2 / \lambda_{\min}(\Sigma)$.

□

Напомена. [23] Извођење тврђења за константе α и γ су стриктна, али не и граница за константу $|\beta|$. Даље, нити $\alpha < \gamma$, нити $\beta > 0$ не важе генерално. У сваком случају, треба нам само $\alpha, \gamma, \delta > 0$.

2.2.1 Решење Марковицовог проблема оптималног портфолија

Посматрајмо поново Проблем 1.

$$\min_{w} \frac{1}{2} w^T \Sigma w$$

$$s.t. \quad e^T w = 1.$$

Дефинишемо Лагранжову функцију проблема:

$$L(w;\lambda) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda (e^T w - 1),$$

где је са λ означен Лагранжов множитељ. Важи следећа теорема:

Теорема 2.2 [23], [12] Проблем 1 има јединствено решење

$$w = \lambda \Sigma^{-1} e, \; \lambda = \frac{1}{\alpha}.$$

Доказ. Нека је вектор w^* локални минимизатор проблема. Тада постоји λ^* такво да важе потребни услови оптималности првог реда:

$$\nabla_w L(w;\lambda) = 0$$

$$e^T w - 1 = 0,$$

односно,

$$\Sigma w - \lambda e = 0$$

$$e^T w = 1,$$

Дакле, решење проблема добијамо решавањем система:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Јединственост решења следи из јаке конвексности функције циља и пуног ранга ограничења.

Рачунамо:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1}(\alpha E - ee^T\Sigma^{-1}) & \Sigma^{-1}e \\ e^T\Sigma^{-1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Даље,

$$\begin{bmatrix} w \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1}(\alpha E - ee^T\Sigma^{-1}) & \Sigma^{-1}e \\ e^T\Sigma^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1}e \\ -1 \end{bmatrix},$$

одакле добијамо тежинске коефицијенте оптималног портфолија и Лагранжов множитељ:

$$w = \frac{\Sigma^{-1}e}{\alpha}$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}.$$

Тежине добара у оптималном портфолију могу да се изразе и помоћу Лагранжовог множитеља:

$$w = \lambda\Sigma^{-1}e.$$

□

2.2.2 Решење Марковицовог проблема оптималног портфолија са фиксираним очекиваним приносом

Сада ћемо посматрати Проблем 2:

$$\min_w \frac{1}{2} w^T \Sigma w$$

$$s.t. \quad e^T w = 1$$

$$\overline{r}^T w = \rho ,$$

где $\rho \in \mathbb{R}$ означава фиксирани очекивани принос портфолија. Тражимо оптимални портфолио који за дати очекивани принос има минималан ризик.

Дефинишемо Лагранжову функцију проблема:

$$L(w; \lambda, \mu) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda (e^T w - 1) - \mu (\overline{r}^T w - \rho) .$$

Сада имамо два Лагранжова множитеља, λ и μ. Следећа теорема нам даје решење проблема:

Теорема 2.3 [23], [12] Проблем 2 има јединствено решење

$$w = \Sigma^{-1} (\lambda e + \mu \overline{r}) , \ \lambda = \frac{\gamma - \beta \rho}{\delta} , \ \mu = \frac{\alpha \rho - \beta}{\delta} .$$

Доказ. Нека је вектор $w*$ локални минимизатор проблема. Тада постоје $\lambda*$ и $\mu*$ такви да важе потребни услови оптималности првог реда:

$$\nabla_w L(w; \lambda, \mu) = 0$$

$$e^T w - 1 = 0$$

$$\overline{r}^T w - \rho = 0 ,$$

односно,

$$\Sigma w - \lambda e - \mu \overline{r} = 0$$

$$e^T w = 1$$

$$\overline{r}^T w = \rho .$$

Дакле, решење проблема добијамо решавањем система:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & e & \overline{r} \\ e^T & 0 & 0 \\ \overline{r}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ -\lambda \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \rho \end{bmatrix} .$$

Јединственост решења поново следи из јаке конвексности функције циља и пуног ранга ограничења.

Рачунамо:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & e & \overline{r} \\ e^T & 0 & 0 \\ \overline{r}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \Sigma^{-1}(\delta\Sigma - (\gamma e e^T - \beta(e\overline{r}^T - \overline{r}e^T) + a\overline{r}\overline{r}^T)\Sigma^{-1}) & \Sigma^{-1}(\gamma e - \beta\overline{r}) & \Sigma^{-1}(\alpha\overline{r} - \beta e) \\ (\gamma e^T - \beta\overline{r}^T)\Sigma^{-1} & -\gamma & \beta \\ (\alpha\overline{r}^T - \beta e^T)\Sigma^{-1} & \beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

Даље, из

$$\begin{bmatrix} w \\ -\lambda \\ -\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma & e & \overline{r} \\ e^T & 0 & 0 \\ \overline{r}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \rho \end{bmatrix}$$

добијамо тежинске коефицијенте оптималног портфолија и Лагранжове множитеље:

$$w = \Sigma^{-1}(\frac{\gamma - \beta\rho}{\delta}e + \frac{\alpha\rho - \beta}{\delta}\overline{r})$$

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta\rho}{\delta}$$

$$\mu = \frac{\alpha\rho - \beta}{\delta}.$$

Поново тежине добара у портфолију можемо изразити преко Лагранжових множитеља:

$$w = \Sigma^{-1}(\lambda e + \mu\overline{r}).$$

□

2.3 Нестабилност Марковицовог модела

Као што је већ речено, Марковицов рад дао је огроман допринос теорији портфолија, пре свега због новог приступа у којем се оптимизација портфолија не посматра само као тежња за високим приносима, него као баланс између високих приноса с једне стране и ниског ризика, који је моделиран варијансом, са друге стране. Теоријске предности модела су неспорне, међутим неколико проблема јављају се у његовој практичној примени. У пракси то је процедура склона грешкама и нестабилности које често резултирају неупотребљивим конструкцијама портфолија, а неке студије су показале да чак и наивни портфолио може бити супериорнији од Марковицовог оптималног портфолија.

Колико и како се Марковицов модел заиста користи у пракси питање је које у великој мери зависи од угла гледања. С једне стране, иако постоји велики број значајних метода за ублажавање нестабилности и других недостатака оптимизационог процеса, оне се врло често игноришу у пракси. Један од разлога, како су закључили Richard и Robert Michaud у [19], може бити огроман углед који Марковиц и његов рад уживају међу инвеститорима, што води до игнорисања очигледних ограничених перформанси процедуре у њеној практичној примени. С друге стране, Richard Michaud у свом раду [18] истиче да бројне финасијске институције игноришу оптимизацију портфолија као методу за доношење одлука из разлога у домену пословне политике, у смислу да примена модела задире у структуру институције и поделу посла у управљању инвестиционим процесима, јер би се применом Марковицовог оптимизатора тежиште доношења одлука пренело са вишег менаџмента на ниже нивое структуре институције.

Да би се применио у реалним ситуацијама, модел захтева оцене вектора очекиваних приноса и матрице коваријансе за период током којег држимо портфолио. Овај проблем оцењивања је добијао релативно мало пажње и многи аутори, и теоретичари и практичари, користили су историјске вредности као прецизне оцене будућих вредности. Међутим, нису само перформансе добара у прошлости релевантни подаци који ће нас довести до примењивих оптималних портфолија. Аутори препоручују или коришћење различитих метода за процену приноса добара, варијанси и коваријанси, које се онда могу употребити уместо историјских вредности у моделу оптималног портфолија, или коришћење историјских вредности у модификованим техникама селекције портфолија. Пошто Марковицов модел селекције портфолија узима ове оцене као параметарске, не постоји теоријски водич за методе оцењивања, тако да се од стране различитих аутора предлаже велики број метода за обезбеђивање оцена.

2.3.1 Недостаци модела у пракси

Charlotta Mankert у својој тези [16] наводи неке од најважнијих проблема у употреби Марковицовог модела:

- Марковицови оптимизатори показују тенденцију максимизирања грешака. Пошто не постоје апсолутно коректне и егзактне процене очекиваних приноса, варијанси и коваријанси, ове процене су подложне грешкама оцењивања. Оптимизатори додељују превелику тежину хартијама од вредности са високим очекиваним приносом и негативном корелацијом, а малу тежину онима које имају ниске очекиване приносе и позитивну корелацију. Ове хартије од вредности су уједно и оне које су најсклоније томе да носе велике грешке оцене. Овде, међутим, наилазимо на делимично контрадикторан аргумент, јер ако инвеститор и верује да ће се добро показати као успешно, онда имају разлог да дају високу оцену очекиваном приносу тог добра. Тада и делује разумно да ово добро добије велику тежину у портфолију (узимајући у обзир коваријансе).

- Лоша је навика да се користе историјски подаци за одређивање узорачке средине и да се њоме замени очекивани принос. Овај у пракси укорењен поступак у великој мери доприноси максимизацији грешке Марковицовог модела.

- Марковицов модел не узима у обзир тежине тржишне капитализације. То значи да ако добра са ниским нивоом капитализације имају високе очекиване приносе и негативно су корелирани са осталим добрима у портфолију, модел може предложити високе тежине у портфолију. То је проблем, поготово када се додају ограничења за кратку продају. Модел често сугерише веома високе тежине за добра са ниским нивоом капитализације.

- Марковицов модел очекивани принос – варијанса не прави разлику између различитих нивоа поузданости повезане са оценама улазних величина у моделу.

- Очекивани принос – варијанса модели су често нестабилни, што значи да мале промене у улазним величинама могу драматично да промене структуру портфолија. Модел је нарочито нестабилан у погледу улазних очекиваних приноса. Једна мала, статистички безначајна промена у очекиваном приносу једног добра може генерисати радикално другачији портфолио. Ова појава пре свега је проузрокована лошом условљеношћу матрице коваријансе. На пример, лоше условљеном матрицом коваријансе може се сматрати матрица добијена на основу непотпуних историјских података.

- Иако оптимизација генерално производи јединствена решења за дати ниво ризика, овај привид јединствености може да завара. Јединственост решења зависи од претпоставке да улазни подаци немају грешку статистичке процене.

У истом раду се такође помињу и неки други проблеми са Марковицовим моделом.

Као један од најупадљивијих емпиријских проблема код употребе Марковицовог модела наводи се да када се оптимизује без ограничења, модел скоро увек препоручује портфолија са великим негативним тежинама за известан број добара. Менаџерима фондова и портфолија који користе модел обично није дозвољено да заузму кратке позиције. Због тога, ограничење на кратку продају често се додаје оптимизационом процесу. Оно што се дешава када се оптимизује портфолио са ограничењима, је да модел даје решење са нула тежинама за много добара и због тога заузима велике позиције на само неколико добара са неразумно великим тежинама. Многи инвеститори сматрају портфолије ове врсте неразумним и, иако делује да је многим инвеститорима привлачна идеја очекивани принос-варијанса оптимизације, ови проблеми се појављују као неки од главних разлога за некоришћење ове методе.

У идеализованој ситуацији у којој би инвеститори били прилично сигурни у улазне податке оптимизационог модела, излаз модела не би деловао тако неразумно. Међутим, у реалности, свака апроксимација о будућем приносу је прилично неизвесна и шанса да је „апсолутно коректна“ је мала. Пошто су оцене будућег ризика и приноса неизвесне, нормално је да инвеститори желе да инвестирају у портфолије који нису потенцијална катастрофа у случају да се оцењивачи покажу некоректним. Мишљења су подељена око тога да ли боље улазне оцене могу помоћи да се премости проблем интуитивности Марковицових портфолија или чак ни боље оцене не премошћавају јаз између очекивани принос – варијанса и „интуитивних“ портфолија, у које су инвеститори ради да улажу, пошто грешке оцењивања никад не могу да буду елиминисане. Није могуће предвидети будуће очекиване приносе, варијансе и коваријансе са 100% поверења.

Даље, метод користи варијансу као меру ризика, што се обично сматра превише поједностављеном мером када приноси добара не прате нормалне расподеле, што је често случај у пракси, како истичу Welsch и Zhou у [26]. Поред тога, наводе и да једнопериодна природа статичке оптимизације такође не узима у обзир динамичке факторе и да неки истраживачи предлажу компликованије моделе базиране на стохастичким процесима или динамичком програмирању.

Поступак оцењивања коваријанси између добара је такође проблематичан. Примера ради [16], у портфолију који садржи 50 добара, број варијанси који треба да буде оцењен је 50, али број коваријанси је 1225. То делује као превише обиман посао, не само за једног аналитичара, већ и за читав тим. Како наводе Welsch и Zhou, матрица коваријансе садржи више параметара за процену и у вези са тим јављају се два главна проблема. Прво, прилично је вероватно да ће подаци имати *outlier*[1]-е који ће озбиљно утицати на добијену матрицу коваријансе. Развијени су бројни алтернативни модели за побољшање оцене параметара. Али ниједан приступ није ефикасно смањио или елиминисао утицај *outlier*-а у подацима. Мали проценат *outlier*-а, у неким случајевима и само један, може изобличити коначне оцењене варијансе и коваријансе. Друго, са толико параметара за оцену, потребан је велики број историјских опсервација приноса и природа тржишта може значајно да се промени током тако дугог периода.

2.3.2 Историјски подаци

Неизвесност је кључна особина инвестирања у хартије од вредности, истакао је Марковиц [17]. Економске силе нису тако добро познате да би прогнозе биле лишене могућности грешке. Чак иако су последице економских услова савршено проучене, неки други, нееекономски утицаји могу да промене токове на тржишту.

Ако тражимо од финансијских аналитичара да нам дају сигурну прогнозу да ли ће у будућности вредност одређене хартије од вредности расти или опадати, онда тражимо превише.

Модел оптимизације портфолија захтева оцењивање вектора очекиваних приноса и матрице коваријансе за период током којег држимо портфолио. У литератури често можемо читати о важности историјских података у модерној финансијској теорији. Тешко је довести у питање чињеницу да историјске временске серије имају јак утицај на доношење одлука у финансијама. Штавише, делује да постоји раширена заблуда да је и Марковицов модел изграђен искључиво на историјским улазним подацима. Међутим, то није случај. Сам Марковиц у свом раду, иако није експлицитно наводио методе за оцењивање параметара модела, дао је осврт на потенцијалне изворе информација о хартијама о вредности. Као један извор информација навео је перформансе хартија од вредности у прошлости. Други извор

[1] *Outlier* – вредност случајне промењиве која у великој мери одступа од осталих вредности.

информације су уверења аналитичара о будућим перформансама добара. Када се перформансе из прошлости користе као улазне информације, излазна вредност биће портфолио састављен од хартија од вредности које су се добро показале у прошлости. Када су улазне информације уверења о будућим перформансама, онда је резултат портфолио који је импликација тих уверења о томе да ли ће се портфолио показати као добар или лош.

Значи, селекција портфолија треба да буде базирана на разумним убеђењима о будућим приносима, пре него само на перформансама у прошлости [16]. Избори базирани само на историјским вредностима, у ствари, претпостављају да су просечни приноси у прошлости добре процене „извесних“ приноса у будућности и да је варијабилност приноса у прошлости добра мера неизвесности кретања приноса у будућности.

Треба напоменути, међутим, да задатак оптимизације портфолија није анализа хартија од вредности. Марковиц је нагласио да је то посао финансијских аналитичара и да оптимизација почиње тек тамо где се њихов посао завршава. Другим речима, модел не узима у обзир поузданост улазних података.

2.3.3 Матрица коваријансе у моделу оптимизације портфолија

Ризик у Марковицовом моделу, као и у многим другим финансијским моделима, је апроксимиран варијансама и коваријансама будућих приноса. Када посматрамо само једно добро, довољно је оценити и вредновати само његов будући очекивани принос и будућу варијансу. Када вреднујемо портфолио више добара, међутим, треба да посматрамо какве су коваријансе међу добрима да бисмо оценили варијансу портфолија као целине. Коваријанса је мера како се вредности две случајне променљиве мењају једна у односу на другу. У овом случају, случајне променљиве су парови добара у портфолију. Добро оцењена коваријанса је круцијална за портфолио теорију и повећава могућност добијања добро диверсификованог портфолија [16].

Матрице коваријансе утврђене на основу емпиријских временских серија чини се да садрже тако велику количину шума, да њихова структура може бити, у суштини, сматрана случајном, примећује Mankert [16]. То, међутим, делује да је у контрадикцији са суштинском улогом коју матрица коваријансе игра у финансијама.

Оцена коваријансе захтева осетно више података него што је обично доступно за оптимизацију портфолија. Оптимизација n добара захтева n временских периода опсервација приноса. Ако није доступно довољно података, матрица коваријансе је сингуларна, а оптимизација портфолија је недопустива. Међутим, много више података обично је потребно да би се избегла лоша условљеност. Лоше условљена матрица коваријансе је често озбиљан узрок нестабилности очекивани принос – варијанса оптимизације. У суштини, оптимизација портфолија захтева тражење инверзне матрице за матрицу коваријансе. Матрица коваријансе може бити несингуларна и зато инвертибилна, али ипак лоше условљена. У том случају оптимизација је врло нестабилна. Број периода опсервација требало би да буде реда величине већег од броја хартија од вредности укључених у оптимизацију [19].

Технички, лоша условљеност проузрокује велики количник између највеће и најмање карактеристичне вредности узорачке матрице коваријансе. Последица овог великог количника је да се ефективно повећавају потенцијално мале грешке у низовима оцењених приноса за веома велики фактор. Овај фактор је такозвани условни број узорачке матрице коваријансе.

Ако узорачка матрица коваријансе има ранг n, где је n број добара, онда матрица има n карактеристичних вредности. Карактеристичне вредности матрице коваријансе су често корисне у разумевању њених статистичких карактеристика. Стабилност оптимизације зависи од статистичких особина карактеристичних вредности матрице коваријансе. Побољшана процена коваријансе захтева удаљавање малих карактеристичних вредности од нуле док се велике смањују, закључују Richard и Robert Michaud.

2.3.4 Пертурбације у моделу оптимизације портфолија

Вратимо се сада на проблеме (2.2) и (2.3). У оба модела уводимо пертурбацију очекиваног приноса дефинисану са:

$$\tilde{r} = \overline{r} + \varepsilon, \tag{2.4}$$

где је $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ вектор пертурбација.

Сада ћемо видети како уведене пертурбације мењају матрицу коваријансе.

Лема 2.4 [12] Нека је r случајна променљива приноса са математичким очекивањем $\overline{r}$. Нека је Σ матрица коваријансе приноса и нека је пертурбација очекиваног приноса дефинисана са (2.4). Тада је пертурбована матрица коваријансе $\tilde{\Sigma}$ симетрична, позитивно дефинитна матрица и има облик:

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma + \varepsilon\varepsilon^T .$$

Доказ. Пертурбована матрица коваријансе дефинисана је са:

$$\tilde{\Sigma} = E[(r-\tilde{r})(r-\tilde{r})^T].$$

Када у ову једнакост заменимо $\tilde{r} = \overline{r} + \varepsilon$ добијамо:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma} &= E[(r-\tilde{r})(r-\tilde{r})^T] \\
&= E[((r-\overline{r})-\varepsilon)((r-\overline{r})-\varepsilon)^T] \\
&= E[(r-\overline{r})(r-\overline{r})^T - (r-\overline{r})\varepsilon^T + \varepsilon(r-\overline{r})^T - \varepsilon\varepsilon^T] \\
&= E[(r-\overline{r})(r-\overline{r})^T] - E[(r-\overline{r})\varepsilon^T] - E[\varepsilon(r-\overline{r})^T] - E[\varepsilon\varepsilon^T] \\
&= E[(r-\overline{r})(r-\overline{r})^T] - E[r-\overline{r}]\varepsilon^T - \varepsilon E[(r-\overline{r})^T] - \varepsilon\varepsilon^T \\
&= \Sigma + \varepsilon\varepsilon^T .
\end{aligned}$$

Да бисмо показали да је матрица $\tilde{\Sigma}$ симетрична, показаћемо да важи: $\Sigma^T = \Sigma$. Знамо да је матрица Σ симетрична, па важи $\Sigma^T = \Sigma$. Тада имамо:

$$\tilde{\Sigma}^T = (\Sigma + \varepsilon\varepsilon^T)^T = \Sigma^T + (\varepsilon\varepsilon^T)^T = \Sigma + (\varepsilon^T)^T \varepsilon^T = \Sigma + \varepsilon\varepsilon^T = \Sigma .$$

Још треба показати да је $\tilde{\Sigma}$ позитивно дефинитна, тј. $\tilde{\Sigma} > 0$. Показујемо да за произвољни вектор $x \neq 0$ важи $x^T\tilde{\Sigma}x > 0$.

$$x^T\tilde{\Sigma}x = x^T(\Sigma + \varepsilon\varepsilon^T)x = x^T\Sigma x + x^T\varepsilon\varepsilon^T x = x^T\Sigma x + (\varepsilon^T x)^T\varepsilon^T x > 0 .$$

□

Сада нас интересују оцене утицаја пертурбација на релативне грешке решења оптимизационих проблема [12].

Посматрајмо пертурбовани Проблем 1 у облику система једначина:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ -\tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Нека је $x=\begin{bmatrix}\tilde{w}\\ -\tilde{\lambda}\end{bmatrix}$ непозната у том систему. Тада је релативна грешка решења дата са:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le \max\left\{\frac{1}{\lambda_1},(\lambda_n+\|\varepsilon\|^2)(\frac{1}{n}+\frac{1}{\lambda_1^2})\right\}\|\varepsilon\|^2 .$$

Ако пертурбовани Проблем 2 формулишемо у облику система:

$$\begin{bmatrix}\tilde{\Sigma} & e & \tilde{r}\\ e^T & 0 & 0\\ \tilde{r}^T & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{w}\\ -\tilde{\lambda}\\ -\tilde{\mu}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ \rho\end{bmatrix}$$

и означимо $x=\begin{bmatrix}\tilde{w}\\ -\tilde{\lambda}\\ -\tilde{\mu}\end{bmatrix}$, онда имамо:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le \max\left\{\frac{1}{\lambda_1},\frac{4\frac{n\|\overline{r}\|^2}{\lambda_1^3}+\frac{n}{\lambda_1}+\frac{\|\overline{r}\|^2}{\lambda_1}}{n\|\overline{r}\|^2\left(\frac{1}{\lambda_n+\|\varepsilon\|^2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)^2}\right\}\frac{\varepsilon^T\varepsilon+\sqrt{(\varepsilon^T\varepsilon)^2+4\varepsilon^T\varepsilon}}{2}.$$

3 Проблем одређивања најближе матрице корелације

Као што смо видели у претходном поглављу, матрица коваријансе приноса портфолија представља значајан фактор стабилности оптимизације портфолија. У овом поглављу видећемо један од могућих начина да се оптимизациони поступак стабилизује. Дефинисаћемо алгоритам представљен у раду Nicholas J. Higham-a [9] из 2002. године, који ћемо применити на матрицу корелације портфолија, да бисмо побољшали перформансе оптимизационе процедуре.

Матрица корелације је матрица чији је елеменат на позицији (i, j) коефицијент корелације између две случајне промењиве X_i и X_j. У нашем случају, посматране случајне промењиве биће приноси добара од којих састављамо портфолио. Матрица корелације може се посматрати и као нормализована матрица коваријансе.

За потребе конструкције стабилизационог алгоритма, појам матрице корелације посматраћемо у нешто ширем смислу.

Дефиниција 3.1 *Матрица корелације* је симетрична, позитивно семидефинитна матрица са јединичном дијагоналом.

Матрица корелације, коју користимо за потребе предикције у нашој финансијској примени, добија се из узорка, на основу вектора приноса добара. Мотивација која нас води до жељеног алгоритма јесте проблем када је узорачка матрица корелације састављена од непотпуних података. У пракси су ретко доступни комплетни подаци о вредностима свих добара која нас интересују, за све дане које су обухваћене опсервацијом. Један од начина да се овај проблем превазиђе је да израчунамо узорачке коефицијенте корелације парова акција користећи податке узете само за оне дане за које обе посматране акције имају расположиве податке. Резултујућа матрица корелације у том случају ће бити само *апроксимативна* матрица корелације, зато што је формирана од неконзистентних скупова података. Да би се оправдала анализа помоћу оваквих података, потребно је израчунати њој најближу матрицу корелације коју ћемо затим употребити у израчунавањима.

Посматраћемо следећи проблем: за произвољну симетричну матрицу $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, желимо да израчунамо растојање

$$\gamma(A) = \min\left\{ \ \|A - X\| : X \text{ је матрица корелације } \right\} \tag{3.1}$$

и одредимо матрицу која то минимално растојање достиже. Норма коју користимо је тежинска верзија Фробенијусове норме, дефинисане са $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$. Фробенијусова норма је најлакша за рад са овим проблемом и она је природан избор са статистичке тачке гледишта. Посматраћемо две различите тежинске Фробенијусове норме. Прва, уједно и најчешће коришћена у нумеричкој математици, је W - норма,

$$\|A\|_W = \left\|W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}}\right\|_F, \tag{3.2}$$

где је W симетрична, позитивно дефинитна матрица. Друга тежинска норма је H - норма,

$$\|A\|_H = \|H \circ A\|_F, \tag{3.3}$$

где је H симетична матрица позитивних тежина, а $\circ$ означава Адамаров производ матрица, $A \circ B = \left(a_{ij} b_{ij}\right)$.

Тежинске норме су погодне због тога што нам употреба тежина омогућава да изразимо степен поверења у различите елементе матрице A: за H-норму, ако је елеменат a_{ij} величина чија је вредност прецизна (у односу на остале елементе), онда јој можемо доделити велику тежину h_{ij} и тако приморати x_{ij} да се приближи a_{ij}. Обратно, ако је a_{ij} релативно непрецизна, онда може да јој се додели мала тежина h_{ij}. W-норма нам не дозвољава независно додељивање тежина појединачним елементима, али је једноставнија за рад, пре свега зато што је трасформација $A \to W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}}$ конгруенција, и зато очувава инерцију, док трансформација $A \to H \circ A$ очувава само симетрију [9].

Две тежинске норме се поклапају када је матрица $W = diag(w_i)$ дијагонална, а матрица H има ранг 1 и $h_{ij} = (w_i w_j)^{\frac{1}{2}}$, али ниједна норма не обухвата ону другу као специјалан случај. За W-норму, дијагонална матрица W је најприроднији избор, али теорија и алгоритми обухватају општи случај и не захтевају да матрица W буде дијагонална.

Уводимо следеће скупове:

Дефиниција 3.2 Са S означавамо скуп свих симетричних позитивно семидефинитних матрица, тј.

$$S = \left\{ Y = Y^T \in \mathbb{R}^{nxn} : Y \geq 0 \right\},$$

а са U скуп симетричних матрица са јединицама на главној дијагонали, тј.

$$U = \left\{ Y = Y^T \in \mathbb{R}^{nxn} : y_{ii} = 1,\ i = 1,\dots,n \right\}.$$

У финансијској примени увек важи $A \in U$ и $\left| a_{ij} \right| \leq 1$ за све $i \neq j$, али нас интересује општије решење проблема (3.1) за произвољну симетричну матрицу A.

Дакле, тражимо матрицу у пресеку скупова S и U која је најближа матрици A по тежинској Фробенијусовој норми. Пошто су и S и U затворени конвексни скупови, то такође важи и за њихов пресек [9]. Следећа теорема класичне теорије апроксимације обезбеђује да се минимум у (3.1) достиже у јединственој матрици X.

Теорема 3.3 [14] Нека је x вектор у Хилбертовом простору H и нека је K затворен, конвексни подскуп од H. Тада постоји јединствени вектор $k_0 \in K$, такав да важи:

$$\left\| x - k_0 \right\| \leq \left\| x - k \right\|,$$

за све $k \in K$. Даље, потребан и довољан услов да вектор k_0 буде јединствени минимизатор растојања вектора x од скупа K је да важи:

$$(x - k_0, k - k_0) \leq 0, \text{ за све } k \in K.$$

Треба поменути два специјална случаја у којима је оптимално X познато, уз рестрикцију да је за W-норму матрица W дијагонална. Ако је матрица A дијагонална, онда је $X = E$, а ако је матрица A позитивно семидефинитна са дијагоналним елементима мањим или једнаким са 1, онда се матрица X добија заменом дијагоналних елемената јединицама.

Приметимо да важи неједнакост

$$\left| \gamma(A) - \gamma(B) \right| \leq \left\| A - B \right\|.$$

Њен практични значај је да, ако је $\left\| A - B \right\|$ довољно мало, онда је најближа матрица корелације матрице A довољно добра апроксимација најближе матрице корелације матрице B.

3.1 Теоријска основа

Основа за решавање проблема најближе матрице корелације су резултати теорије оптимизације.

Ми ћемо радити са W-нормом из (1.2), а касније ћемо прокоментарисати како се анализа прилагођава H-норми. Дефинишемо производ матрица

$$\langle A,B\rangle = trace(A^T WBW),$$

који може да се посматра као унутрашњи производ на $\mathbb{R}^{nxn}$ који индукује W-норму.

Нормални конус конвексног скупа $K \subset \mathbb{R}^{nxn}$ у тачки $B \in K$ је

$$\partial K(B) = \left\{ \quad Y = Y^T \in \mathbb{R}^{nxn} : \langle Z - B, Y\rangle \le 0 \text{ за све } Z \in K \quad \right\} \tag{3.4}$$

$$= \left\{ \quad Y = Y^T \in \mathbb{R}^{nxn} : \langle Y, B\rangle = \sup_{Z\in K}\langle Y, Z\rangle \quad \right\}. \tag{3.5}$$

Полазимо од чињенице да је решење X проблема (3.1) карактеризовано условом из Тeореме 3.3.

$$\langle Z - X, A - X\rangle \le 0 \text{ за све } Z \in S \cap U \tag{3.6}$$

Ови услови могу да се преформулишу у облик $A - X \in \partial(S \cap U)(X)$, што је нормални конус за пресек $S \cap U$ у тачки X. За два произвољна конвексна скупа K_1 и K_2, чије релативне унутрашњности имају заједничку тачку, важи [22]

$$\partial(K_1 \cap K_2)(X) = \partial K_1(X) + \partial K_2(X).$$

Било која позитивно дефинитна матрица корелације лежи у релативним унутрашњостима и скупа S и скупа U, тако да закључујемо да је решење X одређено условом

$$A - X \in \partial S(X) + \partial U(X). \tag{3.7}$$

Наш задатак сада је да одредимо скупове ∂S и ∂U.

Лема 3.4 [9] За матрицу $A \in U$,

$$\partial U(A) = \left\{ \quad W^{-1} diag(\theta_i) W^{-1} : \theta_i \text{ је произвољно } \right\}. \tag{3.8}$$

Доказ. Имамо

$$\partial U(A) = \left\{ Y = Y^T \in \mathbb{R}^{nxn} : \left\langle Y, A \right\rangle = \sup_{Z \in U} \left\langle Y, Z \right\rangle \right\},$$

а ограничење може бити написано у облику

$$\sum_{i,j} \tilde{y}_{ij} a_{ij} = \sup_{Z \in U} \sum_{i,j} \tilde{y}_{ij} z_{ij} \,,$$

где је $\tilde{Y} = WYW$. Ако матрица $\tilde{Y}$ није дијагонална, онда можемо изабрати z_{ij} произвољно велико и истог знака као $\tilde{y}_{ij} \neq 0$ и тиме нарушити супремум ограничење. Због тога је матрица $\tilde{Y}$ дијагонална и било која матрица Y облика $Y = W^{-1} diag(\theta_i) W^{-1}$ задовољава ограничење.

Лема 3.5 [9] За све матрице $A \in S$,

$$\partial S(A) = \left\{ Y = Y^T : \left\langle Y, A \right\rangle = 0, Y \leq 0 \right\}.$$

Доказ. Имамо

$$\partial S(A) = \left\{ Y = Y^T : \left\langle Y, A \right\rangle = \sup_{Z \in S} \left\langle Y, Z \right\rangle \right\}.$$

Нека матрица $Z \in S$ има спектралну декомпозицију $Z = Q \Lambda Q^T$, где је матрица Q ортогонална, а $\Lambda = diag(\lambda_i) \geq 0$. Тада, за $C = Q^T WYWQ$, имамо

$$\begin{aligned}
\sup_{Z \in S} \left\langle Y, Z \right\rangle &= \sup_{\Lambda \geq 0, Q^T Q = E} \left\langle Y, Q \Lambda Q^T \right\rangle \\
&= \sup_{\Lambda \geq 0, Q^T Q = E} \left\langle C, \Lambda \right\rangle \\
&= \sup_{\Lambda \geq 0, Q^T Q = E} \sum_i \lambda_i c_{ii} \\
&= \begin{cases} 0, \text{ ако } Y \geq 0 \\ \infty, \text{ иначе.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ова једнакост важи у супремум услову за матрицу Y, такву да је $\left\langle Y, A \right\rangle = 0$ и $Y \leq 0$.

□

Последица 3.6 [9] За све матрице $A \in S$,

$$\partial S(A) = \{ \quad Y : WYW = -VDV^T \text{, где } V \in \mathbb{R}^{nxn} \text{ има ортогоналне колоне које генеришу } null(A) \text{ и } D = diag(d_i) \geq 0 \quad \}.$$

Доказ. Нека матрица A има спектралну декомпозицију $Q\Lambda Q^T$, где је $\Lambda = diag(\lambda_i)$ и $\lambda_i \geq ... \geq \lambda_{n-p} > 0 = \lambda_{n-p+1} = ... = \lambda_n$. Пишемо $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_p)$, $Q = [Q_1, Q_2]$, где је $Q_1 \in \mathbb{R}^{nx(n-p)}$ и приметимо да колоне матрице Q_2 генеришу $null(A)$.

За матрицу $Y \in \partial S(A)$ важи

$$0 = \langle Y, A \rangle = trace(AWYW) = trace(Q_1\Lambda_1 Q_1^T WYW) = trace(\Lambda_1 Q_1^T WYWQ_1),$$

а пошто је $\Lambda_1 > 0$ и $Y \leq 0$, одатле следи да је $diag(Q_1^T WYWQ_1) = 0$. Сада пишемо

$$\begin{bmatrix} G & H \\ H^T & M \end{bmatrix} := Q^T(WYW)Q = \begin{bmatrix} Q_1^T(WYW)Q_1 & Q_1^T(WYW)Q_2 \\ Q_2^T(WYW)Q_1 & Q_2^T(WYW)Q_2 \end{bmatrix} \leq 0.$$

Пошто је $diag(G) = 0$, следи да је $G = 0$ и зато $H = 0$. Даље, $M \leq 0$. Онда имамо

$$0 \geq WYW = Q_2 M Q_2^T = -VDV^T,$$

где смо користили спектралну декомпозицију матрице M да добијемо дијагоналну матрицу $V \in \mathbb{R}^{nxp}$ са ортонормалним колонама и позитивно семидефинитну матрицу $D \in \mathbb{R}^{pxp}$.

□

Сада можемо да формулишемо теорему која карактерише решење нашег проблема.

Теорема 3.7 [9] Матрица корелације X је решење проблема (3.1) ако и само ако

$$X = A + W^{-1}(VDV^T + diag(\theta_i))W^{-1}, \tag{3.9}$$

где матрица $V \in \mathbb{R}^{nxp}$ има ортонормалне колоне које генеришу $null(X)$, $D = diag(d_i) \geq 0$, а θ_i су произвољни.

Доказ. Резултат следи из услова (3.7) применом Леме 3.4 и Последице 3.6.

□

Аналогна теорема важи такође и за H -норму (3.3), ако је

$$X = A + (VDV^T + diag(\theta_i)) \circ (h_{ij}^{-2}) .$$

Један од могућих начина да се изведе ово решење је модификација претходне анализе [9].

Из Теореме 3.7 директно следи да ће, бар када је матрица W дијагонална, матрица X генерално бити сингуларна (и зато неће бити позитивно дефинитна). За случај када је матрица X несингуларна, имамо $V = 0$ и $X = A + W^{-1} diag(\theta_i) W^{-1}$, што значи да се матрица X добија само подешавањем дијагоналних елемената на 1.

Интересантно је приметити да из једнакости (3.9) следи потребан услов за оптималност: да матрица X задовољава квадратну матричну једначину $XW(X - A)W = X\ diag(\theta_i)$.

У важном специјалном случају када је матрица W дијагонална, а дијагонални елементи матрице A су бар 1, можемо рећи још више.

Теорема 3.8 [9] Нека матрица $A = A^T$ има дијагоналне елементе $a_{ii} \geq 1$ и нека је матрица W дијагонална. Тада, у Теореми 3.7 важи $\theta_i \leq 0$, за све i. Даље, ако матрица A има t непозитивних карактеристичне вредности, онда најближа матрица корелације има бар t нула карактеристичних вредности.

Доказ. Пошто матрица A има дијагоналне елементе бар 1 и $W^{-1}(VDV^T)W^{-1} \geq 0$, дијагонални елементи матрице $X = A + W^{-1}(VDV^T)W^{-1}$ у (3.9) су бар 1. Због тога, да би матрица X имала јединичну дијагоналу, треба нам $\theta_i \leq 0$, за све i. Испитујући (3.9) видимо да пертурбација $W^{-1}(VDV^T)W^{-1}$ помера t или више непозитивних карактеристичних вредности матрице $A + W^{-1} diag(\theta_i) W^{-1}$ у ненегативност. Пертурбација VDV^T има ранг највише p и зато, због стандардног резултата за карактеристичне вредности симетричне матрице са пертурбацијом ниског ранга [10], морамо имати $p \geq t$. Пошто је p димензија нула простора матрице X, резултат следи.

□

Да је рестрикција на дијагоналну матрицу A потребна у Теореми 3.8 може се видети из чињенице да ако је A дијагонална матрица, онда, као што смо раније приметили, најближа матрица корелације је јединична матрица E за било коју дијагоналну матрицу W, без обзира на вредности a_{ii}.

Пример [9] Иако не дају метод за израчунавање решења, Теореме 3.7 и 3.8 могу се употребити за верификацију могућег решења. Да бисмо то илустровали, посматрајмо матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Користићемо нетежинску Фробенијусову норму. Пошто је $A = ee^T - (e_1 e_3^T + e_3 e_1^T)$, где је $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, јасно је да је матрица A индефинитна и да су, у ствари, њене карактеристичне вредности $1+\sqrt{2}$, 1 и $1-\sqrt{2}$. Очигледан кандидат за најближу матрицу корелације матрице A је матрица $X = ee^T$, за коју важи $\|A - X\|_F = \sqrt{2}$. Нула простор матрице X је генерисан колонама следеће матрице:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

тако да из Теореме 3.7 (која остаје тачна ако су колоне матрице V ортонормалне) морамо имати

$$X = A + \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_1 & -d_2 \\ -d_1 & d_1 & 0 \\ -d_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix} + diag(\theta_i),$$

за $d_1 \geq 0$. Ова једнакост имплицира $d_2 = -1$ и зато матрица X не може да буде решење. У ствари, решење је, за дате нумеричке вредности,

$$X = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.7607 & 0.1573 \\ 0.7607 & 1.0000 & 0.7607 \\ 0.1573 & 0.7607 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

за $\|A - X\|_F = 0.5278$. Ова матрица X је сингуларна, са једнодимензионалним нула простором генерисаним вектором $q = \begin{bmatrix} -0.4814 & 0.7324 & -0.4814 \end{bmatrix}^T$.

3.2 Израчунавање

3.2.1 Пројекције

Наш проблем сада је да пројектујемо симетричну матрицу на матрицу корелације, у односу на тежинску Фробенијусову норму. Посматраћемо прво како да пријектујемо на скупове S и U појединачно. Почињемо скупом U и означавамо са P_U пројекцију на скуп U.

Теорема 3.9 [9] За W-норму важи

$$P_U(A) = A - W^{-1}diag(\theta_i)W^{-1},$$

где је $\theta = \left[\theta_1, ..., \theta_n\right]^T$ решење линеарног система

$$(W^{-1} \circ W^{-1})\theta = diag(A - I). \tag{3.10}$$

Доказ. Пројекција $X = P_U(A)$ је одређена условом $A - X \in \partial U(X)$, који, према Леми 3.4 може да се запише у облику

$$A - X = W^{-1}diag(\theta_i)W^{-1}.$$

Изједначавањем дијагоналних елемената и увођењем ознака $W^{-1} = \left(w_{ij}\right)$, добијамо

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 \theta_j = a_{ii} - 1.$$

Ове једначине образују линеарни систем (3.10). Пошто је матрица W позитивно дефинитна, то важи и за матрицу $W^{-1} \circ W^{-1}$, и зато овај линеарни систем има јединствено решење.

□

У случају када је матрица W дијагонална, можемо једноставније писати

$$P_U(A) = (p_{ij}), \qquad p_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{3.11}$$

Лако је показати да је за H-норму (3.11) пројекција на скуп U за свако H.

Пројекција на скуп S је компликованија. Није позната затворена формула за H-норму, али за W-норму следећи резултат обезбеђује такву формулу. Уводимо нове ознаке:

За симетричну матрицу $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ са спектралном декомпозицијом $A = QDQ^T$, где је $D = diag(\lambda_i)$, а матрица Q је ортогонална, нека је

$$A_+ = Q\ diag(\max(\lambda_i, 0))\ Q^T, \qquad A_- = Q\ diag(\min(\lambda_i, 0))\ Q^T.$$

Приметимо да A_+ и A_- не зависе од избора спектралне декомпозиције и да је

$$A = A_+ + A_-, \qquad A_+ A_- = A_- A_+ = 0.$$

Теорема 3.10 [9] За W-норму важи

$$P_S(A) = W^{-\frac{1}{2}}((W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}})_+) W^{-\frac{1}{2}} \tag{3.12}$$

Даље,

$$diag(P_S(A)) \geq diag(A).$$

Доказ. Треба да покажемо да овако дефинисана пројекција X задовољава услов $A - X \in \partial S(X)$, то јест да, на основу Леме 3.5,

$$A - X \leq 0, \qquad trace((A - X)WXW) = 0.$$

Сада је

$$\begin{aligned} A - X &= W^{-\frac{1}{2}}(W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}} - (W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}})_+) W^{-\frac{1}{2}} \\ &= W^{-\frac{1}{2}}(W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}})_- W^{-\frac{1}{2}} \leq 0 \end{aligned}$$

и онда

$$\begin{aligned} (A - X)WXW &= W^{-\frac{1}{2}}(W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}})_- W^{-\frac{1}{2}} . W^{\frac{1}{2}}((W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}})_+) W^{\frac{1}{2}} \\ &= W^{-\frac{1}{2}}(W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}})_- (W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}})_+ W^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

На крају имамо

$$(W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}})_+ - W^{\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

Множење пре и после матрицом $W^{-\frac{1}{2}}$ образује трансформацију конгруенције и тако очувава неједнакост, а узимањем дијагоналних делова добијамо резултат, пошто је дијагонала позитивно семидефинитне матрице ненегативна.

□

3.2.2 Метода алтернирајућих пројекција

Да бисмо нашли најближу матрицу у пресеку скупова S и U можемо итеративно вршити пројекције понављањем операције

$$A \leftarrow P_U(P_S(A)).$$

Идеја да се итеративно пројектује на потпросторе била је анализирана у Хилбертовом простору и доказана је конвергенција ка тачки у пресеку најближој почетној тачки. Наши скупови нису потпростори, тако да је тај резултат овде непримењив. Када потпросторе заменимо затвореним конвексним скуповима, итерација може конвергирати ка неоптималној тачки. Зато користимо модификовану итерацију, која обухвата разумно одабрану корекцију сваке пројекције која се може интерпретирати као нормални вектор за одговарајући конвексни скуп. Приметимо да, иако скуп U није потпростор, он је транслација потпростора и за транслацију потпростора одговарајућа корекција у општем алгоритму може да се изостави [9].

Сада се ограничавамо на W-норму, иако следећи алгоритам може такође да буде употребљен и за H-норму, ако имамо ефикасан начин да израчунамо пројекцију P_S за ову норму.

Алгоритам 3.11 [9] За дату симетричну матрицу $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, овај алгоритам израчунава најближу матрицу корелације матрице A по W-норми.

$\Delta S_0 = 0$, $Y_0 = A$

for $k = 1, 2, \ldots$

$R_k = Y_{k-1} - \Delta S_{k-1}$ % ΔS_{k-1} је корекција

$X_k = P_S(R_k)$

$\Delta S_k = X_k - R_k$

$Y_k = P_U(X_k)$

end

Општи резултати показују да и X_k и Y_k конвергирају ка жељеној матрици корелације када $k \to \infty$. Конвергенција алгоритма је линеарна када су скупови потпростори, са константом која зависи од угла између потпростора, тако да можемо да очекујемо највише линеарну конвергенцију Алгоритма 3.11 [9].

Следећи резултат даје поглед на понашање Алгоритма 3.11 за дијагоналну матрицу W.

Теорема 3.12 [9] Претпоставимо да матрица $A = A^T$ има дијагоналне елементе $a_{ii} \geq 1$ и нека је матрица W дијагонална. Нека је $Y_k = P_U(X_k) = X_k + D_k$, где је матрица D_k дијагонална (у смислу Теореме 3.9). Тада у алгоритму 3.12 важи

$$R_k = A + \Delta_k, \tag{3.13}$$

где је дијагонална матрица

$$\Delta_k = \sum_{k=1}^{k-1} D_k$$

негативно семидефинитна.

Доказ. Имамо $R_1 = A$ и

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= Y_k - \Delta S_k = P_U(X_k) - \Delta S_k \\ &= X_k + D_k - (X_k - R_k) = R_k + D_k, \end{aligned}$$

тако да је (3.13) доказано. Даље,

$$\begin{aligned} E = diag(Y_k) &= diag(X_k + D_k) \\ &= diag(P_S(R_k) + D_k) \\ &\geq diag(R_k + D_k) \\ &= diag(A + \Delta_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\ge E + \Delta_{k+1},$$

тако да је $\Delta_{k+1} \le 0$, као што смо и тражили. □

Теорема 3.12 показује да је матрица R_k једнака матрици A умањеној за позитивну семидефинитну дијагоналну картицу. Ово је важна импликација за случај када је матрица A „веома непозитивно дефинитна“, или, специјално, веома ниског ранга.

Последица 3.13 [9] Нека матрица $A = A^T$ има дијагоналне елементе $a_{ii} \ge 1$ и t непозитивних карактеристичних вредности и нека је матрица W дијагонална. Тада у Алгоритму 3.11 матрица R_k има бар t непозитивних карактеристичних вредности, а матрица X_k има бар t нула карактеристичних вредности, за свако k.

Приметимо да ако пустимо да $k \to \infty$ у Последици 3.13, онда се враћамо на други део Теореме 3.8.

Практични значај последице је да ако је t велико, онда можемо да израчунамо пројекцију $P_S(R_k)$ знатно јефтиније, него да смо рачунали комплетан карактеристични систем матрице $W^{\frac{1}{2}} R_k W^{\frac{1}{2}}$ (подсетимо се (3.12)). Довољно је израчунати највећих $n - t \ll n$ карактеристичних вредности λ_j и одговарајућих ортонормалних карактеристичних вектора q_j матрице $W^{\frac{1}{2}} R_k W^{\frac{1}{2}}$ и онда да у (3.12) узмемо

$$(W^{\frac{1}{2}} R_k W^{\frac{1}{2}})_+ = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i q_i q_i^T .$$

Ако матрица A има мало непозитивних карактеристичних вредности ($t \ll n$), онда је вероватно да ће и матрица R_k такође имати мало непозитивних карактеристичних вредности, иако нам горња граница за овај број није доступна. Ипак, сличне рачунске уштеде су могуће у овој ситуацији рачунањем

$$(W^{\frac{1}{2}} R_k W^{\frac{1}{2}})_+ = W^{\frac{1}{2}} R_k W^{\frac{1}{2}} - (\sum_{\lambda_i \le 0} \lambda_i q_i q_i^T),$$

где се број непозитивних карактеристичних вредности матрице $W^{\frac{1}{2}} R_k W^{\frac{1}{2}}$ процењује од корака до корака, а процена се повећава ако се деси да је тај број сувише мали [9].

У нумеричким експериментима конвергенција Алгоритма 3.11 тестирана је на крају *for* петље, користећи услов

$$\max\left\{\frac{\|X_k - X_{k-1}\|_\infty}{\|X_k\|_\infty}, \frac{\|Y_k - Y_{k-1}\|_\infty}{\|Y_k\|_\infty}, \frac{\|Y_k - X_k\|_\infty}{\|Y_k\|_\infty}\right\} \le tol\,, \tag{3.14}$$

где је *tol* толеранција. Ове три величине у овом тесту су обично истог реда величине, тако да у пракси било која од њих може да се користи у тесту конвергенције.

4 Нумерички резултати

У овом поглављу нумеричким резултатима илустроваћемо поступке разматране у претходним поглављима. Моделираћемо процедуру селекције оптималног портфолија, посматраћемо ефекте увођења пертурбација очекиваног приноса добара у портфолију и применићемо стабилизациони алгоритам у нади да ћемо побољшати перформансе модела и ублажити ефекте пертурбација.

Наш циљ је конструкција оптималног портфолија састављеног од n инвестиција D_i, $i=1,\dots,n$. Карактеристике инвестиција које су од интереса за наш модел су очекивани приноси, $\overline{r}_i$, $i=1,\dots,n$, варијансе σ_i^2, $i=1,\dots,n$ и коваријансе σ_{ij}, $i,j=1,\dots,n$. Ове параметре оценићемо на основу историјских перформанси инвестиција, у нашем случају 6 европских индекса. Подаци о историјским вредностима индекса преузети су са сајтова http://uk.finance.yahoo.com/m6.php и http://finance.yahoo.com/intlindices?e=europe.

Инвестирамо у $n=6$ Еуро-индекса приказаних у табели 4.1.

Инвестиција	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
Назив индекса	**ATX**	**BEL-20**	**CAC 40**	**DAX**	**Madrid General**	**FTSE MIB**
Ознака	ATX	BFX	FCHI	GDAXI	SMSI	FTSEMIB.MI
Држава	Аустрија	Белгија	Француска	Немачка	Шпанија	Италија

Табела 4.1 Еуро-индекси у саставу портфолија

Посматране су цене на затварању током периода од 02.01.2009. до 28.12.2009. године у недељним интервалима. Од укупно 52 опсервације формирамо векторе вредности индекса и рачунамо стопе приноса по формули

$$r=\frac{X_1-X_0}{X_0},$$

где су X_0 и X_1 вредности индекса на почетку и крају недељног периода, респективно.

Очекиване стопе приноса рачунамо емпиријски, уз претпоставку да су све реализације једнако вероватне (у нашем примеру је $n=6$ и $m=52$):

$$\overline{r_i} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\ ,\ i = 1,\ldots,n\,.$$

Добијене нумеричке вредности очекивања дате су у табели 4.2.

ATX	BFX	FCHI	GDAXI	SMSI	FTSEMIB.MI
$\overline{r_1}$	$\overline{r_2}$	$\overline{r_3}$	$\overline{r_4}$	$\overline{r_5}$	$\overline{r_6}$
0.0074	0.0052	0.0038	0.0042	0.0047	0.0042

Табела 4.2 Очекивани приноси Еуро-индекса

Варијансе/коваријансе приноса рачунамо применом формуле

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(r_{ij} - \overline{r_i})(r_{kj} - \overline{r_k})\ ,\ i,k = 1,\ldots,n$$

Матрица коваријансе $\Sigma = [\sigma_{ik}]_{i,k}$ Еуро-индекса приказана је у табели 4.3.

	ATX	BFX	FCHI	GDAXI	SMSI	FTSEMIB.MI
ATX	0.0026	0.0015	0.0016	0.0015	0.0015	0.0021
BFX	0.0015	0.0014	0.0012	0.0012	0.0011	0.0016
FCHI	0.0016	0.0012	0.0014	0.0014	0.0012	0.0016
GDAXI	0.0015	0.0012	0.0014	0.0015	0.0012	0.0016
SMSI	0.0015	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0016
FTSEMIB.MI	0.0021	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0024

Табела 4.3 Коваријансе Еуро-индекса

Тежине оптималног портфолија састављеног од добара са овим вредностима очекиваног приноса и коваријанси нумерички израчунавамо применом MATLAB-ове функције *quadprog*.

Одвојено ћемо посматрати четири формулације Марковицовог модела: оптимални портфолио са и без кратке продаје и са и без фиксираног очекиваног приноса.

У модел затим уводимо пертурбације очекиваног приноса дате са $\tilde{r} = \overline{r} + \varepsilon$, где је $\varepsilon : \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ и посматрамо њихове ефекте на наш модел оптималног портфолија. Посматраћемо пертурбације са стандардним одступањима $\sigma = 0.005$ и $\sigma = 0.01$. Вредности случајног вектора ε генеришу се као случајне вредности нормалне расподеле помоћу MATLAB-ове функције *normrnd*. При томе узимамо 1000 симулација вектора ε. Као што смо видели, пертурбације мењају и матрицу коваријансе, па за новодобијену матрицу коваријансе $\tilde{\Sigma}$ важи $\tilde{\Sigma} = \Sigma + \varepsilon\varepsilon^T$.

Применом функције *cov2corr* MATLAB програмског окружења, добијену пертурбовану матрицу коваријансе трансформишено у матрицу корелације. Затим примењујемо имплементацију Алгоритма 3.11 за одређивање најближе матрице корелације. У алгоритму користимо тежинску W - норму, а матрицу за W узимамо јединичну матрицу реда $n=6$. За излазни критеријум користимо услов (3.14), при чему за толеранцију узимамо вредност $tol=10^{-8}$. Затим посматрамо како је примена алгоритма утицала на ефекат пертурбација приноса на тежинске коефицијенте Марковицовог оптималног портфолија.

Векторе решења оригиналног проблема оптимизације портфолија ћемо означити са w^*, а са $\tilde{w}^*$ векторе решења пертурбованог проблема. Решења проблема оптимизације портфолија после примене Алгоритма 3.11 на узорачку матрицу корелације пертурбованог проблема означићемо са $\hat{w}^*$.

4.1 Тестирање алгоритма за одређивање најближе матрице корелације

Пре него што приступимо оптимизацији портфолија, на примеру случајно генерисане матрице корелације тестираћемо Алгоритам 3.11 за одређивање најближе матрице корелације. Алгоритам је имплементиран у програмском језику MATLAB. Случајно генерисану матрицу корелације C добијамо применом MATLAB-ове функције *gallery('randcorr',...),* која генерише матрицу корелације чије су карактеристичне вредности случајни бројеви униформне расподеле. Радићемо са матрицом димензије 500x500. Затим симулирамо ситуацију у којој је ова матрица корелације покварена релативно великим грешкама. То постижемо додавањем матрице F матрици C, где је матрица F случајно генерисана симетрична матрица Фробенијусове норме 10^{-4}. За излазни критеријум користимо услов (3.14), при чему за толеранцију узимамо вредност $tol=10^{-8}$. Матрицу W која одређује тежинску Фробенијусову норму дефинишемо као јединичну матрицу реда 500. Матрицу $A=C+F$ узимамо за нашу узорачку матрицу корелације на коју примењујемо Алгоритам 3.11. Алгоритам конвергира после 4 итерације. За добијену матрицу корелације X добијамо:

$$\|A-X\|_F = 6.1207 \cdot 10^{-6}.$$

4.2 Оптимални портфолио са кратком продајом

У овом одељку посматраћемо поново следећи оптимизациони проблем:

$$\min \frac{1}{2} w^T \Sigma w$$
$$\text{s.t. } e^T w = 1$$

У табелама 4.4 и 4.5 приказани су резултати примене оптимизације портфолија на полазни и пертурбовани проблем са стандардним одступањима пертурбација $\sigma = 0.005$ и $\sigma = 0.01$.

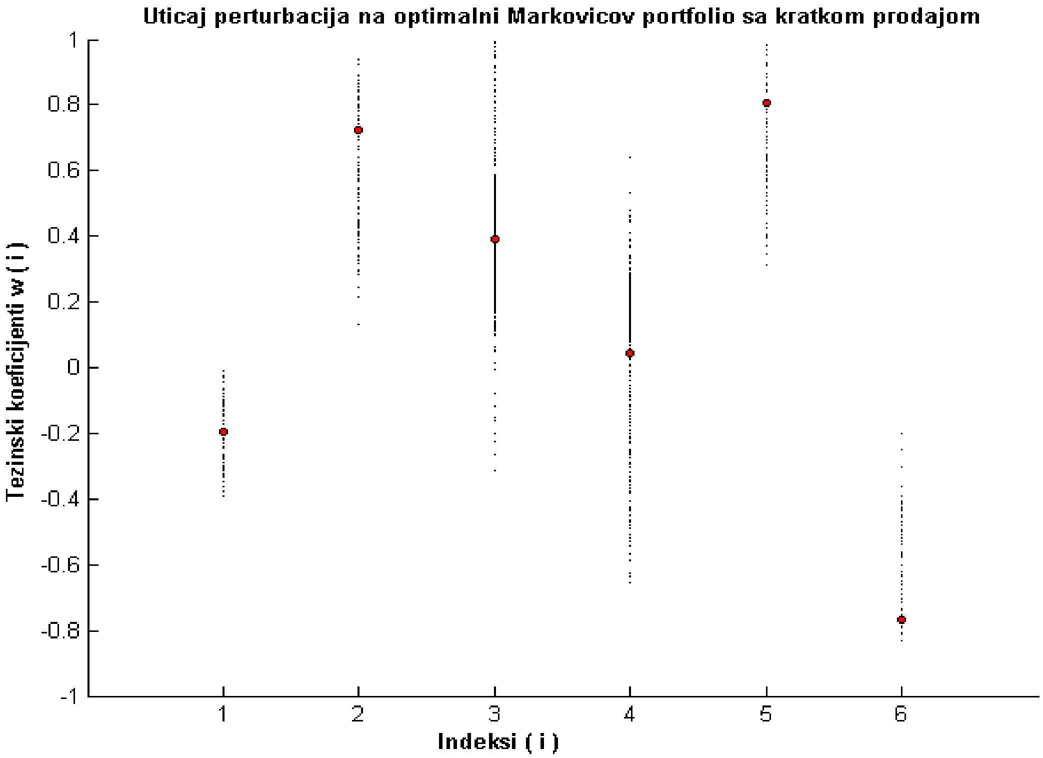
$\sigma = 0.005$				
i	Индекс	w^*	$\min(\tilde{w}^*)$	$\max(\tilde{w}^*)$
1	**ATX**	-0.1950	-0.3916	-0.0091
2	**BFX**	0.7233	0.1305	0.9381
3	**FCHI**	0.3921	-0.3139	1.4662
4	**GDAXI**	0.0418	-0.6553	0.6423
5	**SMSI**	0.8047	0.3127	1.0980
6	**FTSEMIB.MI**	-0.7669	-0.8301	-0.2028

Табела 4.4 Тежински коефицијенти оптималног портфолија непертурбованог проблема и интервали тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема са стандардним одступањем $\sigma = 0.005$.

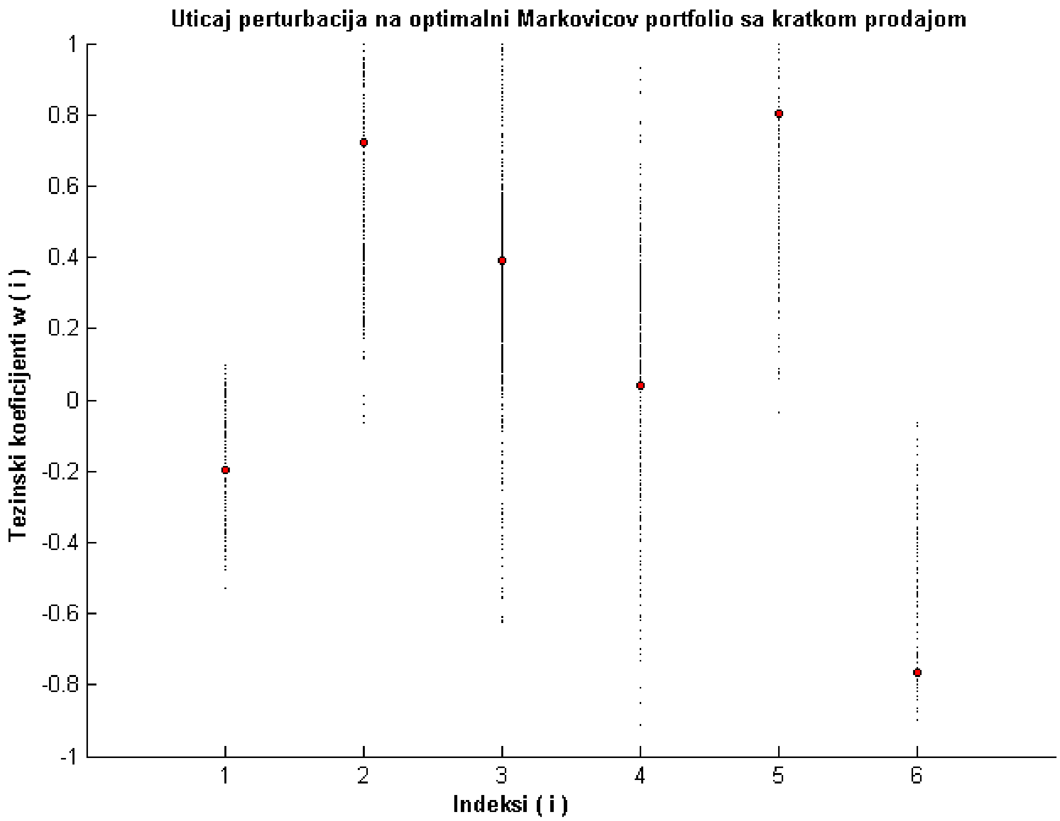
$\sigma = 0.01$				
i	Индекс	w^*	$\min(\tilde{w}^*)$	$\max(\tilde{w}^*)$
1	**ATX**	-0.1950	-0.5274	0.0981
2	**BFX**	0.7233	-0.0635	1.0816
3	**FCHI**	0.3921	-0.6246	1.8391
4	**GDAXI**	0.0418	-0.9108	0.9305
5	**SMSI**	0.8047	-0.0354	1.2714
6	**FTSEMIB.MI**	-0.7669	-0.8974	-0.0663

Табела 4.5 Тежински коефицијенти оптималног портфолија непертурбованог проблема и интервали тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема са стандардним одступањем $\sigma = 0.01$.

На сликама 4.1 и 4.2 дат је графички приказ распона тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог и непертурбованог проблема.



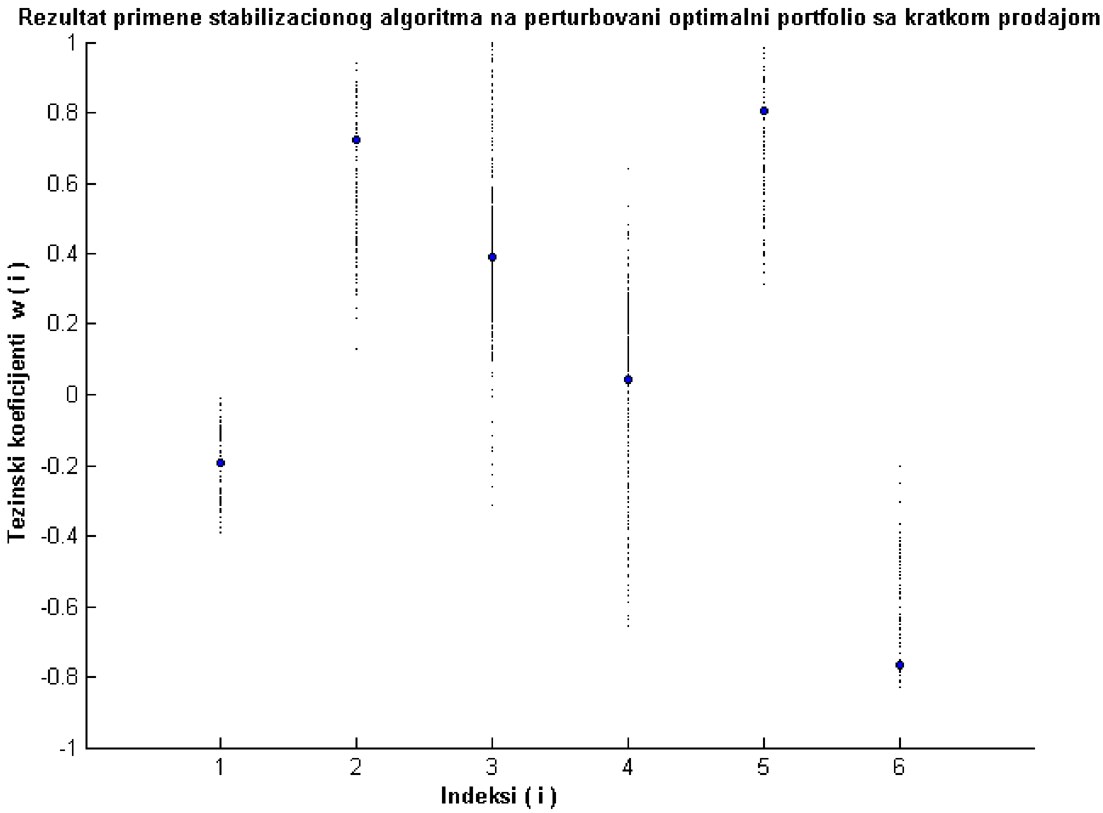
Слика 4.1 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (црвени кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.005$.



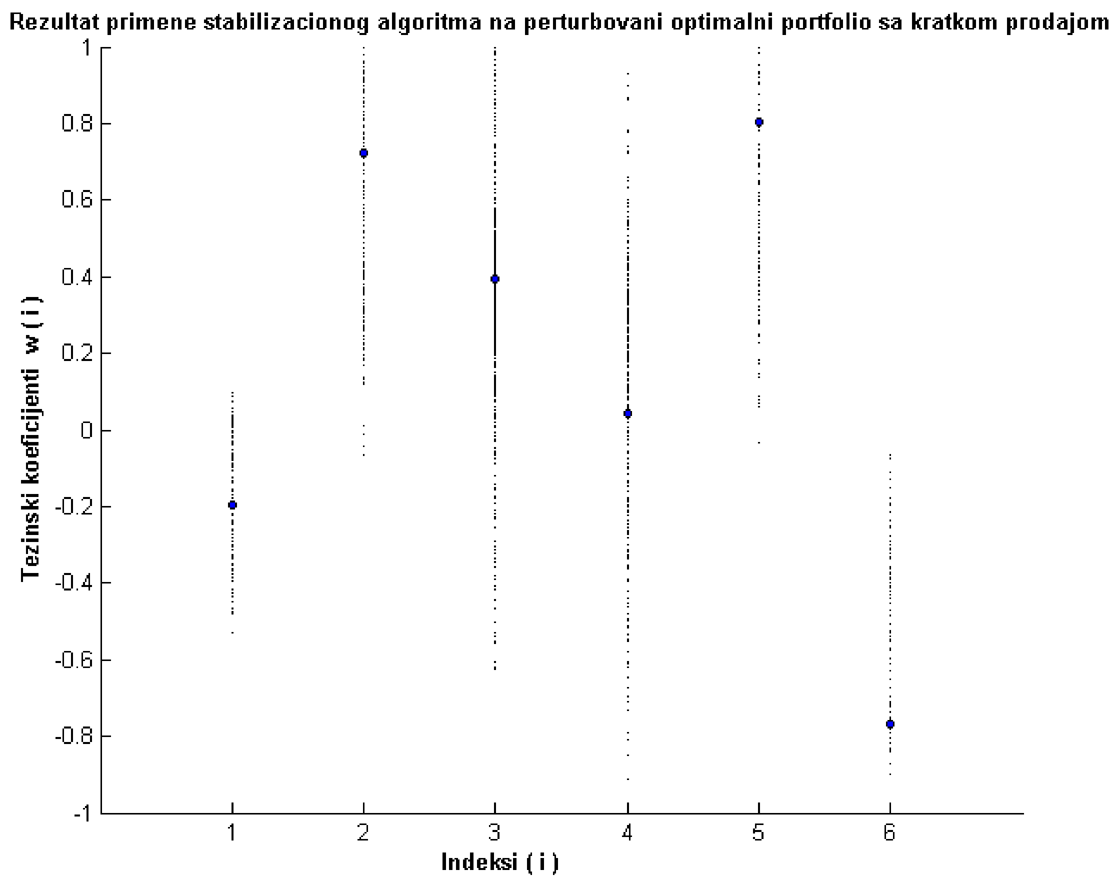
Слика 4.2 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (црвени кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.01$.

Сада ћемо применити Алгоритам 3.11 на пертурбовани проблем оптимизације портфолија и посматраћемо како се мењају тежински коефицијенти портфолија.

Алгоритам 3.11 конвергира у 3 итерације. Минималне и максималне вредности коефицијената $\hat{w}^*$ идентичне су минималним и максималним вредностима коефицијената $\tilde{w}^*$ приказаним у табелама 4.4 и 4.5. На сликама 4.3 и 4.4 дати су графички прикази распона тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема после примене Алгоритма 3.11 на матрицу корелације проблема. Из резултата се види да се применом стабилизационог алгоритма тежински коефицијенти оптималних портфолија нису променили.



Слика 4.3 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (плави кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.005$ после примене Алгоритма 3.11.



Слика 4.4 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (плави кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.01$ после примене Алгоритма 3.11.

4.3 Оптимални портфолио без кратке продаје

Сада посматрамо следећи оптимизациони проблем:

$$\begin{gathered} \min \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\ \text{s.t. } e^T w = 1 \\ w \geq 0. \end{gathered}$$

Скупу ограничења додали смо и ограничење типа неједнакости које осигурава ненегативност тежинских коефицијената оптималног портфолија у условима када кратка продаја није дозвољена.

У табелама 4.6 и 4.7 приказани су резултати примене оптимизације портфолија на полазни и пертурбовани проблем са стандардним одступањима пертурбација $\sigma = 0.005$ и $\sigma = 0.01$.

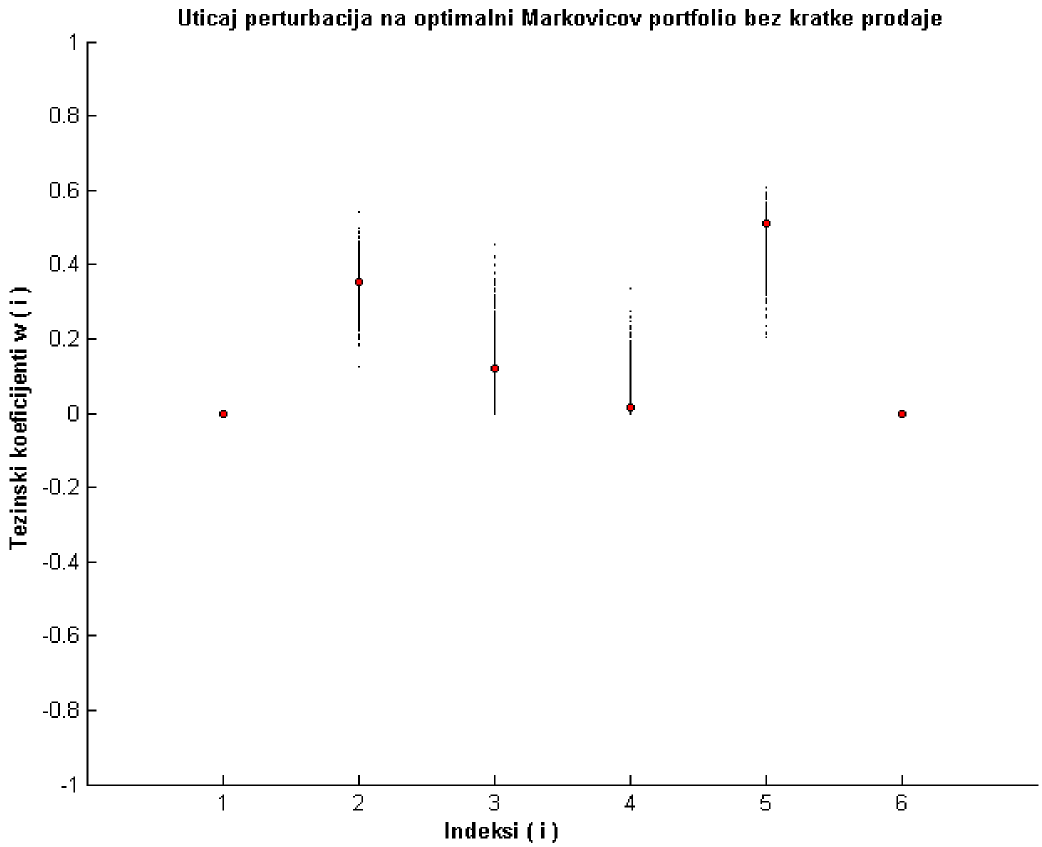
$\sigma = 0.005$				
i	Индекс	w^*	$\min(\tilde{w}^*)$	$\max(\tilde{w}^*)$
1	**ATX**	-0.0000	-0.0000	0.0000
2	**BFX**	0.3518	0.1238	0.5414
3	**FCHI**	0.1206	-0.0000	0.4543
4	**GDAXI**	0.0169	-0.0000	0.3367
5	**SMSI**	0.5107	0.2048	0.6053
6	**FTSEMIB.MI**	0.0000	-0.0000	0.0000

Табела 4.6 Тежински коефицијенти оптималног портфолија непертурбованог проблема и интервали тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема са стандардним одступањем $\sigma = 0.005$.

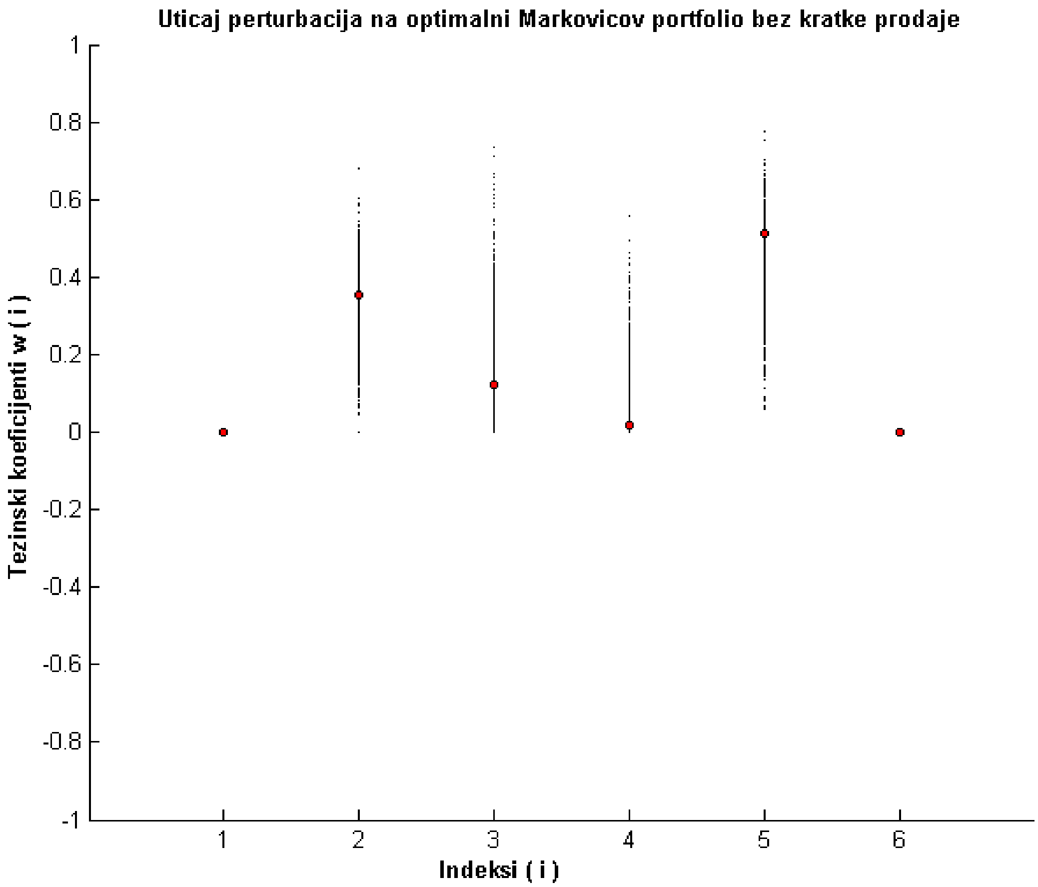
$\sigma = 0.01$				
i	Индекс	w^*	$\min(\tilde{w}^*)$	$\max(\tilde{w}^*)$
1	**ATX**	-0.0000	-0.0000	0.0000
2	**BFX**	0.3518	0.0000	0.6788
3	**FCHI**	0.1206	-0.0000	0.7335
4	**GDAXI**	0.0169	-0.0000	0.5579
5	**SMSI**	0.5107	0.0587	0.7743
6	**FTSEMIB.MI**	0.0000	-0.0000	0.0000

Табела 4.7 Тежински коефицијенти оптималног портфолија непертурбованог проблема и интервали тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема са стандардним одступањем $\sigma = 0.01$.

На сликама 4.5 и 4.6 дат је графички приказ распона тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог и непертурбованог проблема.



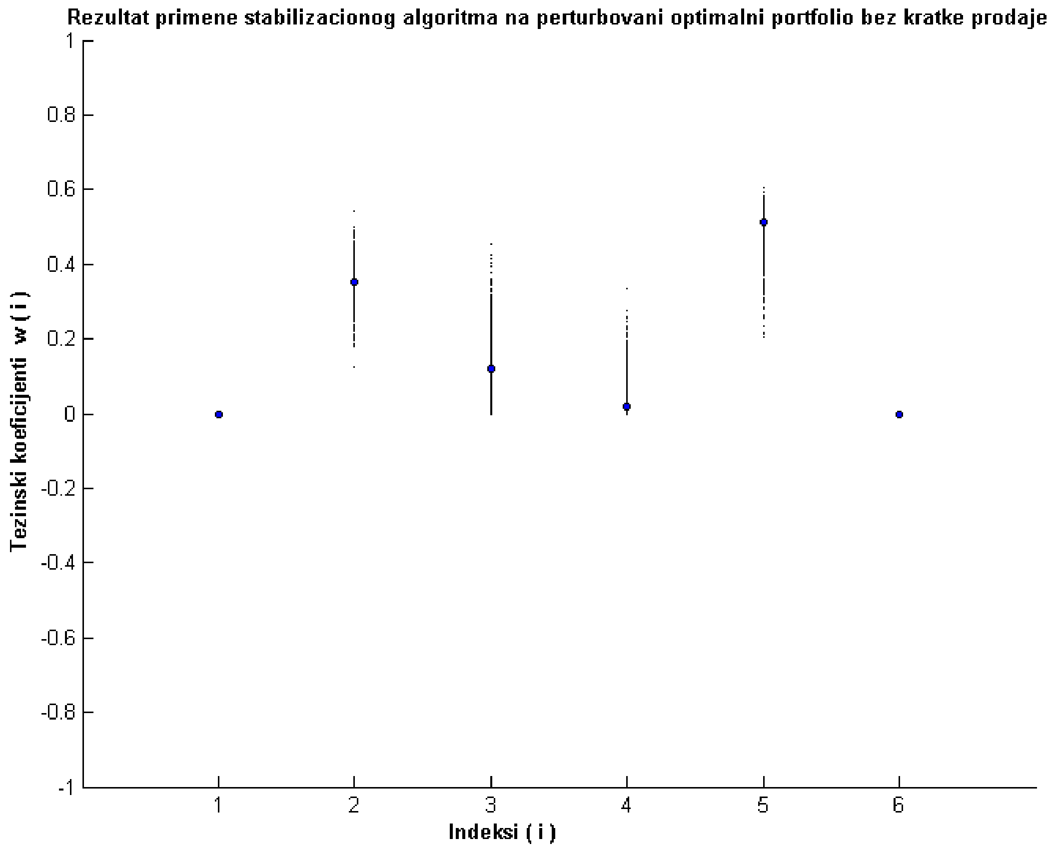
Слика 4.5 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (црвени кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.005$.



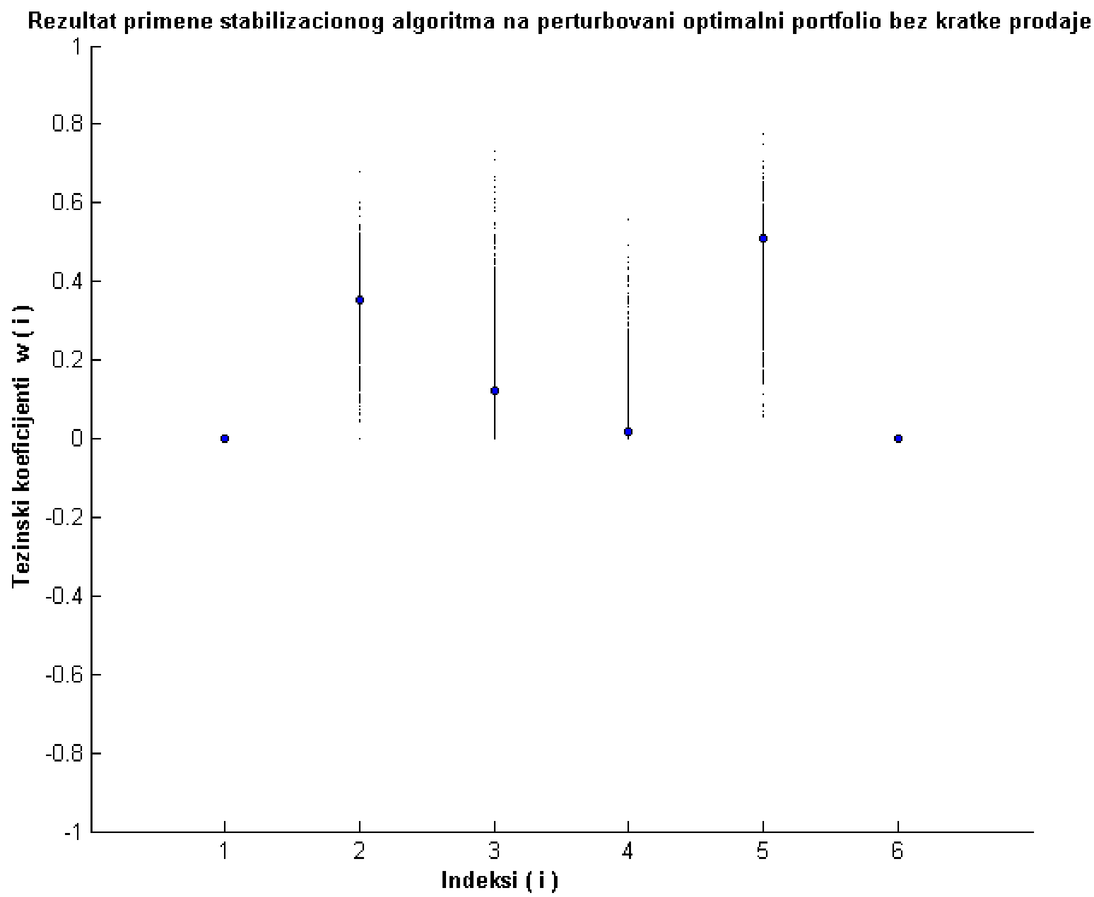
Слика 4.6 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (црвени кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.01$.

Поново ћемо применити Алгоритам 3.11 на пертурбовани проблем оптимизације портфолија и посматраћемо како се мењају тежински коефицијенти портфолија.

Алгоритам 3.11 конвергира у 3 итерације. Поново имамо ситуацију да се минималне и максималне вредности коефицијената $\hat{w}^*$ поклапају са минималним и максималним вредностима коефицијената $\tilde{w}^*$ приказаним у табелама 4.6 и 4.7. На сликама 4.7 и 4.8 видимо графичке приказе распона тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема после примене Алгоритма 3.11 на матрицу корелације проблема. Из резултата се види да се након примене стабилизационог алгоритма тежински коефицијенти оптималних портфолија нису променили.



Слика 4.7 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (плави кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.005$ после примене Алгоритма 3.11.



Слика 4.8 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (плави кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.01$ после примене Алгоритма 3.11.

4.4 Оптимални портфолио са кратком продајом и фиксираним очекиваним приносом

Овај одељак посвећен је проблему оптимизације портфолија са додатним ограничењем типа једнакости које гарантује да резултујући портфолио има унапред задати очекивани принос ρ:

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\
&\text{s.t. } e^T w = 1 \\
&\bar{r}^T w = \rho .
\end{aligned}
$$

За фиксирани принос ρ узимамо средњу вредност компонената вектора очекиваних приноса $\bar{r}$. Конкретна вредност употребљена у израчунавањима је $\rho = 0.0049$.

Табеле 4.8 и 4.9 приказују су резултати примене оптимизације портфолија на полазни и пертурбовани проблем са стандардним одступањима пертурбације $\sigma = 0.005$ и $\sigma = 0.01$.

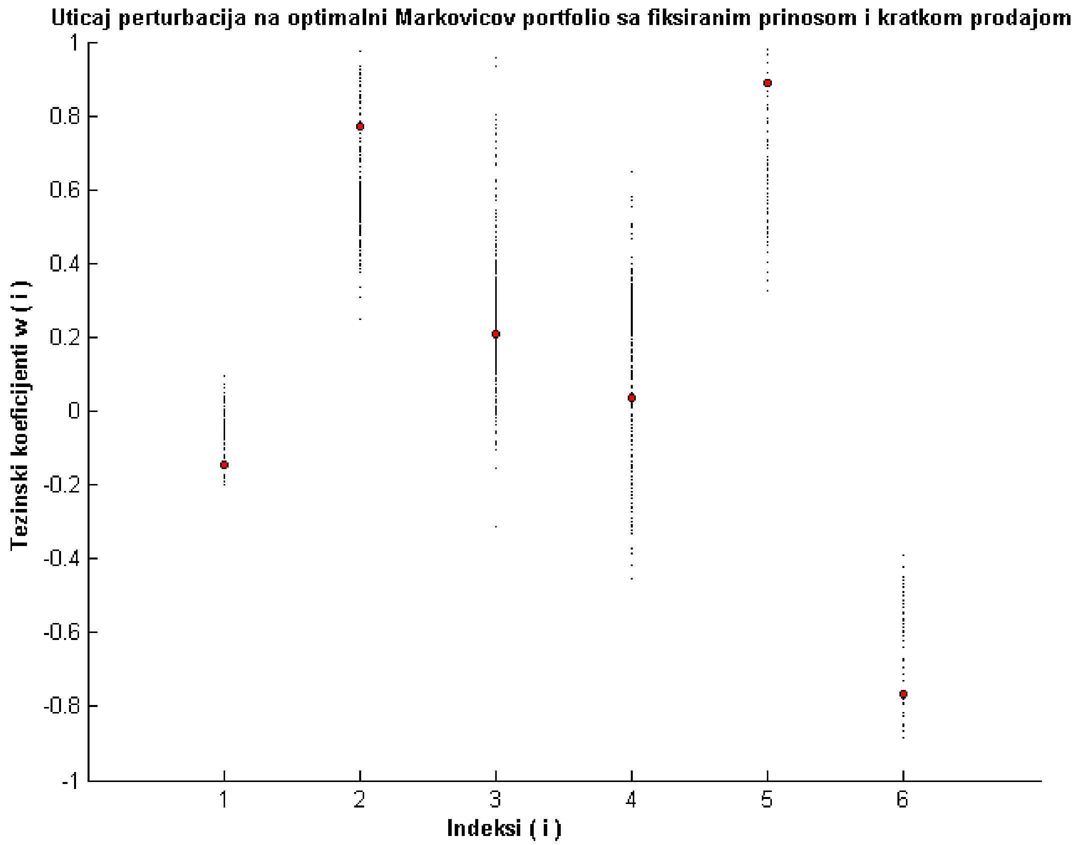
$\sigma = 0.005$				
i	Индекс	w^*	$\min(\tilde{w}^*)$	$\max(\tilde{w}^*)$
1	**ATX**	-0.1443	-0.1979	0.0946
2	**BFX**	0.7716	0.2517	0.9729
3	**FCHI**	0.2107	-0.3133	0.9588
4	**GDAXI**	0.0367	-0.4516	0.6498
5	**SMSI**	0.8909	0.3260	1.1324
6	**FTSEMIB.MI**	-0.7657	-0.8836	-0.3881

Табела 4.8 Тежински коефицијенти оптималног портфолија непертурбованог проблема и интервали тежинских коефицјенаата оптималних портфолија пертурбованог проблема са стандардним одступањем $\sigma = 0.005$.

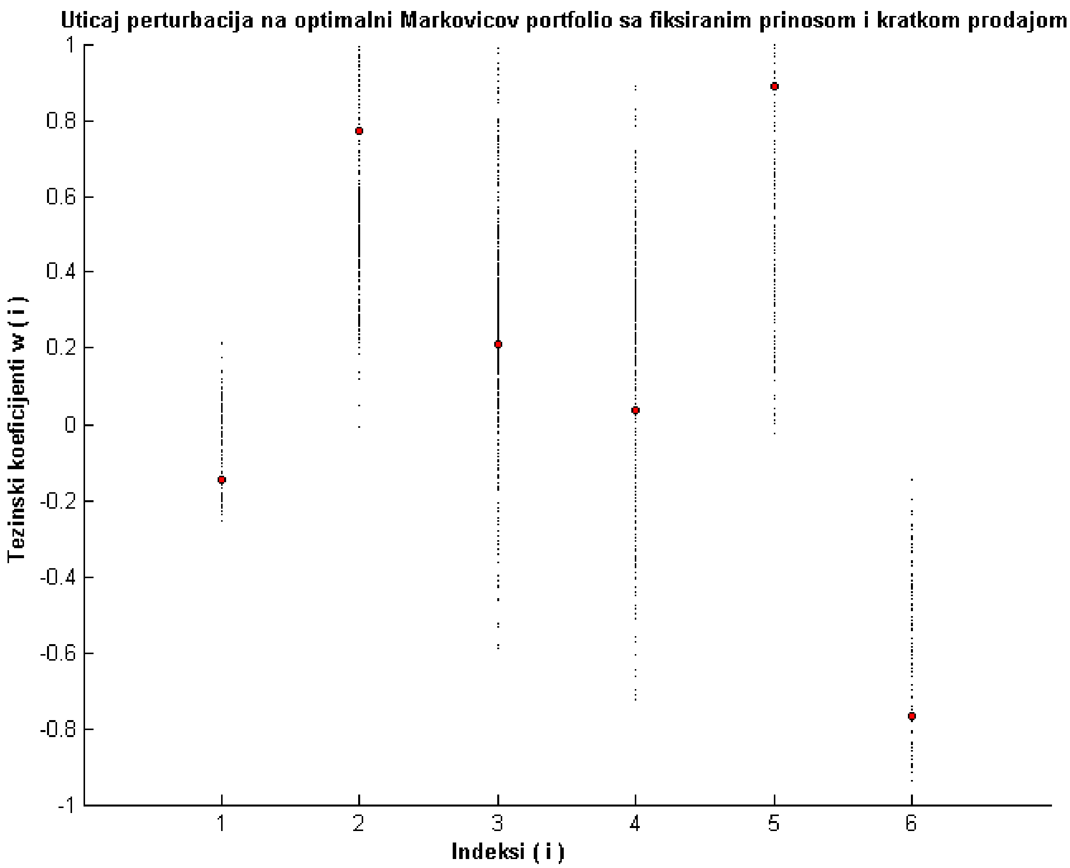
$\sigma = 0.01$				
i	Индекс	w^*	$\min(\tilde{w}^*)$	$\max(\tilde{w}^*)$
1	**ATX**	-0.1443	-0.2564	0.2153
2	**BFX**	0.7716	-0.0058	1.0896
3	**FCHI**	0.2107	-0.5906	1.2899
4	**GDAXI**	0.0367	-0.7223	0.8903
5	**SMSI**	0.8909	-0.0220	1.3344
6	**FTSEMIB.MI**	-0.7657	-0.9359	-0.1435

Табела 4.9 Тежински коефицијенти оптималног портфолија непертурбованог проблема и интервали тежинских коефицјенаата оптималних портфолија пертурбованог проблема са стандардним одступањем $\sigma = 0.01$.

На сликама 4.9 и 4.10 дат је графички приказ распона тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог и непертурбованог проблема.



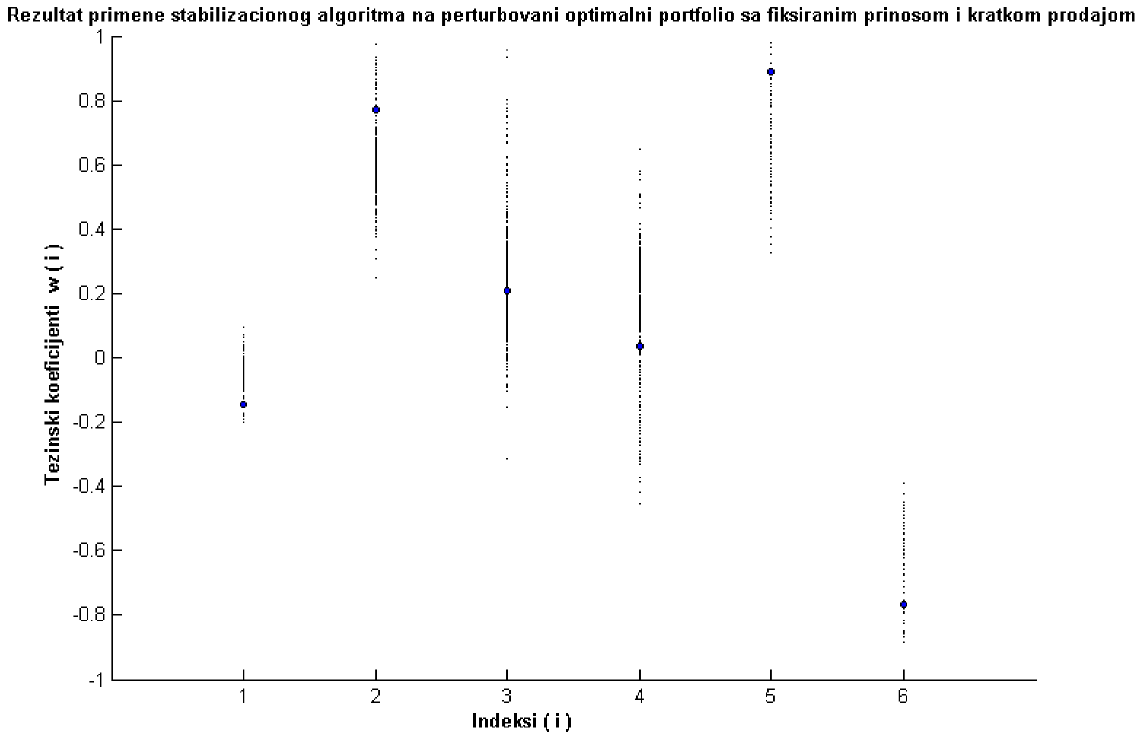
Слика 4.9 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (црвени кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.005$.



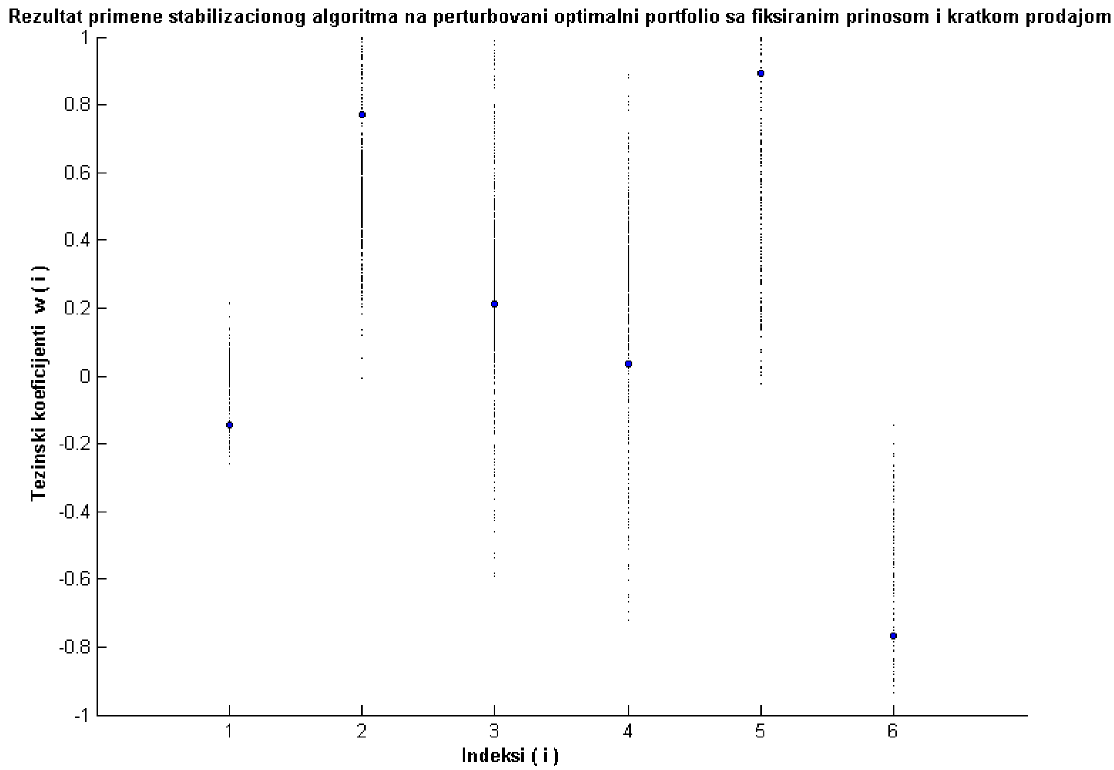
Слика 4.10 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (црвени кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.01$.

Поново ћемо применити Алгоритам 3.11 на пертурбовани проблем оптимизације портфолија и посматраћемо како се мењају тежински коефицијенти портфолија.

Алгоритам 3.11 конвергира у 3 итерације, као и у претходним случајевима. На сликама 4.11 и 4.12 представљени су графички прикази распона тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема после примене Алгоритма 3.11 на матрицу корелације проблема. Још једном се понавља ситуација да се минималне и максималне вредности коефицијената $\hat{w}*$ поклапају са минималним и максималним вредностима коефицијената $\tilde{w}*$ приказаним у табелама 4.8 и 4.9 и да се након примене стабилизационог алгоритма тежински коефицијенти не мењају.



Слика 4.11 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (плави кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.005$ после примене Алгоритма 3.11.



Слика 4.12 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (плави кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.01$ после примене Алгоритма 3.11.

4.5 Оптимални портфолио без кратке продаје са фиксираним очекиваним приносом

У овом делу решаваћемо проблем оптимизације портфолија са унапред задатим очекивани приносом ρ и ограничењем ненегативности за тежинске коефицијенте за случајеве када није дозвољена кратка продаја:

$$
\begin{gathered}
\min \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\
\text{s.t. } e^T w = 1 \\
\bar{r}^T w = \rho \\
w \geq 0.
\end{gathered}
$$

Поново за вредност фиксираног очекиваног приноса узимамо $\rho = 0.0049$, као у претходном одељку.

У табелама 4.10 и 4.11 приказани су резултати примене оптимизације портфолија на полазни и пертурбовани проблем са стандардним одступањима пертурбације $\sigma = 0.005$ и $\sigma = 0.01$.

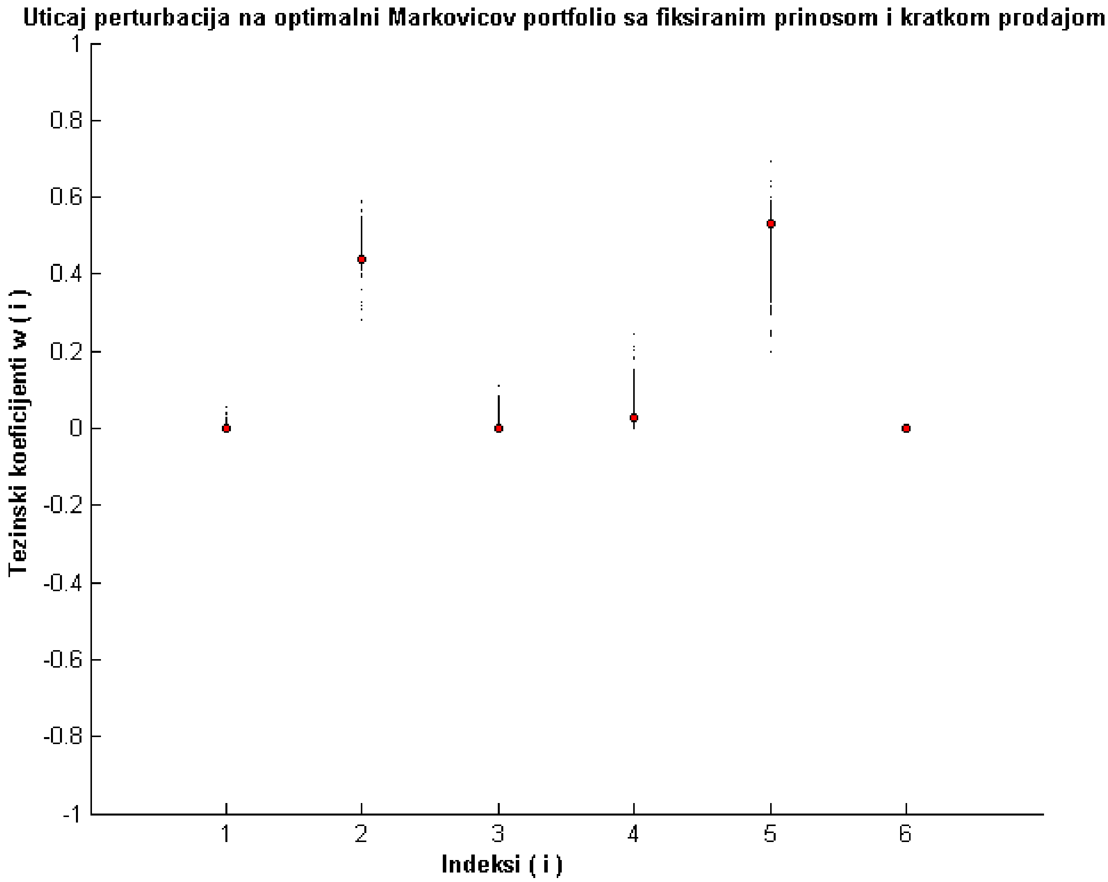
$\sigma = 0.005$				
i	Индекс	w^*	$\min(\tilde{w}^*)$	$\max(\tilde{w}^*)$
1	**ATX**	0.0000	-0.0000	0.0571
2	**BFX**	0.4383	0.2815	0.5908
3	**FCHI**	0.0000	-0.0000	0.1096
4	**GDAXI**	0.0295	-0.0000	0.2460
5	**SMSI**	0.5323	0.1984	0.6914
6	**FTSEMIB.MI**	-0.0000	-0.0000	0.0000

Табела 4.10 Тежински коефицијенти оптималног портфолија непертурбованог проблема и интервали тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема са стандардним одступањем $\sigma = 0.005$.

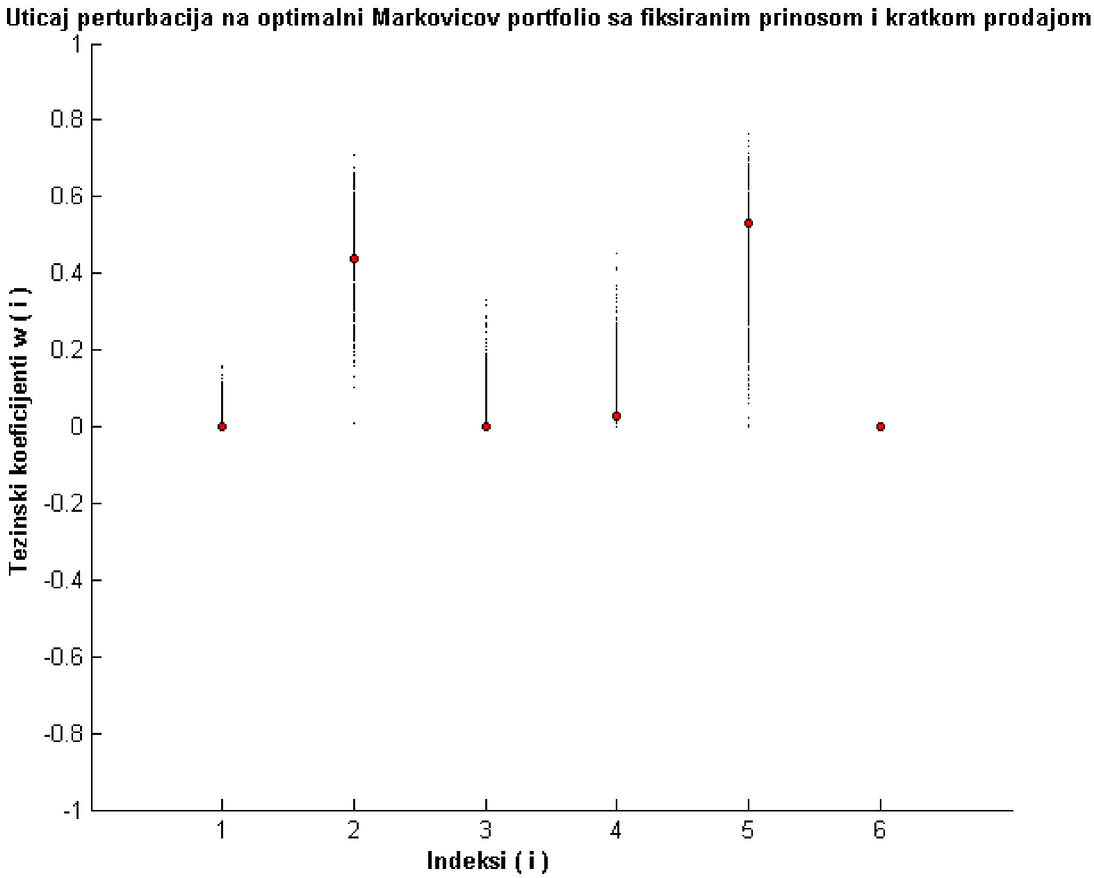
$\sigma = 0.01$				
i	Индекс	w^*	$\min(\tilde{w}^*)$	$\max(\tilde{w}^*)$
1	**ATX**	0.0000	-0.0000	0.1585
2	**BFX**	0.4383	0.0107	0.7072
3	**FCHI**	0.0000	-0.0000	0.3319
4	**GDAXI**	0.0295	-0.0000	0.4541
5	**SMSI**	0.5323	-0.0000	0.7663
6	**FTSEMIB.MI**	-0.0000	-0.0000	0.0000

Табела 4.11 Тежински коефицијенти оптималног портфолија непертурбованог проблема и интервали тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема са стандардним одступањем $\sigma = 0.01$.

На сликама 4.13 и 4.14 дат је графички приказ распона тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог и непертурбованог проблема.

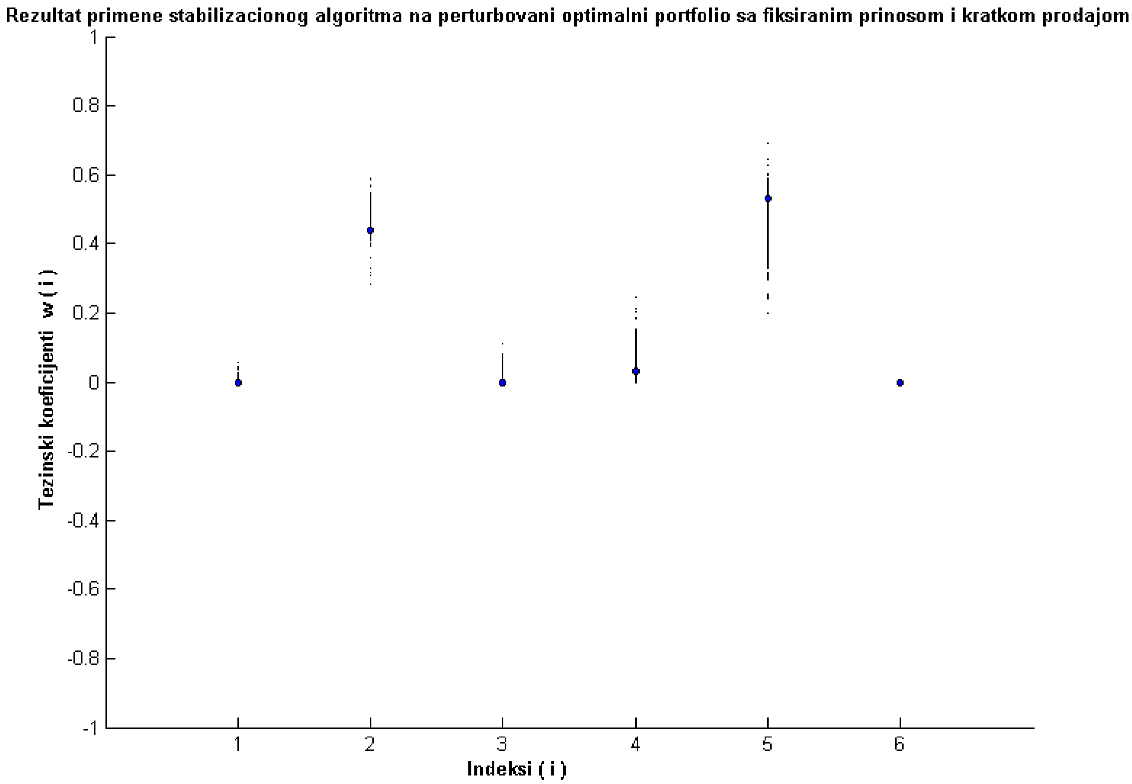


Слика 4.13 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (црвени кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.005$.

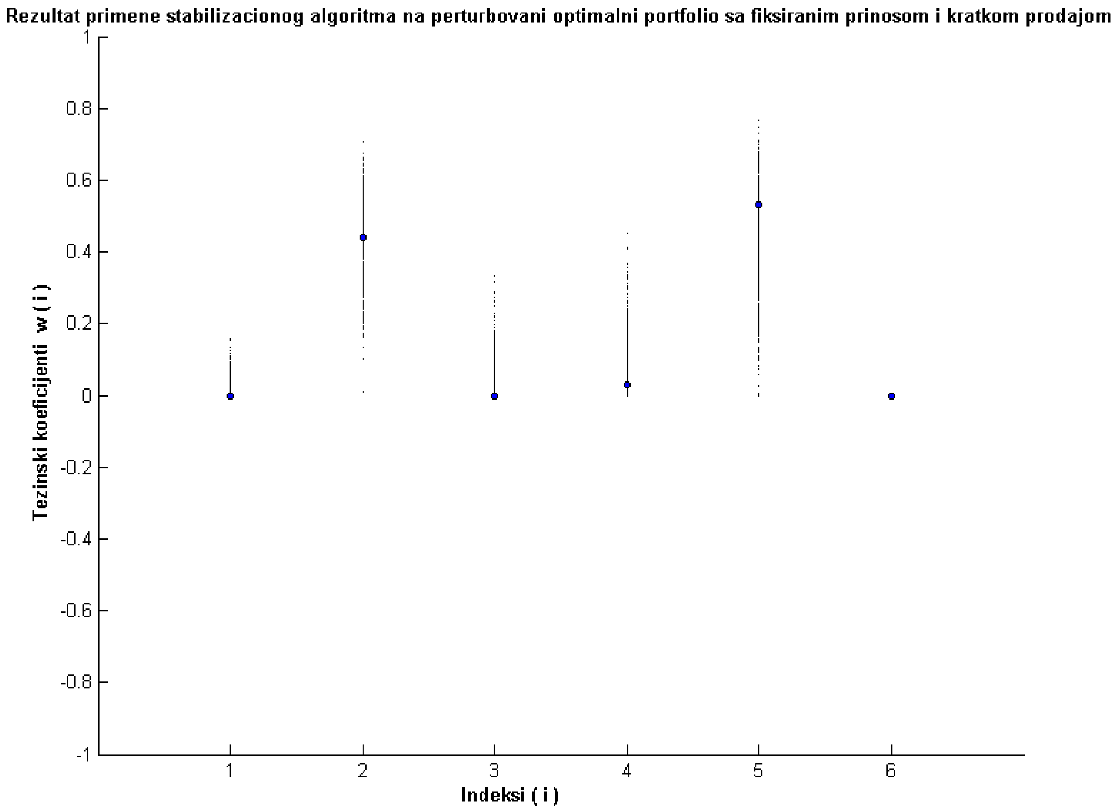


Слика 4.14 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (црвени кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.01$.

Када применимо Алгоритам 3.11 понавља се ситуација из претходних одељака. Алгоритам конвергира у 3 итерације, а минималне и максималне вредности коефицијената $\hat{w}*$ идентичне су минималним и максималним вредностима коефицијената $\tilde{w}*$ приказаним у табелама 4.10 и 4.11. На сликама 4.15 и 4.16 дати су графички прикази распона тежинских коефицијената оптималних портфолија пертурбованог проблема после примене Алгоритма 3.11 на матрицу корелације проблема. И овог пута из резултата можемо видети да се након примене стабилизационог алгоритма тежински коефицијенти оптималних портфолија нису променили.



Слика 4.15 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (плави кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.005$ после примене Алгоритма 3.11.



Слика 4.16 Графички приказ тежинских коефицијената оптималних портфолија непертурбованог (плави кружићи) и пертурбованог проблема (црне тачке) за $\sigma = 0.01$ после примене Алгоритма 3.11.

5 Закључак

Марковицов модел оптимизације портфолија се, упркос свом револуционарном успеху у домену теорије, показао као лоше условљен проблем чија примена у пракси захтева нека побољшања да би резултати били примењиви у реалном инвестирању.

Већ смо истакли да закључивање засновано само на историјским подацима о вредностима добара није добар пут до оптималног портфолија. Оптимизација спроведена искључиво на основу историјских вредности подразумева да смо сигурни да ће понашање добара у будућности потпуно бити описано и добро представљено њиховим прошлим перформансама. Међутим, у пракси такве прогнозе нису добре. За оцењивање параметара потребна је велика количина историјских података, што подразумева праћење понашања хартија од вредности током дугог временског периода у прошлости, а самим тим се смањују шансе да ситуација на тржишту остане непромењена.

У нашим експериментима користили смо управо прошле перформансе Еуро-индекса да бисмо добили оптимални портфолио. Уведеним пертурбацијама моделирали смо мале промене очекиваних приноса добара. Такве мале разлике у оцењеном очекивању приноса могу настати као последица примене различитих оцењивача централне тенденције приноса (просечна вредност, покретни просеци – Simple Moving Average, Exponential Moving Average,…), што је потпуно у складу са Марковицовом политиком немешања у избор оцена параметара модела, пошто су претпоставке за примену модела да већ располажемо довољно добрим оценама.

С обзиром на велике вредности условног броја матрице коваријансе (у односу на еуклидску норму), $\kappa(\Sigma) = 217.5503$, закључујемо да је и наш модел лоше условљен. Нумерички резултати су управо то и портврдили – мале промене очекиваних приноса довеле су до значајних промена у тежинским коефицијентима оптималних портфолија, односно, генерисале су портфолије са драстично промењеним тежинама Еуро-индекса у односу на полазни, непертурбовани проблем.

У одељцима 4.3 и 4.5 можемо приметити једну типичну особину Марковицове оптимизације: укључивањем ограничења ненегативности тежина, што одговара забрани кратке продаје, добијамо портфолио са неколико нула тежина, тачније, неки индекси су потпуно искључени из портфолија. Резултати решавања проблема из Одељка 4.5, који нас у пракси највише и занима, показао је да пертурбације толико мењају оптимални портфолио да неки индекси бивају укључени у њега, иако су у непертурбованом портфолију имале тежину нула и обратно, индекси укључени у непертурбовани портфолио после пертурбација добијају тежину нула.

Сви ови резултати указују на то да је потребно применити неки поступак који ће да побољша перформансе модела и смањи његову нестабилност. Применом Higham-овог алгоритма на матрицу корелације пертурбованог проблема покушали смо да добијемо матрицу са мање проблематичним карактеристичним вредностима, што би смањило лошу условљеност матрице коваријансе. Нажалост, добијени резултати показали су потпуну неосетљивост пертурбација на ефекте примене Алгоритма. Корекције које је алгоритам извршио над пертурбованом матрицом корелације биле су изузетно малог реда величине, недовољне да новодобијена матрица коваријансе доведе до оптималног портфолија са резултатима мање осетљивим на пертурбације очекиваног приноса.

6 Литература

[1] Bass Richard F.: *The Basics of Financial Mathematics*, University of Connecticut, 2003.

[2] Brealey Richard A.: *Harry M. Markowitz's Contributions to Financial Economics*, Scandinavian Journal of Economics, Vol. 93, pp. 7-17, 1991.

[3] Brodie Joshua, Daubechies Ingrid, De Mol Christine, Giannone Domenico, Loris Ignace: *Sparse and Stable Markowitz Portfolios*, PNAS, Vol. 106, No. 30, pp. 12267-12272, 2009.

[4] Duan Yaoyao Clare: *A Multi-objective Approach to Portfolio Optimization*, Boston College, 2007.

[5] Elton Edwin J., Gruber Martin J.: *Modern Portfolio Theory, 1950 to Date*, NYU Stern, Department of Finance, Working Paper Series 1998.

[6] Floudas Christodoulos A., Pardalos Panos M.: *Encyclopedia of Optimization*, Second Edition, Springer Science+BuisinessMedia, LLC. 2009.

[7] Guigues Vincent: *Sensitivity Analysis and Calibration of the Covariance Matrix for Stable Portfolio Selection*, Computational Optimization and Applications, Vol. 48, No. 3, pp. 553-579, 2009.

[8] Хаџић Олга: *Одабране методе теорије вероватноће*, Универзитет у Новом Саду, Институт за математику, 1990.

[9] Higham Nicholas J.: *Computing the Nearest Correlation Matrix – A Problem from Finance*, University of Manchester, 2002.

[10] Horn Roger A., Johnson Charles R.: *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[11] Kaplan Paul D.: *Asset Allocation Models Using the Markowitz Approach*, Chicago, 1998.

[12] Лончар Сања: *Дуалне мере ризика у оптимизацији портфолиа*, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2010.

[13] Luenberger David G.: *Investment Science*, Oxford University Press, 1998.

[14] Luenberger David G.: *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1969.

[15] Luenberger David G., Ye Yinyu: *Linear and Nonlinear Programming*, Third Edition, Springer Science+BuisinessMedia, LLC. 2008.

[16] Mankert Charlotta: *The Black-Litterman model*, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2006.

[17] Markowitz Harry M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1959.

[18] Michaud Richard O.: *The Markowitz optimization Enigma: Is "Optimized" Optimal?* Financial Analysts Journal, 1989.

[19] Michaud Richard O., Michaud Robert O.: *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, Second Edition, Oxford University Press, 2008.

[20] Mozafari Marzieh, Tafazzoli Sajedeh, Jolai Fariborz: *A New IPSO-SA Approach for Cardinality Constrained Portfolio Optimization*, International Journal of Industry Engeneering Computations, 2011.

[21] Nocedal Jorge, Wright Stephen J.: *Numerical Optimization*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag New York, Inc. 1999.

[22] Rockafellar R. Tyrrell: *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

[23] Steinbach Marc C.: *Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis*, SIAM Review, Vol. 34, 2001.

[24] Стојаковић Зоран, Херцег Драгослав: *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2005.

[25] Trefethen Lloyd N., Bau David III: *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

[26] Welsch Roy E., Zhou Xinfeng: *Application of Robust Statistics to Asset Allocation models*, REVSTAT – Statistical Journal, Vol. 5 No. 1, pp. 97-114, 2007.

Биографија

Светлана Миловановић рођена је 25.11.1979. године у Новом Саду. Основну школу „Светозар Марковић Тоза“ у Новом Саду завршила је 1994. године као носилац дипломе „Вук Стефановић Караџић“. Гимназију „Јован Јовановић Змај“, природно-математички смер, завршила је 1998. године у Новом Саду, такође као носилац Вукове дипломе.

Исте године уписала је Природно-математички факултет у Новом Саду, Департман за математику и информатику, а 2003. године дипломирала је са просечном оценом 9.54 и стекла звање Дипломирани математичар. Од 2009. године похађа мастер студије на истом факултету, смер Дипломирани математичар–мастер, модул Финансијска математика.

Стално је запослена у ЈП „Железнице Србије“ од 2003. године. Тренутно је ангажована на радном месту Руководилац пројекта у Сектору за информационе системе и информатичке технологије.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *Master teza*
VR
Autor: *Svetlana Milovanović*
AU
Mentor: *Dr Nataša Krejić*
MN
Naslov rada: *Stabilnost matrice kovarijanse i problem optimizacije portfolija*
NR
Jezik publikacije: *Srpski (ćirilica)*
JP
Jezik izvoda: *s/e*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2011*.
GO
Izdavač: *Autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad*
MA
Fizički opis: 6 *poglavlja / 84 strane / 26 lit. citata / 16 slika / 11 tabela*
FO
Naučna oblast: *Matematika*
NO
Naučna disciplina: *Numerička optimizacija*
ND
Ključne reči: *Markovicov model, optimizacija portfolija, matrica kovarijanse, stabilnost modela, perturbacije, najbliža matrica korelacije*
PO UDK

Čuva se: *U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
ČU
Izvod: *U radu je posmatran Markovicov model očekivani prinos - varijansa i njegova osetljivost na perturbacije očekivanog prinosa. Izveden je stabilizacioni algoritam za određivanje najbliže matrice korelacije i implementiran je u programskom okruženju MATLAB. Numeričkim primerima predstavljeni su uticaj pertubacija na rezultat optimizacione procedura i uticaj stabilizacionog algoritma na efekte perturbacija u optimalnom portfoliju.*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *13.06.2011*.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *Dr Zorana Lužanin, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu*
Član: *Dr Nataša Krejić, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu, mentor*
Član: *Dr Sanja Rapajić, vanredni profesor PMF-a u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *Monograph type*
DT
Type of record: *Printed text*
TR
Contents code: *Master thesis*
CC
Author: *Svetlana Milovanović*
AU
Mentor: *Nataša Krejić, PhD*
MN
Title: *Covariance Matrix Stability and Portfolio Optimization Problem*
XI
Language of text: *Serbian (Cyrillic)*
LT
Language of abstract: *s/e*
LA
Country of publication: *Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
UGP
Publication year: 2011
PY
Publisher: *Author's reprint*
PU
Publ. place: *Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad*
PP
Physical description: *6 chapters/ 84 pages/ 26 references/ 16 pictures/ 11 tables*
PD
Scientific field: *Mathematics*
SF
Scientific discipline: *Numerical Optimization*
SD
Key words: *Markowitz Model, Portfolio Optimization, Covariance Matrix, Model Stability, Perturbations, the Nearest Correlation Matrix*
KW
Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad*
HD

Abstract: *This paper deals with Markowitz' mean-variance model and its sensitivity to perturbations in expected return. Stabilization algorithm for computing the nearest correlation matrix is derived and implemented using MATLAB software package. Numerical examples represent influence of perturbations on results of the optimization procedure and influence of stabilization algorithm on effects of perturbations in the optimal portfolio.*
AB
Accepted by the Scientific Board on: 13 June 2011
Defended:
Thesis defend board:
DB
President: *Zorana Lužanin, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad*
Member: *Nataša Krejić, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, advisor*
Member: *Sanja Rapajić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad*