UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Andrea Rožnjik

VaR KAO MERA RIZIKA U OPTIMIZACIJI PORTFOLIA

- magistarska teza -

Novi Sad, 2008.

Predgovor

Ovaj magistarski rad je, kao što tema nagoveštava, posvećen ispitivanju problema optimizacije portfolia u kojem se rizik procenjuje VaR merom rizika. Rad sadrži osnovne pojmove o VaR meri rizika, VaR optimalnom portfoliu, troškovima transakcija i OVO problemima. Razmotreni su načini rešavanja problema optimizacije VaR mere rizika sa ograničenjem koje obezbeđuje da očekivani prinos portfolia bude veći od unapred fiksiranog prinosa. Numerički rezultati pokazuju značaj uticaja troškova transakcija na VaR optimalan portfolio.

Ovom prilikom bih želela da zahvalim dr Zorani Lužanin i dr Katarini Surla, redovnim profesorima Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, kao i dr Veri Kovačević-Vujčić, redovnom profesoru Fakulteta organizacionih nauka u Beogradu, na pokazanom interesovanju prilikom izrade rada.

Posebno zahvaljujem dr Nataši Krejić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koja je svojim savetima, sugestijama i primedbama pomogla izradu magistarskog rada.

Hvala i svima koji su mi pružili podršku i doprineli da rad bude završen.

Novi Sad, 25. jun 2008. Andrea Rožnjik

Sadržaj

1 Uvod **3**
- 1.1 Lista oznaka 6
- 1.2 Pregled definicija i teorema 7

2 VaR mera rizika **9**
- 2.1 Osobine VaR mere rizika 10
- 2.2 VaR u optimizaciji portfolia 18

3 Problemi sa uređenim funkcijskim vrednostima **25**
- 3.1 Osobine problema sa uređenim funkcijskim vrednostima 25
- 3.2 Primarna Košijeva metoda za rešavanje problema sa uređenim funkcijskim vrednostima 32
- 3.3 Primeri problema sa uređenim funkcijskim vrednostima 36
  - 3.3.1 Veza optimizacije portfolia sa OVO problemima 37

4 Određivanje SVaR optimalnog portfolia **39**
- 4.1 SVaR optimalni portfolio 39
- 4.2 Poređenje OVO i SVaR algoritama primenjenih na VaR problem optimizacije 52

5 Troškovi transakcija u optimizaciji portfolia **57**
- 5.1 Troškovi trajnog i privremenog impakta 57
  - 5.1.1 Optimalna trajektorija 58
  - 5.1.2 Trajni i privremeni impakt 61
- 5.2 VaR mera rizika u optimizaciji portfolia sa troškovima transakcija 63

6 Numerički rezultati **69**
6.1 Jednodnevni VaR 69
6.2 Desetodnevni VaR 89

Glava 1

Uvod

U ekonomiji, inženjerstvu, industriji, čak i prirodi, javljaju se problemi optimizacije kao što su minimiziranje troškova, maksimiziranje produktivnosti, minimizacija energije. Na finansijskom tržištu postoji potreba za rešavanjem problema optimalnog ulaganja u odabrana dobra pod određenim rizikom. Moguća ulaganja čine portfolio, pa se, u stvari, treba rešiti problem optimizacije portfolia koji uključuje meru rizika ulaganja. Na ovaj način se izbegava suvišan rizik, ali se ne zanemaruje želja za predviđenim prinosom. Prilikom ulaganja u određeni portfolio nisu poznati podaci o prinosu koji će doneti taj portfolio, pa pri svakom ulaganju postoji rizik. Rizik se može proceniti koristeći različite mere rizika. Prve ideje za procenjivanje rizika portfolia potiču od autora rada Markowitz [32] koji je merio rizik sa varijansom prinosa. Kasnije su se pojavile i VaR (Value at Risk), CVaR (Conditional Value at Risk) i ES (Expected Shortfall) mere rizika. Istraživanja o CVaR meri rizika se mogu naći u radovima Rockafellar i Uryasev [42], Rockafellar i Uryasev [43], Kibzun i Kuznetsov [25], Krokhmal et al. [28], dok se u radovima Acerbi et al. [1], Acerbi i Tasche [2] mogu naći istraživanja o ES meri rizika.

Istraživanje u okviru ovog rada je posvećeno ispitivanju problema optimizacije portfolia u kojem se rizik meri sa VaR merom rizika. VaR predstavlja najveći gubitak portfolia koji može da se očekuje u posmatranom periodu sa datim nivoom poverenja. VaR je 1995. godine postao zvanična mera rizika u finansijskoj industriji (Jorion [23]). Razmatranja o VaR meri rizika pod uslovom da elementi portfolia imaju normalnu raspodelu mogu se naći u radovima Jorion [23], Duffie i Pan [15], Gourieroux et al. [22], Risk Metrics^{TM} [40]. Osobine VaR mere rizika su razmatrane u radovima Artzner et al. [8],

Embrechts et al. [16], Embrechts et al. [17], Mausser i Rosen [33], Pflug [38], Rockafellar [41], Uryasev [44].

Cilj investitora je da što više zaradi i da rizik pri ulaganju bude što manji. Odgovor na želje investitora je VaR optimalan portfolio koji je rešenje problema minimiziranja VaR mere rizika sa ograničenjem koje obezbeđuje da se dostigne unapred definisan prinos. Istraživanja o optimizaciji portfolia koristeći VaR meru rizika se mogu naći u radovima Chabaane et al. [13], Gaivoronski i Pflug [19], Gaivoronski i Pflug [20], Gaivoronski i Pflug [21], Larsen et al. [30], Pang i Leyffer [36].

Pošto u opštem slučaju VaR mera rizika nije konveksna, navedeni problem nije konveksan problem. Kako VaR mera rizika nije glatka funkcija, funkcija cilja u problemu optimizacije portfolia koristeći VaR meru rizika nije diferencijabilna. U radu Gaivoronski i Pflug [21] je ovaj problem rešen transformisanjem VaR mere rizika u glatku funkciju uvodeći parametar glačanja, što problem optimizacije koji nije gladak svodi na niz glatkih problema. Transformacija se vrši linearnom kombinacijom funkcija, koje određuju funkciju cilja, gde u koeficijentima linearne kombinacije figuriše kubni splajn.

Problem optimizacije portfolia sa VaR merom rizika se može svesti na problem sa uređenim funkcijskim vrednostima, takozvani OVO problem. U pitanju je problem minimizacije funkcije sa realnim vrednostima koja je definisana preko određenog broja drugih funkcija. Te funkcije su, takođe funkcije sa realnim vrednostima, i one su uređene po veličini. Funkcija čiji minimum se traži je definisana kao funkcija koja se nalazi na fiksiranom mestu u poretku pomenutih funkcija. U radovima Andreani et al. [5], Andreani et al. [6] i Andreani et al. [7] su prikazane osobine OVO problema, kao i postupci njihovog rešavanja. Znači, problem optimizacije portfolia sa VaR merom rizika se može rešavati metodama za rešavanje OVO problema.

Pri svakoj promeni portfolia postoje troškovi koji nastaju usled prodaje ili kupovine delova portfolia. Troškovi se dele na fiksne troškove i troškove privremenog i trajnog impakta. U radovima Almgren [3], Almgren i Chriss [4], Kissell [26] i Lobo et al. [31] se mogu naći osobine troškova transakcija portfolia. Prilikom trgovanja portfoliom značajna je i strategija trgovanja. Istraživanja strategija trgovanja se mogu naći u radovima Almgren i Chriss [4], Bertsimas i Lo [9], Butenko et al. [12], Krokhmal i Uryasev [29]. Uključivanjem funkcije troškova u VaR optimalni portfolio, dobija se problem minimizacije VaR mere rizika, pri čemu se zahteva da u predviđenom periodu novi portfolio donese očekivani prinos veći ili jednak unapred fiksiranom prinosu. U radu Daníelsson et al. [14] su analizirani problemi optimizacije

portfolia sa ograničenjima na VaR meru rizika, pri čemu troškovi transakcija nisu zanemareni. Različiti načini izbora optimalnog portfolia, uzimajući u obzir troškove transakcija, se mogu naći u radovima Best i Hlouskova [10], Brandt i Santa-Clara [11], Mansini i Speranza [34] i Potaptchik et al. [39].

Ovaj rad je organizovan na sledeći način. U narednom poglavlju rada se uvodi pojam VaR mera rizika portfolia, koristeći informacije o prinosu, odnosno gubitku portfolia. Zatim se proučavaju osobine VaR mere rizika, kao i osobine problema optimizacije portfolia u kojima se rizik meri VaR merom rizika.

Treće poglavlje rada je posvećeno problemima sa uređenim funkcijskim vrednostima. Razmotrene su osobine OVO problema i metode njihovog rešavanja, s posebnim osvrtom na primarnu Košijevu metodu koja se može primeniti na rešavanje problema optimizacije portfolia sa VaR merom rizika.

U četvrtom poglavlju je prikazan SVaR optimalan portfolio, koji je rešenje transformisanog problema optimizacije portolia u kojem se rizik meri VaR merom rizika, predložen od strane Gaivoronskog i Pfluga (rad [21]). Pokazali smo da niz SVaR optimalnih portfolia, dobijenih puštanjem parametra glačanja da teže ka nuli, teži ka VaR optimalnom portfoliu, Krejić et al. [27]. Uporedili smo VaR optimalan portfolio dobijen postupkom za rešavanje OVO problema sa SVaR optimalnim portfoliom dobijenim puštanjem parametra glačanja u nulu.

U petom poglavlju rada su razmotrene vrste troškova transakcija pri promeni portfolia. Posmatran je uticaj promene veličine fiksnih troškova u odnosu na veličinu troškova impakta prouzrokovanih promenom portfolia sa početnog portfolia na VaR optimalan portfolio.

Numerički rezultati dobijeni rešavanjem problema optimalnog VaR portfolia za različite modele troškova transakcija su prikazani u šestom poglavlju i u radu Krejić et al. [27]. Za primere su korištene akcije sa Londonske berze i pokazalo se da se VaR optimalan portfolio dobijen zanemarivanjem troškova transakcija značajno razlikuje od VaR optimalanog portfolia dobijenog uzimanjem u obzir troškove transakcija.

1.1 Lista oznaka

$\mathbf{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbf{Z}$	skup celih brojeva
$\mathbf{R}$	skup realnih brojeva
$\emptyset$	prazan skup
$\#S$	kardinalni broj skupa S
$\overline{S} = \Omega \setminus S$	komplement skupa S u odnosu na osnovni skup Ω
$\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}}$	niz elemenata $a_1, a_2, \ldots$
$x = (x_1, \ldots, x_n)$	vektor kolone dužine n
x_i	i-ti element vektora x
$x \leq y$	elementi vektora $x \in \mathbf{R}^n$ su manji od odgovarajućih elemenata vektora $y \in \mathbf{R}^n$, $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, n$
$e = (1, 1, \ldots, 1)$	
$\|\| \cdot \|\|$	Euklidska norma
$\|\| \cdot \|\|_\infty$	p-norma za $p = \infty$
$\mathcal{B}(\bar{x}, \delta)$	δ okolina tačke $\bar{x}$, $\|\|x - \bar{x}\|\| < \delta$ za svako $x \in \mathcal{B}(\bar{x}, \delta)$
$P(u) = P(U = u)$	verovatnoća slučajne promenljive U u u
$P(U \leq u)$	verovatnoća da slučajna promenljiva U uzima vrednost u
$F_U(u)$	funkcija raspodele slučajne promenljive U
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	normalna raspodela sa očekivanjem μ i standardnim odstupanjem σ
Φ	funkcija raspodele slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, 1)$
$E(U)$	matematičko očekivanje slučajne promenljive U

1.2 Pregled definicija i teorema

Definicija 1.1 *Funkcija $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ za koju važi da je*

1. *$P(S) = 1$, gde je S skup mogućih ishoda;*
2. *$P(A) \geq 0$ za svaki slučajan događaj $A \in \mathcal{A}$;*
3. *$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ za događaje $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ takve da je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za svako $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$*

je funkcija verovatnoće, a $P(A)$ je verovatnoća slučajnog događaja A.

Definicija 1.2 *Neka je $\mathcal{A}$ podskup partitivnog skupa skupa Ω. Skup $\mathcal{A}$ je σ-algebra nad Ω ako su zadovoljeni uslovi*

1. *$\Omega \in \mathcal{A}$,*
2. *ako $S \in \mathcal{A}$, tada i $\overline{S} \in \mathcal{A}$,*
3. *ako je $\{S_i\}_{i \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{A}$, tada $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathcal{A}$.*

Definicija 1.3 *Neka je S skup mogućih ishoda, skup događaja $\mathcal{A}$ σ-algebra događaja nad S i P funkcija verovatnoće. Uređena trojka $(S, \mathcal{A}, P)$ je prostor verovatnoće.*

Definicija 1.4 *Slučajna promenljiva U nad prostorom verovatnoće $(S, \mathcal{A}, P)$ je funkcija $U : S \to \mathbf{R}$ za koju važi da je za svako $u \in \mathbf{R}$*

$$\{s \mid U(s) \leq u\} \in \mathcal{A}.$$

Definicija 1.5 *Funkcija raspodele slučajne promenljive U nad prostorom verovatnoće $(S, \mathcal{A}, P)$, u oznaci F_U, je preslikavanje skupa $\mathbf{R}$ u skup $[0,1]$ definisano sa*

$$F_U(u) = P(U \leq u).$$

Definicija 1.6 *Neka su U_1 i U_2 slučajne promenljive nad prostorom verovatnoće $(S, \mathcal{A}, P)$ i neka su σ_1 i σ_2 njihova standardna odstupanja. Koeficijent korelacije U_1 i U_2 je*

$$\rho = \frac{E(U_1U_2) - E(U_1)E(U_2)}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Definicija 1.7 *Normalna raspodela $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sa očekivanjem $\mu \in \mathbf{R}$ i standardnim odstupanjem $\sigma > 0$ je određena sa gustinom raspodele*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)},$$

gde je $x \in \mathbf{R}$.

Glava 2

VaR mera rizika

Problem izbora optimalnog portfolia investicija* je jedan od najvažnijih problema u finansijama. Informacije o budućem prinosu portfolia nisu poznate u trenutku donošenja odluke, pa svaka odluka nosi određen rizik. Rizik se može proceniti koristeći različite mere rizika. Sredinom dvadesetog veka, počevši od Markowitza, javila se ideja da varijansa prinosa bude mera rizika. Proteklih dvadesetak godina se analiziraju mere rizika kao što su VaR i CVaR. Istraživanja o njima se mogu naći, na primer, u radovima: Artzner et al. [8], Jorion [23], Kibzun i Kuznetsov [25], Pflug [38], Rockafellar [41], Rockafellar i Uryasev [42], Rockafellar i Uryasev [43].

U ovom poglavlju navodimo osobine VaR mere rizika, kao što su pozitivna homogenost i monotonost. Videćemo da u opštem slučaju ne važe subaditivnost i konveksnost, ali da postoje uslovi pod kojima oni važe. Razmotrićemo i ulogu VaR mere rizika u optimizaciji portfolia, koristeći istorijske ili simulirane podatke o prinosu portfolia. U radu Gaivoronski i Pflug [19] je posmatran problem maksimiziranja prinosa sa ograničenjima na VaR, međutim moguć je i drugi pristup – minimiziranje VaR mere rizika sa ograničenjima na prinos portfolia, koji prikazujemo u ovom poglavlju.

*Pod investicijom podrazumevamo ulaganja bilo koje vrste. Tako investicija može biti kupovina ili prodaja hartije od vrednosti, sklapanje polise osiguranja, kreditiranje, i tako dalje. Ukupna ulaganja nazivamo portfoliom.

2.1 Osobine VaR mere rizika

Vrednost pod rizikom (Value at Risk), skraćeno VaR, je mera rizičnosti investicije na finansijskom tržištu. U pitanju je najveći gubitak koji može da se očekuje u datom vremenskom intervalu sa datim nivoom poverenja.

Posmatrajmo investiciju koja će se realizovati u datom vremenskom periodu. Označimo prinos investicije nakon posmatranog perioda sa W. Veličina $-W$ je gubitak investicije, označimo je sa Y. U momentu određivanja veličine investicije nije poznat njen prinos, pa ga tretiramo kao slučajnu promenljivu. To znači da su prinos investicije W i gubitak investicije Y slučajne promenljive.

VaR se može posmatrati sa dve tačke gledišta, posmatrajući prinos ili posmatrajući gubitak investicije. Definisana preko gubitka investicije, VaR mera rizika investicije na nivou poverenja α, gde $\alpha \in (0,1)$, je definisana sa α-kvantilom gubitka investicije Y.

Definicija 2.1 *VaR mera rizika, definisana preko gubitka investicije, je*

$$VaR_\alpha(Y) := Q_\alpha(Y) = \inf\{y \in \mathbf{R} \mid P(Y \leq y) \geq \alpha\}.$$

Znači, VaR je gubitak investicije koji neće biti prevaziđen u $\alpha{\cdot}100\%$ slučajeva. U radovima: [25], [38], [41], [42], [43] je korištena ova definicija. Da bismo naveli definiciju VaR mere rizika koristeći prinos investicije, potreban nam je pojam gornjeg α-kvantila slučajne promenljive U koji je definisan sa

$$Q^+_\alpha(U) := \sup\{u \in \mathbf{R} \mid P(U < u) \leq \alpha\}.$$

Definicija 2.2 *VaR mera rizika, definisana preko prinosa investicije, je*

$$VaR^+_{1-\alpha}(W) := Q^+_{1-\alpha}(W) = \sup\{w \in \mathbf{R} \mid P(W < w) \leq 1-\alpha\}.$$

Ovo znači da je VaR prinos investicije koji će biti prevaziđen u $\alpha \cdot 100\%$ slučajeva. U obe definicije, najčešće vrednosti za α su 0.9, 0.95 i 0.99.

VaR mera rizika primenjena na normalnu slučajnu promenljivu $\mathcal{N}(0,1)$ je ilustrovana na slici 2.1. Na levom grafiku je korištena prva definicija na nivou poverenja 90%, a na desnom druga sa pragom značajnosti od 10%. Na slici 2.2 je prikazan VaR primenjen na diskretnu slučajnu promenljivu gubitka sa raspodelom

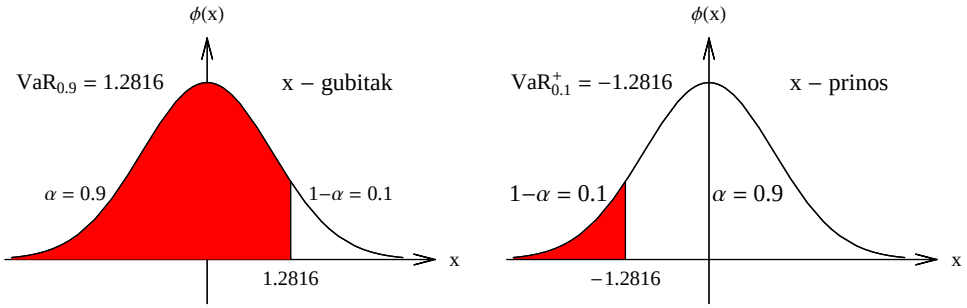
$$Y : \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2/15 & 1/5 & 2/15 & 2/15 & 1/5 & 2/15 & 1/15 \end{pmatrix},$$

odnosno slučajnu promenljivu prinosa sa raspodelom

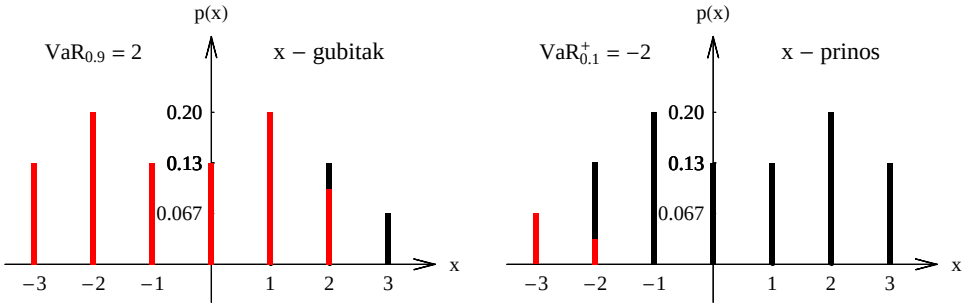
$$W : \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/15 & 2/15 & 1/5 & 2/15 & 2/15 & 1/5 & 2/15 \end{pmatrix}.$$

Na obe slike je crvenom bojom označena površina koja odgovara veličini nivoa na kojem se određuje VaR.

U slučaju kada se VaR definiše preko gubitka, pozitivne vrednosti predstavljaju gubitak, dok negativne prinos. Kada se VaR određuje preko prinosa, pozitivne vrednosti predstavljaju prinos, a negativne gubitak.



Slika 2.1: VaR definisan kao gubitak i kao prinos za normalnu slučajnu promenljivu $\mathcal{N}(0,1)$ sa funkcijom gustine ϕ



Slika 2.2: VaR definisan kao gubitak i kao prinos na diskretnoj slučajnoj promenljivoj

U sledećoj teoremi pokazujemo da je

$$\sup\{w \in \mathbf{R} \mid P(W < w) \leq 1-\alpha\} = \inf\{w \in \mathbf{R} \mid P(W \leq w) > 1-\alpha\},$$

što znači da su Gaivoronski i Pflug, u radu [21], koristili $Q^+_{1-\alpha}(W)$ u definiciji VaR mere rizika. Preciznije rečeno, koristili su definiciju

$$VaR(W) = E(W) - Q^+_{1-\alpha}(W),$$

gde je sa $E(W)$ označen očekivani prinos slučajne promenljive W. Pod pretpostavkom da se posmatraju razumne investicije – manje rizična investicija ne donosi veći prinos od više rizične investicije – ako je posmatrani period kratak (nekoliko dana), tada je $E(W) \approx 0$. Znači, $E(W)$ se može zanemariti, kao što je to učinjeno u većini radova.

Teorema 2.3 (Jöhri [24]) *Za slučajnu promenljivu W važi da je*

$$\sup\{w \in \mathbf{R} \mid P(W < w) \leq \alpha\} = \inf\{w \in \mathbf{R} \mid P(W \leq w) > \alpha\}.$$

Dokaz. Radi kraćeg zapisa, uvedimo oznake

$$w_* = \inf\{w \in \mathbf{R} \mid P(W \leq w) > \alpha\}$$

i

$$w^* = \sup\{w \in \mathbf{R} \mid P(W < w) \leq \alpha\}.$$

Posebno razmotrimo slučaj kada je W slučajna promenljiva neprekidnog tipa i kada je diskretnog tipa.

1^o Slučajna promenljiva W je neprekidna. To znači da je $P(W = w^*) = 0$, odnosno da je

$$w^* = \sup\{w \in \mathbf{R} \mid P(W \leq w) \leq \alpha\}.$$

Pretpostavimo suprotno, da je $w_* \neq w^*$.

1. Ako je $w_* < w^*$, onda postoji $w \in \mathbf{R}$ takvo da je $w_* < w < w^*$. Kako je $w_* < w$, $P(W \leq w) > \alpha$. Iz nejednakosti $w < w^*$ imamo da je $P(W \leq w) \leq \alpha$. Znači, $\alpha \geq P(W \leq w) > \alpha$, odakle je $\alpha > \alpha$, što je kontradikcija.
2. Ako je $w_* > w^*$, tada postoji $w \in \mathbf{R}$ takvo da je $w_* > w > w^*$. Iz nejednakosti $w_* > w$ dobijamo da je $P(W \leq w) \leq \alpha$. Na osnovu nejednakosti $w > w^*$ imamo da je $P(W \leq w) > \alpha$. Znači, $\alpha \geq P(W \leq w) > \alpha$, pa je $\alpha > \alpha$, što je kontradikcija.

2^o Slučajna promenljiva W je diskretna. Neka je njena raspodela

$$W : \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

pri čemu je $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_m$. Funkcija raspodele je prikazana u tabeli

w	w_1	w_2	w_3	$\ldots$	w_k	$\ldots$	w_m
$P(W \leq w)$	p_1	p_1+p_2	$p_1+p_2+p_3$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{k} p_i$	$\ldots$	1
$P(W < w)$	0	p_1	p_1+p_2	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{k-1} p_i$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{m-1} p_i$

.

Pretpostavimo suprotno, da je $w_* \neq w^*$.

1. Ako je $w_* < w^*$, tada je

$$w_* = w_k \quad \text{i} \quad w^* = w_{k+j},$$

gde je $k = 1, \ldots, m-1$, $j \geq 1$. Pošto je $P(W \leq w_k) > \alpha$,

$$\sum_{i=1}^{k} p_i > \alpha. \tag{2.1}$$

Iz $P(W < w_{k+j}) \leq \alpha$ sledi da je

$$\sum_{i=1}^{k+j-1} p_i \leq \alpha. \tag{2.2}$$

Koristeći nejednakosti (2.1) i (2.2) dobijamo da je

$$\alpha \geq \sum_{i=1}^{k+j-1} p_i = \sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=1}^{j-1} p_{k+i} > \alpha + \sum_{i=1}^{j-1} p_{k+i},$$

odnosno

$$0 > \sum_{i=1}^{j-1} p_{k+i}.$$

Međutim zbir $\sum_{i=1}^{j-1} p_{k+i}$ je nenegativan jer je u pitanju verovatnoća, što znači da smo došli do kontradikcije.

2. Ako je $w_* > w^*$, tada je

$$w_* = w_{k+j} \quad \text{i} \quad w^* = w_k,$$

pri čemu je $k = 1, \ldots, m-1$, $j \geq 1$. Pošto je w_{k+j} najmanja vrednost među $w_1, w_2, \ldots, w_m$ za koju važi $P(W \leq w_{k+j}) > \alpha$, za w_{k+j-1} važi $P(W \leq w_{k+j-1}) \leq \alpha$, odnosno

$$\sum_{i=1}^{k+j-1} p_i \leq \alpha. \tag{2.3}$$

Analogno, w_k je najveća vrednost među $w_1, w_2, \ldots, w_m$ za koju važi $P(W < w_k) \leq \alpha$, pa za w_{k+1} važi $P(W < w_{k+1}) > \alpha$, odnosno

$$\sum_{i=1}^{k} p_i > \alpha. \tag{2.4}$$

Nejednakosti (2.3) i (2.4) su redom jednake nejednakostima (2.2) i (2.1), što znači da i u ovom slučaju imamo kontradikciju.

Znači, dobili smo da i za neprekidnu i za diskretnu slučajnu promenljivu W važi da je $\sup\{w \in \mathbf{R} \mid P(W < w) \leq \alpha\} = \inf\{w \in \mathbf{R} \mid P(W \leq w) > \alpha\}$. □

U sledećoj teoremi navodimo vezu između gornje dve definicije VaR mere rizika.

Teorema 2.4 ([38]) *Neka su W i Y redom slučajne promenljive prinosa i gubitka investicije. Važi da je $VaR_\alpha(Y) = -VaR^+_{1-\alpha}(W)$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}
VaR_\alpha(Y) = Q_\alpha(Y) &= \inf\{y \in \mathbf{R} \mid P(Y \leq y) \geq \alpha\} = \\
&= \inf\{y \in \mathbf{R} \mid P(-Y \geq -y) \geq \alpha\} = \\
&= \inf\{y \in \mathbf{R} \mid 1 - P(-Y < -y) \geq \alpha\} = \\
&= \inf\{y \in \mathbf{R} \mid P(-Y < -y) \leq 1 - \alpha\} = \\
&= -\sup\{-y \in \mathbf{R} \mid P(-Y < -y) \leq 1 - \alpha\} = \\
&= -\sup\{w \in \mathbf{R} \mid P(-Y < w) \leq 1 - \alpha\} = \\
&= -Q^+_{1-\alpha}(-Y) = -VaR^+_{1-\alpha}(W) \quad \square
\end{aligned}$$

Osobine VaR mere rizika su razmatrane u radovima: [8], [16], [25], [38]. Za navođenje osobine monotonosti potreban je pojam stohastička dominantnost prvog reda (stochastic dominance of order 1). Slučajna promenljiva Y *stohastički dominira* nad slučajnom promenljivom X, u oznaci $X \leq_{SD1} Y$, ako i samo ako je $F_X(z) \geq F_Y(z)$ za svako $z \in \mathbf{R}$.

Teorema 2.5 ([38]) *Za VaR meru rizika važe sledeće osobine:*

1. *invarijantnost na translaciju,* $VaR_\alpha(Y + c) = VaR_\alpha(Y) + c$*, gde je* c *proizvoljna konstanta;*
2. *pozitivna homogenost,* $VaR_\alpha(cY) = c \cdot VaR_\alpha(Y)$*, gde je* $c > 0$*;*
3. *monotonost, ako je* $X \leq_{SD1} Y$*, tada je* $VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y)$*.*

Dokaz.

1. Neka je c proizvoljna konstanta.

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(Y) + c &= \inf\{y \in \mathbf{R} \mid P(Y \leq y) \geq \alpha\} + c = \\ &= \inf\{y + c \in \mathbf{R} \mid P(Y \leq y) \geq \alpha\} = \\ &= \inf\{y + c \in \mathbf{R} \mid P(Y + c \leq y + c) \geq \alpha\} = \\ &= \inf\{u \in \mathbf{R} \mid P(Y + c \leq u) \geq \alpha\} = VaR_\alpha(Y + c) \end{aligned}$$

2. Neka je c pozitivna konstanta.

$$\begin{aligned} c \cdot VaR_\alpha(Y) &= c \cdot \inf\{y \in \mathbf{R} \mid P(Y \leq y) \geq \alpha\} = \\ &= \inf\{cy \in \mathbf{R} \mid P(Y \leq y) \geq \alpha\} = \\ &= \inf\{cy \in \mathbf{R} \mid P(cY \leq cy) \geq \alpha\} = \\ &= \inf\{u \in \mathbf{R} \mid P(cY \leq u) \geq \alpha\} = VaR_\alpha(cY) \end{aligned}$$

3. Kako je $X \leq_{SD(1)} Y$, imamo da je

$$P(X \leq z) \geq P(Y \leq z) \text{ za svako } z \in \mathbf{R}.$$

Neka je $x_V = VaR_\alpha(X)$ i $y_V = VaR_\alpha(Y)$. Pretpostavimo suprotno, da je $x_V > y_V$. Pošto je x_V najmanja vrednost za koju važi da je $P(X \leq x_V) \geq \alpha$, za y_V važi

$$P(X \leq y_V) < \alpha.$$

Koristeći da je

$$P(Y \leq y_V) \geq \alpha,$$

dobijamo

$$\alpha > P(X \leq y_V) \geq P(Y \leq y_V) \geq \alpha.$$

Odavde je $\alpha > \alpha$, čime smo došli do kontradikcije. □

Mera rizika je subaditivna ako je zbir rizika dve investicije veći ili jednak riziku portfolia dobijenog spajanjem tih investicija. Sledeći primer potvrđuje da VaR nije subaditivna mera rizika, odnosno da se spajanjem dve investicije u jedan portfolio može dobiti portfolio čiji je VaR veći od zbira VaR mere rizika pojedinačnih investicija.

Primer 2.1 *Posmatrajmo investiciju x_1 koja predstavlja ulaganje u akciju A_1 i investiciju x_2 koja predstavlja ulaganje u akciju A_2. Neka su raspodele gubitka investicija x_1 i x_2*

$$Y_1 : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.98 & 0.02 \end{pmatrix} \quad i \quad Y_2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.96 & 0.04 \end{pmatrix},$$

respektivno. 95% VaR mera rizika investicije x_1 je

$$VaR_{0.95}(Y_1) = 0,$$

a investicije x_2

$$VaR_{0.95}(Y_2) = -1.$$

Posmatrajmo sada portfolio x sa 50% akcija A_1 i 50% akcija A_2, odnosno $x = (0.5, 0.5)$. Raspodela gubitka portfolia x je

$$Y : \begin{pmatrix} x^T(0,-1) & x^T(0,1) & x^T(2,-1) & x^T(2,1) \\ 0.9408 & 0.0392 & 0.0192 & 0.0008 \end{pmatrix},$$

pa je

$$VaR_{0.95}(Y) = (0.5, 0.5)^T(0, 1) = 0.5.$$

Dobili smo da je

$$VaR_{0.95}(Y_1) + VaR_{0.95}(Y_2) = -1 < 0.5 = VaR_{0.95}(Y),$$

što znači da ne važi subaditivnost za VaR meru rizika. Vidimo da sa sigurnošću od 95% znamo da investicije x_1 i x_2 neće imati gubitka, dok portfolio x može imati gubitak do veličine 0.5. Znači spajanjem investicija x_1 i x_2 u jedan portfolio, dobija se porfolio koji je rizičniji od investicija pojedinačno.

Mera rizika koja je pozitivno homogena i subaditivna je konveksna. Pošto, u opštem slučaju, za VaR ne važi subaditivnost, VaR nije konveksna mera rizika. Međutim, sledeća teorema pokazuje da ako slučajne promenljive imaju normalnu raspodelu, VaR mera rizika je subaditivna, pa samim tim i konveksna.

U radu [16] je pokazano da je VaR mera rizika slučajne promenljive Y koja ima normalnu raspodelu sa očekivanjem μ_Y i varijansom σ_Y^2

$$VaR_\alpha(Y) = \mu_Y + \sigma_Y Q_\alpha(\Phi),$$

gde je Φ funkcija raspodele slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$.

Teorema 2.6 ([16]) *Neka su Y_1 i Y_2 slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, respektivno. Tada je za $\alpha > 0.5$*

$$VaR_\alpha(Y_1 + Y_2) \leq VaR_\alpha(Y_1) + VaR_\alpha(Y_2).$$

Dokaz. $Y_1 + Y_2$ je slučajan vektor sa normalnom raspodelom

$$\mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right),$$

gde je ρ koeficijent korelacije Y_1 i Y_2. Za koeficijent korelacije važi da je $\rho \leq 1$, pa je $\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq (\sigma_1 + \sigma_2)^2$. Pošto je $Q_\alpha(\Phi) > 0$ za svako $\alpha > 0.5$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(Y) &= \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \cdot Q_\alpha(\Phi) \leq \\ &\leq \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot Q_\alpha(\Phi) = VaR_\alpha(Y_1) + VaR_\alpha(Y_2), \end{aligned}$$

što smo i hteli dokazati. □

Uslov $\alpha > 0.5$ ne predstavlja restrikciju u realnim problemima jer se za vrednosti za α uzimaju brojevi koji su blizu jedinici.

2.2 VaR u optimizaciji portfolia

Prillikom ulaganja u portfolio cilj je da se postigne što veća dobit, ali i da se rizik svede na minimum. Znači, problem optimalnog ulaganja se može formulisati kao problem minimiziranja mere rizika sa ograničenjem koje obezbeđuje da se postigne predviđena dobit.

Posmatrajmo portfolio x koji se sastoji od n dobara. Procenat zastupljenosti i-tog dobra u portfoliu označimo sa x_i, za $i = 1, \ldots, n$. Znači, portfolio je $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i za njega važi da je

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x^T e = 1.$$

Pretpostavljamo da je kratka prodaja zabranjena, odnosno da se prodaje samo ona količina dobra koja se poseduje, pa je $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Neka je ξ_i, $i = 1, \ldots, n$ prinos i-tog dobra u portfoliu za određeni period, odnosno $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ je vektor prinosa portfolia. Prinos portfolia nakon posmatranog perioda trgovanja je

$$W(x) = x^T \xi.$$

Pošto veličina $-\xi_i$, $i = 1, \ldots, n$ predstavlja gubitak i-tog dobra u portfoliu, gubitak portfolia je

$$Y(x) = -x^T \xi = -W(x).$$

Neka je sa $E(W)$ obeležen očekivani prinos portfolia, a sa μ željeni prinos. Za očekivanje slučajne promenljive W važi da je

$$E(W) = E(x^T \xi) = x^T E(\xi).$$

Problem optimizacije portfolia x primenom VaR mere rizika definisane preko gubitka portfolia ima oblik

$$\begin{aligned} \min_x \; & VaR_\alpha(Y) \\ & x^T E(\xi) \geq \mu \\ & x^T e = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Rešenje problema (2.5) je portfolio sa najmanjom VaR merom rizika nivoa α, za koji je očekivani prinos bar μ.

Kada se VaR mera rizika definiše preko prinosa portfolia, problem optimizacije portfolia x postaje problem maksimiziranja

$$\begin{aligned} \max_x \, & VaR^+_{1-\alpha}(W) \\ & x^T E(\xi) \geq \mu \\ & x^T e = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Na osnovu teoreme 2.6, ako slučajna promenljiva Y ima normalnu raspodelu, tada je problem optimizacije sa VaR merom rizika konveksan problem. Međutim, u opštem slučaju VaR problem optimizacije nije konveksan problem.

Za rešavanje problema optimizacije, potrebna je informacija o raspodeli slučajne promenljive gubitka portfolia (ili prinosa portfolia). Slučajna promenljiva gubitka (odnosno prinosa) portfolia može biti zadata raspodelom za koju su poznati parametri. U tom slučaju se najčešće koristi normalna raspodela. Druga mogućnost je da se raspodela odredi na osnovu uzorka koji čine istorijski podaci.

Neka je sa $\min^k\{u_1, \ldots, u_m\}$ označen element skupa $\{u_1, \ldots, u_m\}$ koji je k-ti po veličini. Ako su realne vrednosti $u_1, \ldots, u_m$ poređane po veličini tako da je $u_1 \leq \cdots \leq u_m$, tada je

$$\min^k\{u_1, \ldots, u_m\} = u_k,$$

a $\min^1\{u_1, \ldots, u_m\}$ i $\min^m\{u_1, \ldots, u_m\}$ daju najmanji i najveći element skupa $\{u_1, \ldots, u_m\}$. Razmotrimo vezu između ove oznake i empirijskog α-kvantila uzorka, kao i empirijskog gornjeg α-kvantila uzorka.

Posmatrajmo uzorak $\{u_1, \ldots, u_m\}$ sa elementima poređanim po veličini, $u_1 \leq \cdots \leq u_m$. Uzorak možemo zapisati u obliku slučajne promenljive U, uzimajući da svaki element ima verovatnoću $1/m$. Slučajna promenljiva U ima raspodelu

$$U : \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_m \\ 1/m & \ldots & 1/m \end{pmatrix}.$$

Funkcija raspodele $P(U \leq u)$ i $P(U < u)$ ima vrednosti

u	u_1	u_2	$\ldots$	u_k	$\ldots$	u_m
$P(U \leq u)$	$1/m$	$2/m$	$\ldots$	k/m	$\ldots$	1
$P(U < u)$	0	$1/m$	$\ldots$	$(k-1)/m$	$\ldots$	$(m-1)/m$

.

α-kvantil slučajne promenljive U je

$$Q_\alpha(U) = \inf\left\{u_k \;\middle|\; \frac{k}{m} \geq \alpha,\ k \in \{1,\ldots,m\}\right\} = u_k.$$

Primetimo da za svako $k = 1,\ldots,m$ nejednakost

$$\frac{k-1}{m} < \alpha \leq \frac{k}{m}$$

implicira da je

$$Q_\alpha(U) = u_k,$$

odnosno, ako je

$$k - 1 < \alpha m \leq k,$$

onda je

$$Q_\alpha(U) = u_k.$$

Označimo sa $\lceil z \rceil$ najmanji ceo broj koji je veći ili jednak sa z,

$$\lceil z \rceil \in \mathbf{Z} \ \text{ i } \ z \leq \lceil z \rceil < z + 1.$$

Koristeći da je

$$min^k\{u_1,\ldots,u_m\} = u_k \tag{2.7}$$

i da iz nejednakosti

$$k - 1 < \alpha m \leq k$$

sledi da je

$$\lceil \alpha m \rceil = k,$$

dobijamo da je

$$Q_\alpha(U) = u_{\lceil \alpha m \rceil} = min^{\lceil \alpha m \rceil}\{u_1,\ldots,u_m\}.$$

Znači, empirijski α-kvantil uzorka dužine m je element uzorka koji je, poređavši elemente od najmanjeg do najvećeg, $\lceil \alpha m \rceil$-ti po veličini.
Gornji α-kvantil slučajne promenljive U je

$$Q^+_\alpha(U) = \sup\left\{u_k \;\middle|\; \frac{k-1}{m} \leq \alpha,\ k \in \{1,\ldots,m\}\right\} = u_k.$$

Za svako $k = 1, \ldots, m$ na osnovu nejednakosti

$$\frac{k-1}{m} \leq \alpha < \frac{k}{m}$$

važi da je

$$Q_\alpha^+(U) = u_k,$$

odnosno, uslov

$$k - 1 \leq \alpha m < k$$

implicira da je

$$Q_\alpha^+(U) = u_k.$$

Sa $\lfloor z \rfloor$ označimo najveći ceo deo broja z,

$$\lfloor z \rfloor \in \mathbf{Z} \text{ i } z - 1 < \lfloor z \rfloor \leq z.$$

Na osnovu jednakosti (2.7) i da iz nejednakosti

$$k - 1 \leq \alpha m < k$$

sledi da je

$$\lfloor \alpha m \rfloor = k - 1,$$

dobijamo da je

$$Q_\alpha^+(U) = u_{\lfloor \alpha m \rfloor + 1} = min^{\lfloor \alpha m \rfloor + 1}\{u_1, \ldots, u_m\}.$$

Znači, empirijski gornji α-kvantil uzorka dužine m je element uzorka koji je, uzimajući elemente od najmanjeg do najvećeg, $(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)$-ti po veličini.

Primer 2.2 *Posmatrajmo uzorak* $S = \{1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5\}$ *gde se svaki element javlja sa verovatnoćom* $1/8$. *To znači da je u pitanju slučajna promenljiva*

$$U : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Funkcije raspodele imaju sledeće vrednosti:

u	1	2	3	4	5
$P(U \leq u)$	0.125	0.25	0.5	0.625	1
$P(U < u)$	0	0.125	0.25	0.5	0.625

.

Za $\alpha = 90\%$ *imamo da je*

$$Q_{0.9}(U) = \inf\{u \mid P(U \leq u) \geq 0.9\} = \inf\{5\} = 5$$

$$\min^{\lceil 0.9\cdot 8\rceil} S = \min^{8}\{1,2,3,3,4,5,5,5\} = 5$$

$$Q^{+}_{0.9}(U) = \sup\{u \mid P(U < u) \leq 0.9\} = \sup\{1,2,3,4,5\} = 5$$
$$\min^{\lfloor 0.9\cdot 8\rfloor +1} S = \min^{8}\{1,2,3,3,4,5,5,5\} = 5.$$

Za $\alpha = 50\%$ *imamo da je*

$$Q_{0.5}(U) = \inf\{u \mid P(U \leq u) \geq 0.5\} = \inf\{3,4,5\} = 3$$
$$\min^{\lceil 0.5\cdot 8\rceil} S = \min^{4}\{1,2,3,3,4,5,5,5\} = 3$$

$$Q^{+}_{0.5}(U) = \sup\{u \mid P(U < u) \leq 0.5\} = \sup\{1,2,3,4\} = 4$$
$$\min^{\lfloor 0.5\cdot 8\rfloor +1} S = \min^{5}\{1,2,3,3,4,5,5,5\} = 4.$$

Neka uzorak $\{\xi^1, \ldots, \xi^m\}$ sadrži istorijske podatke o prinosu dobara iz portfolia x za m perioda trgovanja. Označimo očekivanje ovog uzorka sa $\bar{\xi}$,

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \xi^i.$$

Slučajna promenljiva gubitka portfolia je određena uzorkom

$$\{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\}.$$

Uzimajući da se vrednosti u uzorku javljaju sa verovatnoćom $1/m$, dobijamo raspodelu gubitka portfolia

$$Y : \begin{pmatrix} -x^T\xi^1 & \ldots & -x^T\xi^m \\ 1/m & \ldots & 1/m \end{pmatrix}.$$

Na osnovu gornjeg razmatranja zaključujemo da VaR problem optimizacije (2.5), sa nivoom poverenja α i očekivanim prinosom μ, postaje problem

$$\begin{aligned} \min_x \min^{\lceil \alpha m\rceil}\{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\} & \\ x^T\bar{\xi} \geq \mu & \\ x^T e = 1 & \\ x \geq 0. & \end{aligned} \tag{2.8}$$

Problem optimizacije (2.6), sa nivoom poverenja α i očekivanim prinosom μ, postaje problem

$$\begin{aligned} \max_x \min^{\lfloor (1-\alpha)m \rfloor + 1} \{x^T\xi^1, \ldots, x^T\xi^m\} & \\ x^T\bar{\xi} \geq \mu & \qquad (2.9) \\ x^T e = 1 & \\ x \geq 0. & \end{aligned}$$

Funkcije cilja problema (2.8) i (2.9) nisu diferencijabilne funkcije jer je slučajna promenljiva gubitka, kao i prinosa portfolia, diskretna slučajna promenljiva.

Glava 3

Problemi sa uređenim funkcijskim vrednostima

Ova glava je posvećena prikazu osobina problema sa uređenim funkcijskim vrednostima i postojećih algoritama za njihovo rešavanje. U pitanju je problem minimiziranja funkcije koja se nalazi na određenom mestu u uređenom nizu funkcijskih vrednosti. Funkcija cilja je neprekidna, ali ne i diferencijabilna. Algoritmi za rešavanje problema konvergiraju ka tački koja zadovoljava potreban uslov optimalnosti uveden od strane autora rada Andreani et al. [5]. Poglavlje je završeno razmatranjem veze problema sa uređenim funkcijskim vrednostima sa VaR problemom optimizacije.

3.1 Osobine problema sa uređenim funkcijskim vrednostima

Posmatrajmo funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_m$ koje preslikavaju skup $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ u skup realnih brojeva. Njihove vrednosti se mogu urediti za svako $x \in \Omega$, odnosno za svako x važi da je

$$f_{i_1(x)}(x) \leq f_{i_2(x)}(x) \leq \cdots \leq f_{i_m(x)}(x). \tag{3.1}$$

Definišimo funkciju $f : \Omega \to \mathbf{R}$ sa

$$f(x) = f_{i_p(x)}(x), \tag{3.2}$$

gde je $p \in I \equiv \{1, 2, \ldots, m\}$. Funkcija $f(x)$ se naziva *p-ta funkcijska vrednost* (p–order-value function), a problem minimizacije p-te funkcijske vrednosti

problem sa uređenim funkcijskim vrednostima (Order-Value Optimization) ili, kraće, *OVO problem*. Znači, OVO problem je problem

$$\begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &x \in \Omega \ , \end{aligned} \tag{3.3}$$

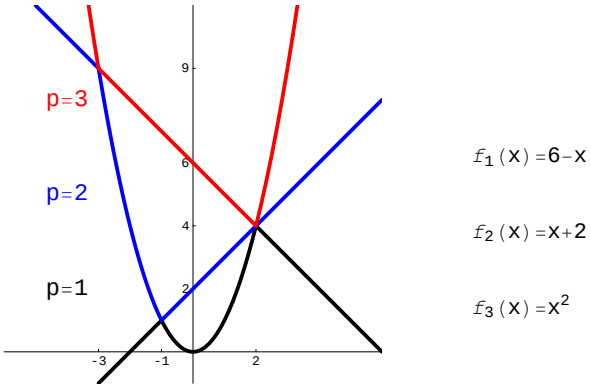
za niz $\{f_i\}_{i\in I}$ koji zadovoljava (3.1) i f definisano sa (3.2). U slučaju da je $p = 1$ imamo problem $\min\limits_{x\in\Omega} \min\limits_{i\in I} f_i(x)$ jer je tada

$$f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\},$$

dok je za $p = m$ u pitanju problem $\min\limits_{x\in\Omega} \max\limits_{i\in I} f_i(x)$ jer je

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}.$$

Na slici 3.1 je prikazan pojam p-te funkcijske vrednosti za primer $m = 3$, $n = 1$, $\Omega = \mathbf{R}$, gde je $f_1(x) = 6 - x$, $f_2(x) = x + 2$ i $f_3(x) = x^2$. Funkcija f je obeležena crnom bojom za $p = 1$, plavom za $p = 2$ i crvenom za $p = 3$.



Slika 3.1: p-ta funkcijska vrednost

Poznato je da je za neprekidnost funkcije cilja OVO problema dovoljna neprekidnost funkcija f_i, $i \in I$. Međutim, funkcija cilja nije diferencijabilna ni ako su funkcije f_i, $i \in I$ diferencijabilne.

Teorema 3.1 ([5]) *Neka su funkcije $f_i : \Omega \to \mathbf{R}^n$, $i \in I$ neprekidne na Ω. Tada je i p-ta funkcijska vrednost f neprekidna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, f nije neprekidna, odnosno za niz $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ koji teži ka x postoji podniz za čije elemente x_k važi da je
$|f(x_k) - f(x)| \geq \delta > 0$.

Za odabrani podniz postoji indeks $l \in I$ takav da je

$$f(x_k) = f_l(x_k) \tag{3.4}$$

za beskonačno mnogo elemenata x_k. Odavde važi da za te elemente postoji bar p indeksa $j \in I$ sa osobinom

$$f_l(x_k) \geq f_j(x_k), \tag{3.5}$$

kao i bar $m - p + 1$ indeksa $j \in I$ sa osobinom

$$f_l(x_k) \leq f_j(x_k). \tag{3.6}$$

Pošto je skup I konačan, a za beskonačno mnogo elemenata posmatranog podniza postoje indeksi $j \in I$ koji zadovoljavaju nejednakost (3.5), odnosno (3.6), skup indeksa j sa navedenom osobinom se javlja beskonačno mnogo puta. Zato, koristeći neprekidnost funkcija f_i, $i \in I$ i uzimajući graničnu vrednost nejednakosti (3.5) i (3.6), dobijamo da za beskonačno mnogo elemenata posmatranog podniza postoji bar p indeksa $j \in I$ sa osobinom

$$f_l(x) \geq f_j(x),$$

i bar $m - p + 1$ indeksa $j \in I$ sa osobinom

$$f_l(x) \leq f_j(x).$$

To znači da je

$$f(x) = f_l(x).$$

Koristeći neprekidnost funkcije f_l i (3.4) dobijamo

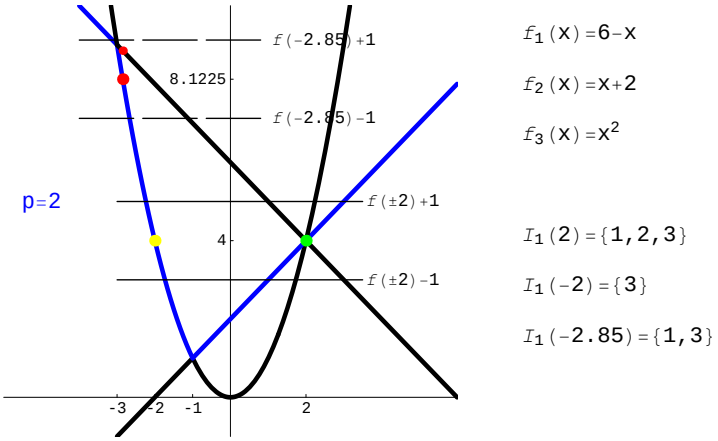
$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} f_l(x_k) = f_l(x) = f(x),$$

međutim to je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom da p-ta funkcijska vrednost nije neprekidna. □

Za dato $\varepsilon \geq 0$ i tačku $x \in \Omega$ definišemo skup indeksa funkcija koje se nalaze u ε okolini funkcije f:

$$I_\varepsilon(x) := \{j \in I \mid f(x) - \varepsilon \leq f_j(x) \leq f(x) + \varepsilon\}.$$

Napominjemo da skupu $I_0(x)$ pripada svaki indeks $j \in I$ sa osobinom da je $f_j(x) = f(x)$ i da za njega važi da je $I_0(x) \subset I_\varepsilon(x)$ za bilo koje $\varepsilon \geq 0$. Znači, p-ta funkcijska vrednost je u proizvoljnoj tački x definisana preko funkcija f_j za koje važi da $j \in I_0(x)$. Ako je skup $I_0(x)$ jednočlan, u tački x je funkcija f definisana preko jedne od funkcija f_i, pa je, pod pretpostavkom da su funkcije f_i, $i \in I$ neprekidno diferencijabilne na skupu Ω, i funkcija f diferencijabilna u tački x. Međutim, ukoliko je $\#I_0(x) > 1$, bar dve funkcije od funkcija f_i se seku u tački x, pa funkcija f nije diferencijabilna u njoj. Na slici 3.2 su navedeni i ilustrovani primeri skupa $I_\varepsilon(x)$ sa $\varepsilon = 1$ za primer sa prethodne slike sa $p = 2$.



Slika 3.2: $I_\varepsilon(x)$ za $\varepsilon = 1$ u tačkama $x = -2.85$, $x = -2$ i $x = 2$

Prilikom određivanja potrebnih uslova optimalnosti za OVO problem, Andreani, Dunder i Martínez su, u radu [5], uveli pojam ε-optimalne tačke. U pitanju je tačka u kojoj ne postoji opadajući pravac za funkcije koje se nalaze u ε okolini funkcije f. Neka su zadovoljene sledeće pretpostavke.

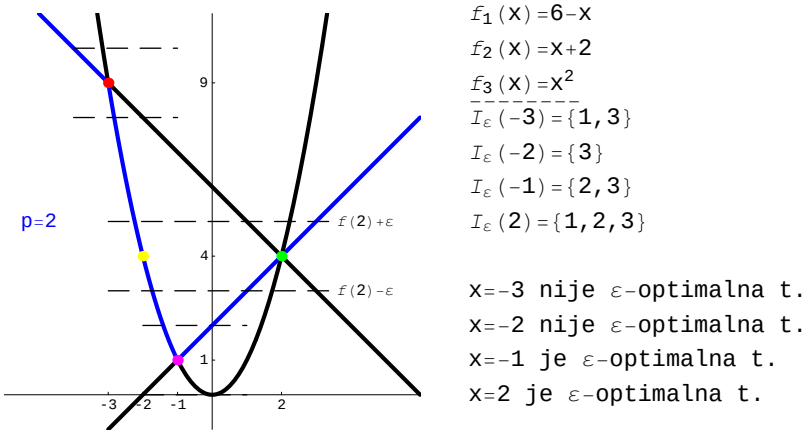
Pretpostavke 3.1

1. *Skup Ω je konveksan i zatvoren.*

2. *Funkcije $f_i(x)$, $i \in I$ su neprekidno diferencijabilne na skupu Ω.*

Definicija 3.2 *Tačka $x \in \Omega$ je ε-optimalna (ili ε-stacionarna) ako je skup $\{d \in \mathbf{R}^n \mid x + d \in \Omega, \nabla f_j(x)^T d < 0, \forall j \in I_\varepsilon(x)\}$ prazan.*

Pojam ε-optimalne tačke je ilustrovan na slici 3.3, koristeći primer sa slike 3.1 za problem minimizacije druge funkcijske vrednosti sa skupom ograničenja $\Omega = \mathbf{R}$. Primetimo da tačke $x = -3$ i $x = -2$ nisu ε-optimalne jer postoji pravac d, na primer $d = 1$, takav da je $-d < 0$ i $-6d < 0$, odnosno da je $-4d < 0$. Tačka $x = -1$ je ε-optimalna tačka pošto ne postoji pravac d takav da je $-2d < 0$ i $d < 0$. Ona je i lokalni minimum problema. Međutim, i tačka $x = 2$ je ε-optimalna tačka (ne postoji pravac d takav da je $-d < 0$, $d < 0$ i $4d < 0$), ali ona nije lokalni minimum. To znači da ε-optimalna tačka OVO problema ne mora da bude lokalni minimum tog problema. Sledeća teorema potvrđuje da je obrnuti odnos zadovoljen, odnosno da je lokalni minimum OVO problema ε-optimalna tačka.



Slika 3.3: ε-optimalne tačke problema $\min f_{i_2}(x),\ x \in \mathbf{R}$

Teorema 3.3 ([5]) *Neka važe pretpostavke 3.1. Neka je $x^* \in \Omega$ lokalni minimum OVO problema (3.3) i parametar ε proizvoljan nenegativan broj. Tada je x^* ε-optimalna tačka.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: x^* nije ε-optimalna tačka, odnosno da postoji pravac $d \in \mathbf{R}^n$ takav da je $x^* + d \in \Omega$ i da je $\nabla f_j(x^*)^T d < 0$ za svaki indeks $j \in I_\varepsilon(x^*)$. To znači da za taj pravac d postoji parametar $\bar{\alpha} > 0$ takav da za svaki indeks $j \in I_\varepsilon(x^*)$ i svaki parametar $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ važi

$$f_j(x^* + \alpha d) < f_j(x^*). \tag{3.7}$$

Razmatramo dva slučaja

1^o tačka x^* ima osobinu da je $f_1(x^*) = f_2(x^*) = \cdots = f_m(x^*)$, odnosno $I_\varepsilon(x^*) \equiv I$,

2^o $I_\varepsilon(x^*) \not\equiv I$.

1^o Postoje indeks $l \in I$ i parametar $\hat{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ takvi da je za svako $\alpha \in (0, \hat{\alpha}]$

$$f(x^* + \alpha d) = f_l(x^* + \alpha d).$$

Koristeći da je $f_l(x^*) = f(x^*)$ i da indeks $l \in I_\varepsilon(x^*)$, pa za njega važi nejednakost (3.7), dobijamo da je

$$f(x^* + \alpha d) = f_l(x^* + \alpha d) < f_l(x^*) = f(x^*)$$

za svako $\alpha \in (0, \hat{\alpha}]$.

2^o Definišimo parametre ε_1 i ε_2 na sledeći način:

$$\varepsilon_1 = \min_{f_j(x^*) < f(x^*)} \{f(x^*) - f_j(x^*)\},$$

$$\varepsilon_2 = \min_{f_j(x^*) > f(x^*)} \{f_j(x^*) - f(x^*)\}.$$

U slučaju kada je skup nad kojim se traži minimalna vrednost prazan, parametri ε_1 i ε_2 uzimaju vrednost ∞.
Za svaki indeks $j \in I$ postoji parametar $\tilde{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ takav da je za svako $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}]$

$$|f_j(x^* + \alpha d) - f_j(x^*)| < \frac{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}{2}.$$

Zato za indeks $k \in I$ sa osobinom da je za svako $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}]$

$$f_k(x^* + \alpha d) = f(x^* + \alpha d)$$

važi da je $f_k(x^*) = f(x^*)$. Navedeni indeks k pripada skupu $I_\varepsilon(x^*)$, što znači da zadovoljava (3.7). Dobili smo da je za svako $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}]$

$$f(x^* + \alpha d) = f_k(x^* + \alpha d) < f_k(x^*) = f(x^*).$$

U oba slučaja smo dobili da tačka x^* nije lokalni minimum funkcije f,što je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme. □

Znači, ε-optimalnost za svako $\varepsilon \geq 0$ je potreban uslov optimalnosti za probleme sa uređenim funkcijskim vrednostima. Primer koji potvrđuje da ovaj uslov nije dovoljan uslov je tačka $x = 2$ sa slike 3.3.

Posmatrajmo tačku $\bar{x}$ sa osobinom da je $\#I_\varepsilon(\bar{x}) = 1$ za neko $\varepsilon > 0$. Neka je, na primer, $I_\varepsilon(\bar{x}) = \{k\}$, $k \in I$. Znači indeks k je indeks za koji važi da je $f_k(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Primetimo da, na osnovu neprekidnosti funkcije f, postoji parametar $\delta > 0$ takav da je $f(x) = f_k(x)$ za svaku tačku x iz skupa Ω sa osobinom $||x - \bar{x}|| \leq \delta$. Iz diferencijabilnosti funkcije f_k sledi da je i funkcija f neprekidno diferencijabilna u δ okolini tačke $\bar{x}$.

Ako je skup indeksa u ε okolini funkcije f ε-optimalne tačke OVO problema jednočlan, tada je ε-optimalna tačka lokalni minimum problema.

Teorema 3.4 *Neka važe pretpostavke 3.1 i neka je za parametar $\varepsilon > 0$ tačka $x^* \in \Omega$ ε-optimalna tačka OVO problema (3.3). Ako je $\#I_\varepsilon(x^*) = 1$, onda je x^* lokalni minimum posmatranog problema.*

Dokaz. Pošto je $\#I_\varepsilon(x^*) = 1$, recimo $I_\varepsilon(x^*) = \{k\}$, postoji parametar $\delta > 0$ takav da je

$$f_k(x) = f(x) \tag{3.8}$$

za svaku tačku x iz okoline $\mathcal{B}(x^*, \delta) \subset \Omega$.
Tačka x^* je ε-optimalna, pa za svaki pravac $d \in \mathbf{R}^n$ sa osobinom da $x^* + d \in \Omega$ važi $\nabla f_k(x)^T d \geq 0$. To znači da za svaki pravac d postoji parametar $\bar{\alpha} > 0$ takav da je $f_k(x^* + \alpha d) \geq f_k(x^*)$, gde je $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$. Drugačije zapisano, postoji parametar $\bar{\alpha} > 0$ za koji važi da je

$$f_k(x) \geq f_k(x^*) \tag{3.9}$$

za svako $x \in \mathcal{B}(x^*, \bar{\alpha}) \subset \Omega$.
Koristeći (3.8) i (3.9) dobijamo da je

$$f(x) \geq f(x^*)$$

za svako $x \in \mathcal{B}(x^*, \min\{\delta, \bar{\alpha}\}) \subset \Omega$. $\square$

Neka je za $\varepsilon > 0$ tačka $x \in \Omega$ ε-optimalna tačka. Smanjivanjem vrednosti ε, tačka x može da izgubi ε-optimalnost. Primer koji potvrđuje navedenu osobinu je $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = x^2 - 1/2$, $\Omega = \mathbf{R}$ i $p = 3$. Skup indeksa $I_{\frac{1}{2}}(0) = \{1, 2, 3\}$, pa je $x = 0$ $\frac{1}{2}$-optimalna tačka. Međutim, $I_{\frac{1}{4}}(0) = \{1, 2\}$, pa se vrednost funkcija f_1 i f_2 smanjuje za negativan pravac. Znači tačka $x = 0$ nije $\frac{1}{4}$-optimalna tačka.

3.2 Primarna Košijeva metoda za rešavanje problema sa uređenim funkcijskim vrednostima

Prilikom rešavanja problema glatke optimizacije iterativnom metodom, u našem slučaju se za sledeću iteraciju uzima tačka koja se nalazi na opadajućem pravcu. Funkcija cilja u problemu određivanja funkcijske vrednosti nije glatka, pa ne možemo da govorimo o opadajućem pravcu funkcije cilja. Međutim, ako su funkcije f_i, $i \in I$ neprekidno diferencijabilne, možemo da posmatramo njihove opadajuće pravce. Razmotrimo kako pravac koji je među pravcima opadanja za funkcije f_i najbrži i pravac koji je pravac opadanja za svaku funkciju f_i utiču na vrednost funkcije cilja OVO problema. Pošto se prilikom utvrđivanja potrebnog uslova za OVO problem proverava da li postoji pravac koji je opadajući pravac za sve funkcije f_i sa indeksom $i \in I_\varepsilon(x)$, razmatramo samo funkcije sa indeksom iz skupa $I_\varepsilon(x)$.

Pretpostavimo da su funkcije f_i, $i \in I$ neprekidno diferencijabilne na skupu Ω. Posmatrajmo proizvoljnu tačku $x \in \Omega$ i dati parametar $\varepsilon \geq 0$. Za proizvoljno fiksirano $d \in \mathbf{R}^n$ takvo da je $x + d \in \Omega$, označimo sa $S(d)$ skup čiji su elementi $\nabla f_i(x)^T d$, gde je $i \in I_\varepsilon(x)$,

$$S(d) = \{\nabla f_i(x)^T d \mid i \in I_\varepsilon(x)\}.$$

Upoređujemo pravce određene potproblemom

$$\min_d \max S(d) \tag{3.10}$$

i

$$\min_d \min S(d)\ . \tag{3.11}$$

Odvojeno razmatramo slučaj kada je tačka x ε-optimalna tačka i kada ona to nije.

Ako tačka x nije ε-optimalna tačka, odnosno ako postoji bar jedan pravac $\bar{d}$ takav da je $\nabla f_i(x)^T \bar{d} < 0$ za svaki indeks $i \in I_\varepsilon(x)$, onda su svi elementi skupa $S\left(\bar{d}\right)$ negativni, pa su i $\min S\left(\bar{d}\right)$ i $\max S\left(\bar{d}\right)$ negativni. Za pravac d koji nije pravac opadanja za svako $f_i(x)$, $i \in I_\varepsilon(x)$, skup $S(d)$ ima bar jedan nenegativan element, pa je $\max S(d)$ nenegativan, dok $\min S(d)$ može biti nenegativan i negativan. Sada možemo da zaključimo da je rešenje potproblema (3.10) jedan od pravaca $\bar{d}$. Pošto je $\bar{d}$ opadajući pravac za

svaku funkciju f_i sa $i \in I_\varepsilon(x)$, i funkcija cilja OVO problema opada duž tog pravca. Rešavanjem potproblema (3.11) dobija se najbrži pravac opadanja među opadajućim pravcima funkcija $f_i(x)$, $i \in I_\varepsilon(x)$. On može biti pravac koji nije opadajući pravac za svaku funkciju sa indeksom iz skupa $I_\varepsilon(x)$, pa je moguće da se po njemu ne smanjuje vrednost funkcije cilja OVO problema.

Ukoliko je tačka x ε-optimalna, tada za svaki pravac d postoji indeks j iz $I_\varepsilon(x)$ takav da je $\nabla f_j(x)^T d \geq 0$. U ovom slučaju, skup $S(d)$ ima bar jedan nenegativan element, pa je $\max S(d)$ nenegativan, a $\min S(d)$ može biti i negativan. Vrednost funkcije cilja potproblema (3.10) je nula u rešenju. To znači da je rešenje $d = 0$ ili za neki od indeksa i iz $I_\varepsilon(x)$ važi da je $\nabla f_i(x) = 0$. Rešenje problema (3.11) može biti i nenula pravac.

Znači, pravac koji je rešenje potproblema (3.11) nije pogodan za određivanje pravca po kojem funkcija cilja OVO problema opada. Međutim, potproblem

$$\min_{d} \max_{i \in I_\varepsilon(x)} \nabla f_i(x)^T d, \tag{3.12}$$

što je potproblem (3.10), je pogodan iz dva razloga:

1. Ako tačka x nije ε-optimalna, rešenje potproblema (3.12) je pravac po kojem se smanjuje vrednost funkcije f.

2. Za ε-optimalnu tačku, minimalna vrednost funkcije cilja potproblema (3.12) je nula. Važi i obrnuto. Kada je vrednost funkcije cilja potproblema (3.12) nula tada je $\max S(d) \geq 0$, pa ne postoji pravac koji je opadajući pravac funkcije f_i za svako $i \in I_\varepsilon(x)$, što znači da je tačka x ε-optimalna tačka.

Andreani, Dunder i Martínez su problem (3.10) koristili u algoritmu koju su nazvali primarna Košijeva metoda. Algoritam se zasniva na metodi linijskog pretraživanja (line search), pri čemu se pravac traženja određuje rešavanjem konveksnog potproblema postupkom oblasti poverenja (trust region).

Algoritam PKovo [5]

Neka su date vrednosti $x^0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$, $\eta \in (0, 1]$, $\theta \in (0, 1)$ i $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1$.

Korak 1. Definisati $M_k(d) := \max_{j \in I_\varepsilon(x^k)} \nabla f_j(x^k)^T d$.

Korak 2. Odrediti $\bar{d}^k$ kao rešenje problema

$$\min_d \ M_k(d)$$
$$\text{tako da } x^k + d \in \Omega, \ ||d||_\infty \leq \Delta.$$

Korak 3. Uzeti d^k takvo da je

$$M_k(d^k) \leq \eta M_k(\bar{d}^k), \ x^k + d^k \in \Omega, \ ||d^k||_\infty \leq \Delta$$

Korak 4. Ako je $M_k(d^k) = 0$, onda je $x^* = x^k$, inače preći na korak 5.

Korak 5. Uzeti da je $\alpha = 1$.

Korak 6. Ako je

$$f(x^k + \alpha d^k) > f(x^k) + \theta\alpha M_k(d^k),$$

uzeti novo α iz skupa $[\sigma_{min}\alpha, \sigma_{max}\alpha]$ i ponoviti korak 6, inače preći na sledeći korak.

Korak 7. Uzeti da je $\alpha^k = \alpha$ i $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$.

Potproblem u drugom koraku je ekvivalentan sa konveksnim problemom

$$\min_{(d,w)} w$$
$$\nabla f_i(x)^T d \leq w, \ i \in I_\varepsilon(x^k)$$
$$x^k + d \in \Omega, \quad ||d||_\infty \leq \Delta \ .$$

Za problem $\min_x f(x)$, gde je $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ glatka funkcija, Košijevom tačkom p_k^c za tačku x^k se naziva tačka

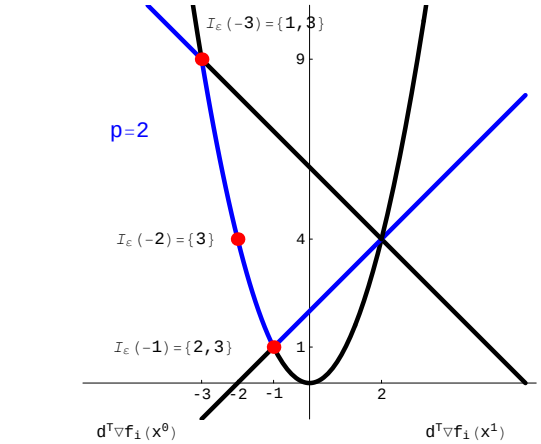
$$p_k^c = -\tau_k \frac{\Delta_k}{\|f(x^k)\|} \nabla f(x^k),$$

gde je

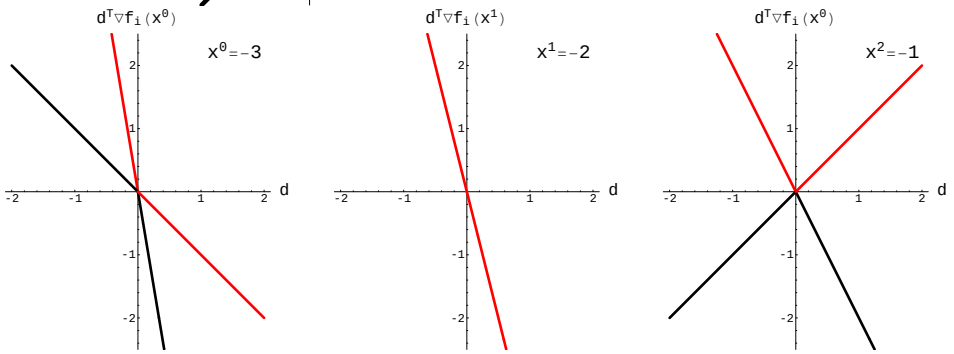
$$\tau_k = \begin{cases} 1, & \nabla f(x^k)^T B_k \nabla f(x^k) \leq 0 \\ \min\left\{ \frac{\|\nabla f(x^k)\|^3}{\Delta_k \nabla f(x^k)^T B_k \nabla f(x^k)}, 1 \right\}, & \text{inače} \end{cases},$$

pri čemu je B_k simetrična matrica, a Δ_k poluprečnik oblasti poverenja. U slučaju da je $\Omega = \mathbf{R}$ i $\#I_\varepsilon(x^k) = 1$, rešenje potproblema algoritma PKovo je baš Košijeva tačka.

Na slici 3.4 su ilustrovane funkcije cilja potproblema u primarnom Košijevom algoritmu za iteracije za problem minimizacije druge funkcijske vrednosti sa skupom ograničenja $\Omega = \mathbf{R}$ sa slike 3.1. Za početnu tačku je uzeta tačka $x = -3$, a za granicu $\Delta = 1$. Funkcije cilja $M_i(d)$ su obojene crvenom bojom.



$$f_1(x) = 6 - x$$
$$f_2(x) = x + 2$$
$$f_3(x) = x^2$$
$$M_0(d) = \max\{-d, -6d\} =$$
$$= \begin{cases} -6d, & d < 0 \\ -d, & d > 0 \end{cases}$$
$$M_1(d) = \max\{-4d\} = -4d$$
$$M_2(d) = \max\{d, -2d\} =$$
$$= \begin{cases} -2d, & d < 0 \\ d, & d > 0 \end{cases}$$



Slika 3.4: Iteracije i funkcije cilja potproblema primarne Košijeve metode problema $\min f_{i_2}(x),\ x \in \mathbf{R}$ sa početnom tačkom $x = -3$

U radu [5] je dokazano da pod pretpostavkama koje slede, važi da je algoritam dobro definisan (teorema 2.3.) i da je rešenje koje se njime dobija ε-optimalna tačka (teorema 2.4.).

Pretpostavke 3.2

1. *Skup Ω je zatvoren i konveksan.*

2. *Funkcije* $f_i \in C^1(\mathbf{R}^n)$ *za svako* $i \in I$.

3. *Gradijenti funkcija su ograničeni po normi, za* $x \in \Omega$ *i* $j \in I$

$$||\nabla f_j(x)||_\infty \leq c$$

4. *Gradijenti funkcija su i Lipšic neprekidni, za* $x, y \in \Omega$, *i* $j \in I$

$$||\nabla f_j(y) - \nabla f_j(x)||_\infty \leq L||y - x||_\infty$$

Teorema 3.5 ([5]) *Pod pretpostavkama 3.2, algoritam PKovo je dobro definisan i zaustavlja se ako i samo ako je došao do* ε*-optimalne tačke.*

Teorema 3.6 ([5]) *Pod pretpostavkama 3.2, granična vrednost niza tačaka generisanih algoritmom PKovo je* ε*-optimalna tačka.*

Algoritam primarna Košijeva metoda je uopšten u radu Andreani et al. [7], tako što je umesto linearne aproksimacije funkcija f_i korištena njihova kvadratna aproksimacija. I ovim algoritmom se dobija ε-optimalna tačka. Pokazano je da je pod određenim uslovima algoritam kvadratno konvergentan.

Autori rada [6] su preformulisali OVO problem u nelinearan problem koji je gladak. Pokazali su da je globalno rešenje OVO problema određeno pronalaženjem globalnog rešenja tog nelinearnog problema. Takođe je dokazano da za lokalno rešenje OVO problema važi da je lokalno rešenje nelinearnog problema, ali i da obrnuto ne mora da važi, odnosno da lokalno rešenje nelinearnog problema ne mora biti lokalno rešenje OVO problema.

3.3 Primeri problema sa uređenim funkcijskim vrednostima

U statistici i u finansijama postoje problemi koji predstavljaju probleme sa uređenim funkcijskim vrednostima.

U statistici se problemi sa uređenim funkcijskim vrednostima javljaju pri ocenjivanju parametara. Posmatrajmo model

$$M_n(t, x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

u kojem je potrebno oceniti parametre x_1, x_2, ..., x_n. Neka se ocena vrši na osnovu uzorka

$$\{(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots, (t_m, y_m)\}.$$

Cilj je da se minimizira razlika između stvarnih i modeliranih vrednosti, što se postiže minimiziranjem funkcija

$$f_i(x) = (M_n(t_i, x) - y_i)^2, \quad i = 1, \ldots, m \ .$$

Recimo da imamo informaciju da 10% uzorka nisu validni podaci, ali ne znamo koji su ti podaci. Razlika između stvarnih i modeliranih vrednosti za njih narušava tačnost modela, pa je potrebno da se oni isključe iz razmatranja. To znači da je cilj da se minimiziraju razlike za $90\%m$ podataka. Ako se za funkciju f uzme funkcija koja se nalazi na p-tom mestu u poretku funkcija f_i, odnosno uzme se da je $f(x) = f_{i_{p(x)}}(x)$, gde je $p \approx 90\%m$, onda OVO problem

$$\begin{aligned} &\min_x \ f(x) \\ &\ x \in \Omega \ , \end{aligned}$$

gde je Ω prostor parametara, daje traženu ocenu parametara.

U finansijama se javlja potreba za donošenjem odluka koje imaju svoje troškove. Troškovi za moguće scenarie se mogu izraziti funkcijama $f_i(x)$, gde $i = 1, \ldots, m$, $x \in \Omega$, pri čemu je m broj scenaria, a Ω prostor odluka. Ukoliko se želi odbaciti određen procenat najpesimističnijih scenaria, na primer 10%, ostaje da se minimiziraju troškovi u 90% slučajeva. Znači minimizira se $90\%m$-ta funkcijska vrednost. Na ovaj način se može povezati problem optimizacije VaR mere rizika sa OVO problemom.

3.3.1 Veza optimizacije portfolia sa OVO problemima

Raspodelu slučajne promenljive Y, što je gubitak portfolia nakon posmatranog perioda, odredimo na osnovu istorijskih podataka o prinosu dobara koji figurišu u portfoliu. Neka je $\{\xi^1, \ldots, \xi^m\}$ uzorak prinosa portfolia za m perioda trgovanja. Označimo srednju vrednost uzorka sa $\bar{\xi}$, odnosno

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \xi^i.$$

Uzorak gubitka portfolia, sa vrednostima u rastućem poretku, je

$$U = \{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\},$$

pa je slučajna promenljiva Y diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom

$$Y : \begin{pmatrix} -x^T\xi^1 & \ldots & -x^T\xi^m \\ 1/m & \ldots & 1/m \end{pmatrix}.$$

U prethodnom poglavlju smo videli da je $VaR_\alpha(Y)$ mera rizika empirijski α-kvantil uzorka U, kao i da je empirijski kvantil nivoa α uzorka dužine m vrednost iz uzorka koja je $\lceil \alpha m \rceil$-ta po veličini u poretku od najmanjeg ka najvećem elementu uzorka. Ovo smo zapisali kao

$$VaR_\alpha(Y) = min^{\lceil \alpha m \rceil} U$$

i time dobili da je problem optimizacije portfolia sa VaR merom rizika, definisanom preko Y, oblika

$$\begin{aligned} \min_x \min^{\lceil \alpha m \rceil} \{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\} & \\ x^T\bar{\xi} &\geq \mu \\ x^T e &= 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Uzimajući za

$$f_i(x) = -x^T\xi^i, \quad i = 1, \ldots, m$$

i za

$$f(x) = f_{i_p}(x), \quad p = \lceil \alpha m \rceil$$

prethodni problem se može zapisati kao

$$\begin{aligned} \min_x f(x) = f_{i_p}(x) & \\ x^T\bar{\xi} &\geq \mu, \\ x^T e &= 1, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

što je p-OVO problem sa $p = \lceil \alpha m \rceil$.

Pošto je problem optimizacije portfolia koristeći VaR meru rizika u stvari OVO problem, on se može rešiti algoritmima za rešavanje OVO problema.

Glava 4

Određivanje SVaR optimalnog portfolia

Problem optimizacije sa VaR merom rizika nije gladak problem, pa se za njegovo rešavanje ne mogu primeniti algoritmi za rešavanje nelinearnih glatkih problema optimizacije. Gaivoronski i Pflug su, u radu [21], predložili da se problem reši glačanjem funkcije cilja. Ova glava je posvećena prikazivanju i analiziranju njihovog algoritma, kao i njegovom poređenju sa postupkom za rešavanje OVO problema. Pokazaćemo da je, u slučaju jedinstvenosti globalnog rešenja VaR problema optimizacije, granična vrednost niza globalnih rešenja izglačanih VaR problema optimizacije, sa parametrom koji teži nuli, baš globalno rešenje VaR problema optimizacije.

4.1 SVaR optimalni portfolio

Najveći izazov pri rešavanju VaR problema optimizacije predstavljaju problemi u kojima je prinos portfolia određen na osnovu istorijskih podataka. Videli smo da ti problemi nisu konveksni, kao i da njihova funkcija cilja nije diferencijabilna.

Neka su istorijski podaci o prinosu dobara iz portfolia x, za m perioda trgovanja, dati uzorkom $\{\xi^1, \ldots, \xi^m\}$. Neka je $\bar{\xi}$ srednja vrednost uzorka,

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \xi^i.$$

Slučajna promenljiva gubitka portfolia je određena uzorkom

$$\{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\}.$$

Uzimajući da se vrednosti u uzorku javljaju sa verovatnoćom $1/m$, za raspodelu gubitka portfolia dobijamo

$$Y : \begin{pmatrix} -x^T\xi^1 & \ldots & -x^T\xi^m \\ 1/m & \ldots & 1/m \end{pmatrix}.$$

VaR problem optimizacije sa nivoom poverenja α i očekivanim prinosom μ je

$$\begin{aligned} \min_x \min^{\lceil \alpha m \rceil}\{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\} & \\ x^T\bar{\xi} \geq \mu & \qquad (4.1) \\ x^T e = 1 & \\ x \geq 0. & \end{aligned}$$

Kako funkcija cilja $\min^{\lceil \alpha m \rceil}\{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\}$ nije glatka potrebno je izvršiti njenu transformaciju.

Za funkcije $f_i : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$ definišemo funkciju

$$\begin{aligned} F(k, x) := \{f_{i_j}(x) \mid (j < m - k \Rightarrow f_{i_j}(x) \leq f_{i_{m-k}}(x)), \\ (j > m - k \Rightarrow f_{i_j}(x) \geq f_{i_{m-k}}(x))\}, \end{aligned}$$

gde su $i_j \in I \equiv \{1, \ldots, m\}$, $j = 1, \ldots, m$. Znači, $F(k, x) = f_{i_{m-k}}(x)$, gde je

$$\underbrace{f_{i_1}(x) \leq \cdots \leq f_{i_{m-k-1}}(x)}_{m-k-1} \leq f_{i_{m-k}}(x) \leq \underbrace{f_{i_{m-k+1}}(x) \leq \cdots \leq f_{i_m}(x)}_{k}.$$

Za $k = m - 1$ i $k = 0$ imamo da je

$$F(m-1, x) = \min_{i \in I} f_i(x) \quad \text{i} \quad F(0, x) = \max_{i \in I} f_i(x).$$

Primetimo da je funkcija $F(m-p, x)$ p-ta funkcijska vrednost. Na osnovu teoreme 3.1 imamo da je funkcija F neprekidna.

Neka je $\varepsilon \geq 0$ parametar glačanja. Neka je za fiksiran indeks i

$$M^i = I \setminus \{i\},$$

$$\Lambda_k^i \subset M^i, \quad \#\Lambda_k^i = k$$

i

$$\Theta_k^i \text{ familija svih različitih skupova } \Lambda_k^i.$$

Najjednostavnija glatka transformacija funkcije $F(k,x)$, predložena od strane Gaivoronskog i Pfluga, je

$$F_\varepsilon(k,x) = \frac{1}{C_\varepsilon(x)} \sum_{i \in I_\varepsilon(x)} c_i^\varepsilon(x) f_i(x),$$

gde je

$$c_i^\varepsilon(x) = \sum_{\Lambda_k^i \in \Theta_k^i} \prod_{j \in \Lambda_k^i} \varphi_\varepsilon\left(f_i(x) - f_j(x)\right) \prod_{j \in M^i \setminus \Lambda_k^i} \varphi_\varepsilon\left(f_j(x) - f_i(x)\right),$$

$$\varphi_\varepsilon(z) = \begin{cases} 1 & z \le 0 \\ 1 - \frac{16}{3\varepsilon^3} z^3 & 0 \le z \le \frac{\varepsilon}{4} \\ \frac{5}{6} + \frac{2}{3} z - \frac{8}{\varepsilon^2} z^2 + \frac{16}{3\varepsilon^3} z^3 & \frac{\varepsilon}{4} \le z \le \frac{3\varepsilon}{4} \\ \frac{16}{3} - \frac{16}{\varepsilon} z + \frac{16}{\varepsilon^2} z^2 - \frac{16}{3\varepsilon^3} z^3 & \frac{3\varepsilon}{4} \le z \le \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \le z \end{cases},$$

$$C_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I_\varepsilon(x)} c_i^\varepsilon(x)$$

i

$$I_\varepsilon(x) := \{j \in I \mid F(k,x) - \varepsilon \le f_j(x) \le F(k,x) + \varepsilon\}.$$

Gaivoronski i Pflug su definisali čitavu familiju glatkih funkcija kojima se može transformisati funkcija cilja problema (4.1). U naredne dve teoreme navodimo tu familiju funkcija i njene osobine.

Teorema 4.1 ([21]) *Pod pretpostavkom da su funkcije f_i, $i \in I$, dva puta neprekidno diferencijabilne, a funkcija φ_ε, za proizvoljno $\varepsilon \ge 0$, definisana za $z \in \mathbf{R}$ takva da je*

1. *$\varphi_\varepsilon \in C^2(\mathbf{R})$ za $\varepsilon > 0$,*
2. *za svako fiksirano $z \le 0$ $\varphi_\varepsilon(z) \to 1$ kada $\varepsilon \to 0$,*
3. *za svako fiksirano $z > 0$ $\varphi_\varepsilon(z) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$,*

4. za svako $\varepsilon \geq 0$ i $z \in \mathbf{R}$ važi da je $\varphi_\varepsilon(z) \geq 0$, a za svako $\varepsilon \geq 0$ i $z \leq 0$ $\varphi_\varepsilon(z) \geq \chi_0$ za neko $\chi_0 > 0$,

funkcija

$$F_\varepsilon(k,x) = \frac{1}{C_\varepsilon(x)} \sum_{i \in I} c_i^\varepsilon(x) f_i(x), \tag{4.2}$$

gde je

$$c_i^\varepsilon(x) = \sum_{\Lambda_k^i \in \Theta_k^i} \prod_{j \in \Lambda_k^i} \varphi_\varepsilon\left(f_i(x) - f_j(x)\right) \prod_{j \in M^i \setminus \Lambda_k^i} \varphi_\varepsilon\left(f_j(x) - f_i(x)\right), \tag{4.3}$$

$$C_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} c_i^\varepsilon(x), \tag{4.4}$$

je dva puta neprekidno diferencijabilna za svako $\varepsilon > 0$ i za svako fiksirano x važi da je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(k,x) = F(k,x). \tag{4.5}$$

Teorema 4.2 ([21]) *Ako se pretpostavkama teoreme 4.1 doda uslov da za funkciju φ_ε još važi da je $\varphi_\varepsilon(z) = 0$ za $z > \varepsilon$, tada je funkcija (4.2) ekvivalentna funkciji*

$$F_\varepsilon(k,x) = \frac{1}{C_\varepsilon(x)} \sum_{i \in I_\varepsilon(x)} c_i^\varepsilon(x) f_i(x),$$

gde je

$$C_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I_\varepsilon(x)} c_i^\varepsilon(x)$$

i

$$I_\varepsilon(x) := \{j \in I \mid F(k,x) - \varepsilon \leq f_j(x) \leq F(k,x) + \varepsilon\}.$$

Ako je $f_i = -x^T \xi^i$ za $i = 1, \ldots, m$, za funkciju F važi da je

$$F(m - \lceil \alpha m \rceil, x) = \min\nolimits^{\lceil \alpha m \rceil} \{-x^T \xi^1, \ldots, -x^T \xi^m\}.$$

VaR problem (4.1), zapisan koristeći funkciju F, ima oblik

$$\begin{aligned} \min_x & F(m-p,x) \\ & x^T\bar{\xi} \geq \mu \\ & x^T e = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

gde je $f_i(x) = -x^T\xi^i$ i $p = \lceil \alpha m \rceil$, pa gladak problem optimizacije

$$\begin{aligned} \min_x & F_\varepsilon(m-p,x) \\ & x^T\bar{\xi} \geq \mu \\ & x^T e = 1 \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

gde je ε parametar glačanja, nazivamo *SVaR problem optimizacije* (od engleskog izraza Smoothed VaR), a njegovo rešenje *SVaR optimalni portfolio*.

VaR problem (4.6) se može rešiti rešavanjem niza problema (4.7) sa smanjivanjem parametra glačanja do nule.

Navodimo algoritam za pronalaženje VaR optimalnog portfolia primenom SVaR problema optimizacije. Radi kraćeg zapisa, označimo skup ograničenja sa Ω,

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T\bar{\xi} \geq \mu,\ x^T e = 1,\ x \geq 0\}.$$

Algoritam SVaR

Neka su dati početna tačka $x^0 \in \Omega$, parametar glačanja $\varepsilon > 0$ i tolerancija *tol*. Neka je $k = 0$.

Korak 1. Odrediti $F_\varepsilon(m-p, x^k)$.

Korak 2. Odrediti x^{k+1} kao rešenje problema $\min_x F_\varepsilon(m-p,x)$, $x \in \Omega$.

Korak 3. Ako je $||x^{k+1} - x^k|| \leq tol$, onda je $x^* = x^{k+1}$, inače je $k = k+1$.

Korak 4. Uzeti da je $\varepsilon = \varepsilon/4$ i preći na korak 1.

Pokazujemo da, kada parametar glačanja teži nuli, niz vrednosti funkcije cilja u optimalnim tačkama SVaR problema optimizacije teži vrednosti funkcije cilja VaR problema optimizacije u optimalnom portfoliu.

Teorema 4.3 *Neka je* $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ *niz sa pozitivnim članovima za koji važi da* $\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = 0$. *Neka je* x^{VaR} *globalno rešenje VaR problema optimizacije (4.6), a* x^ν *globalno rešenje SVaR problema (4.7) sa parametrom* ε_ν. *Tada je*

$$\lim_{\nu\to\infty} F_{\varepsilon_\nu}(k, x^\nu) = F(k, x^{VaR}).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\bar\epsilon > 0$ takvo da za svako $\nu_0 \in \mathbf{N}$ postoji $\bar\nu \geq \nu_0$ za koje važi da je

$$|F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{VaR})| \geq \bar\epsilon.$$

Na osnovu teoreme 4.1 imamo da je $\lim_{\varepsilon_\nu\to 0} F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{VaR}) = F(k, x^{VaR})$, kao i da za fiksirano $x^{\bar\nu}$ važi $\lim_{\varepsilon_\nu\to 0} F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{\bar\nu}) = F(k, x^{\bar\nu})$. To znači da za $\bar\epsilon$ postoji $\tilde\nu_0 \in \mathbf{N}$ takvo da za svako $\nu \geq \tilde\nu_0$ važi $|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{VaR}) - F(k, x^{VaR})| < \bar\epsilon$ i postoji $\hat\nu_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $\nu \geq \hat\nu_0$ važi $|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{\bar\nu})| < \bar\epsilon$. Odnosno, za svako $\nu \geq \max\{\tilde\nu_0, \hat\nu_0\}$ važi:

$$|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{VaR}) - F(k, x^{VaR})| < \bar\epsilon \tag{4.8}$$

i

$$|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{\bar\nu})| < \bar\epsilon\ . \tag{4.9}$$

Na osnovu polazne pretpostavke za $\max\{\tilde\nu_0, \hat\nu_0\}$ postoji $\bar\nu \geq \max\{\tilde\nu_0, \hat\nu_0\}$ takvo da je $|F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{VaR})| \geq \bar\epsilon$. Posebno ćemo razmotriti slučaj kada je $F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{VaR}) \geq \bar\epsilon$ i kada je $F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{VaR}) \leq -\bar\epsilon$.

1^o $F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{VaR}) \geq \bar\epsilon$
Koristeći nejednakost (4.8) i da je $x^{\bar\nu}$ globalno rešenje izglačanog VaR problema sa parametrom $\varepsilon_{\bar\nu}$, na osnovu čega je

$$F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{VaR}) - F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) \geq 0,$$

dobijamo da je

$$\begin{gathered}\bar\epsilon > F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{VaR}) - F(k, x^{VaR}) = \\ = F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{VaR}) - F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) + F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{VaR}) \geq \\ \geq F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{VaR}) \geq \bar\epsilon.\end{gathered}$$

Pošto je

$$\bar\epsilon > \bar\epsilon$$

netačno, došli smo do kontradikcije.

2^o $F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{VaR}) \leq -\bar\epsilon$, pa je $F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) \leq F(k, x^{VaR}) - \bar\epsilon$. Uzimajući nejednakost (4.9) baš za $x^{\bar\nu}$ dobijamo da je

$$-\bar\epsilon < F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^{\bar\nu}) \leq F(k, x^{VaR}) - \bar\epsilon - F(k, x^{\bar\nu}),$$

odakle je

$$0 < F(k, x^{VaR}) - F(k, x^{\bar\nu}).$$

Dobili smo da je $F(k, x^{\bar\nu}) < F(k, x^{VaR})$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je x^{VaR} globalni minimum VaR problema.

U oba slučaja smo došli do kontradikcije sa polaznom pretpostavkom. Znači, za svako $\epsilon > 0$ postoji $\nu_0 \in \mathbf{N}$ takvo da za svako $\nu \geq \nu_0$ važi nejednakost

$$|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^\nu) - F(k, x^{VaR})| < \epsilon,$$

što smo i hteli dokazati. □

Ako niz SVaR optimalnih portfolia konvergira kada parametar glačanja teži nuli, tada niz vrednosti funkcije cilja u optimalnim tačkama SVaR problema optimizacije teži vrednosti funkcije cilja VaR problema optimizacije u graničnoj vrednosti SVaR optimalnih portfolia.

Teorema 4.4 *Neka je* $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ *niz sa pozitivnim članovima za koji važi da* $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$. *Neka je* x^ν *globalno rešenje SVaR problema optimizacije (4.7) sa parametrom* ε_ν. *Ako je* $\lim_{\nu\to\infty} x^\nu = x^*$, *tada je*

$$\lim_{\nu\to\infty} F_{\varepsilon_\nu}(k, x^\nu) = F(k, x^*).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\bar\epsilon > 0$ takvo da za svako $\nu_0 \in \mathbf{N}$ postoji $\bar\nu \geq \nu_0$ za koje važi nejendakost

$$|F_{\varepsilon_{\bar\nu}}(k, x^{\bar\nu}) - F(k, x^*)| \geq \bar\epsilon.$$

Na osnovu teoreme 4.1 imamo da je $\lim_{\varepsilon_\nu\to 0} F_{\varepsilon_\nu}(k, x^*) = F(k, x^*)$, kao i da za fiksirano $x^{\bar\nu}$ važi $\lim_{\varepsilon_\nu\to 0} F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{\bar\nu}) = F(k, x^{\bar\nu})$. To znači da za $\bar\epsilon/3$ postoji $\tilde\nu_0 \in \mathbf{N}$ takvo da za svako $\nu \geq \tilde\nu_0$ važi $|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^*) - F(k, x^*)| < \dfrac{\bar\epsilon}{3}$ i postoji

$\hat{\nu_0} \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $\nu \geq \hat{\nu_0}$ važi $|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^{\bar{\nu}})| < \frac{\bar{\epsilon}}{3}$. Odnosno, za svako $\nu \geq \max\{\tilde{\nu_0}, \hat{\nu_0}\}$ važi

$$|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^*) - F(k, x^*)| < \frac{\bar{\epsilon}}{3} \tag{4.10}$$

i

$$|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^{\bar{\nu}})| < \frac{\bar{\epsilon}}{3}\ . \tag{4.11}$$

Na snovu polazne pretpostavke za $\max\{\tilde{\nu_0}, \hat{\nu_0}\}$ postoji $\bar{\nu} \geq \max\{\tilde{\nu_0}, \hat{\nu_0}\}$ takvo da je $|F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^{VaR})| \geq \bar{\epsilon}$. Posebno ćemo razmotriti slučaj kada je $F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^{VaR}) \geq \bar{\epsilon}$ i kada je $F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^{VaR}) \leq -\bar{\epsilon}$.

1^o $F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^{VaR}) \geq \bar{\epsilon}$
Koristeći nejednakost (4.10) i da je $x^{\bar{\nu}}$ globalno rešenje SVaR problema sa parametrom $\varepsilon_{\bar{\nu}}$, na osnovu čega je

$$F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^*) - F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) \geq 0,$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\epsilon}}{3} &> F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^*) - F(k, x^*) = \\ &= F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^*) - F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) + F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^*) \geq \\ &\geq F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^*) \geq \bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

Pošto je

$$\frac{\bar{\epsilon}}{3} > \bar{\epsilon}$$

netačno, došli smo do kontradikcije.

2^o $F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^*) \leq -\bar{\epsilon}$
Na osnovu nejednakosti (4.11) baš za $x^{\bar{\nu}}$ i neprekidnosti funkcije F imamo da je

$$-\frac{\bar{\epsilon}}{3} < F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^{\bar{\nu}}) < \frac{\bar{\epsilon}}{3}$$

i

$$-\frac{\bar{\epsilon}}{3} < F(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^*) < \frac{\bar{\epsilon}}{3}.$$

Sabiranjem levih nejednakosti ovih nejednakosti dobijamo da je

$$\frac{-2\bar{\epsilon}}{3} < F_{\varepsilon_{\bar{\nu}}}(k, x^{\bar{\nu}}) - F(k, x^*) \leq -\bar{\epsilon}.$$

Dobili smo da je

$$\frac{-2\bar{\epsilon}}{3} < -\bar{\epsilon},$$

što je kontradikcija.

U oba slučaja smo došli do kontradikcije sa polaznom pretpostavkom. Znači, za svako $\epsilon > 0$ postoji $\nu_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svako $\nu \geq \nu_0$ važi da je

$$|F_{\varepsilon_\nu}(k, x^\nu) - F(k, x^*)| < \epsilon,$$

što smo i hteli dokazati. □

Pretpostavimo da niz optimalnih tačaka SVaR problema optimizacije konvergira kada parametar glačanja teži nuli. Na osnovu prethodne dve teoreme, zaključujemo da je vrednost funkcije cilja VaR problema optimizacije u graničnoj vrednosti niza optimalnih tačaka SVaR problema ista sa njenom vrednošću u VaR optimalnom portfoliu.

Posledica 4.5 *Neka je* $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ *niz sa pozitivnim članovima za koji važi da* $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$. *Neka je* x^{VaR} *globalno rešenje VaR problema optimizacije (4.6), a* x^ν *globalno rešenje SVaR problema (4.7) sa parametrom* ε_ν. *Ako je* $\lim_{\nu\to\infty} x^\nu = x^*$, *tada je*

$$F(k, x^*) = F(k, x^{VaR}).$$

Dokaz. Na osnovu teoreme 4.3 imamo da niz $\{F_{\varepsilon_\nu}(k, x^\nu)\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ konvergira ka $F(k, x^{VaR})$, a na osnovu teoreme 4.4 da konvergira ka $F(k, x^*)$. Zbog jedinstvenosti granične vrednosti niza zaključujemo da je $F(k, x^*) = F(k, x^{VaR})$. □

U slučaju jedinstvenosti globalnog rešenja problema optimizacije sa VaR merom rizika, na osnovu prethodne posledice zaključujemo da je granična vrednost niza globalnih rešenja SVaR problema optimizacije sa parametrom glačanja koji teži nuli baš globalno rešenje VaR problema optimizacije.

Sledeća teorema se u nekim detaljima razlikuje od leme 4 u radu [21], pa zbog toga navodimo njen dokaz.

Teorema 4.6 *Pretpostavimo da su funkcije* f_i, $i \in I$, *dva puta neprekidno diferencijabilne, a funkcija* φ_ε, *za proizvoljno* $\varepsilon \geq 0$, *definisana za* $z \in \mathbf{R}$, *je takva da je*

1. $\varphi_\varepsilon \in C^2(\mathbf{R})$ *za* $\varepsilon > 0$,
2. *za svako fiksirano* $z \leq 0$ $\varphi_\varepsilon(z) \to 1$ *kada* $\varepsilon \to 0$,
3. *za svako fiksirano* $z > 0$ $\varphi_\varepsilon(z) \to 0$ *kada* $\varepsilon \to 0$,
4. *za svako* $\varepsilon \geq 0$ *za* $z > \varepsilon$ *važi da je* $\varphi_\varepsilon(z) = 0$, *za* $\varepsilon \geq z > 0$ *važi da je* $\varphi_\varepsilon(z) \geq 0$, *a za* $z \leq 0$ *je* $\varphi_\varepsilon(z) = 1$.

Koeficijenti c_i^ε, *definisani sa (4.3), se mogu zapisati kao*

$$c_i^\varepsilon(x) = \sum_{q,r:\ q-r=k-k_i} b_q^+ b_r^- \tag{4.12}$$

$$b_q^+ = \sum_{\Lambda_q \subseteq \Lambda_{\varepsilon+}^i} \prod_{j \in \Lambda_q} \varphi_\varepsilon(f_i(x) - f_j(x)) \tag{4.13}$$

$$b_r^- = \sum_{\Lambda_r \subseteq \Lambda_{\varepsilon-}^i} \prod_{j \in \Lambda_r} \varphi_\varepsilon(f_j(x) - f_i(x)), \tag{4.14}$$

gde je $q = \#\Lambda_q$, $r = \#\Lambda_r$, $k_i = \#\Lambda_-^i$, $\Lambda_-^i = \{j \in M^i \mid f_i(x) - f_j(x) < 0\}$,

$$\Lambda_{\varepsilon+}^i = \{j \in M^i \mid 0 \leq f_i(x) - f_j(x) \leq \varepsilon\}, \tag{4.15}$$

$$\Lambda_{\varepsilon-}^i = \{j \in M^i \mid -\varepsilon \leq f_i(x) - f_j(x) < 0\}. \tag{4.16}$$

Dokaz. Fiksirajmo x i iz skupa I uzmimo proizvoljan indeks i. Za proizvoljan skup $\Lambda_k^i \in \Theta_k^i$ važi da je

$$\Lambda_k^i = (\Lambda_-^i \setminus \Lambda_r) \cup \Lambda_q,$$

a za njegov komplement u odnosu na skup M^i da je

$$M^i \setminus \Lambda_k^i = ((M^i \setminus \Lambda_-^i) \setminus \Lambda_q) \cup \Lambda_r,$$

pri čemu je skup Λ_r proizvoljan podskup skupa Λ_-^i koji ima r elemenata, skup Λ_q proizvoljan podskup skupa $M^i \setminus \Lambda_-^i$ koji ima q elemenata i $q - r = k - k_i$. Pošto je, na osnovu pretpostavki o funkciji φ_ε, $\varphi_\varepsilon(f_i(x) - f_j(x)) = 1$ za $j \in \Lambda_-^i \setminus \Lambda_r$, a $\varphi_\varepsilon(f_j(x) - f_i(x)) = 1$ za $j \in M^i \setminus \Lambda_-^i \setminus \Lambda_q$, izraz (4.3) se može zapisati kao

$$c_i^\varepsilon(x) = \sum_{\substack{\Lambda_r \subseteq \Lambda_-^i \\ \Lambda_q \subseteq M^i \setminus \Lambda_-^i \\ q-r=k-k_i}} \prod_{j \in \Lambda_q} \varphi_\varepsilon(f_i(x) - f_j(x)) \prod_{j \in \Lambda_r} \varphi_\varepsilon(f_j(x) - f_i(x)) =$$

$$= \sum_{q,r:\ q-r=k-k_i} \left(\sum_{\Lambda_q \subseteq M^i \setminus \Lambda^i_-} \prod_{j \in \Lambda_q} \varphi_\varepsilon(f_i(x) - f_j(x)) \right) \left(\sum_{\Lambda_r \subseteq \Lambda^i_-} \prod_{j \in \Lambda_r} \varphi_\varepsilon(f_j(x) - f_i(x)) \right).$$

Kako je $\varphi_\varepsilon(f_j(x) - f_i(x)) = 0$ za $j \in \Lambda^i_- \setminus \Lambda^i_{\varepsilon-}$, imamo da je

$$\sum_{\Lambda_r \subseteq \Lambda^i_-} \prod_{j \in \Lambda_r} \varphi_\varepsilon(f_j(x) - f_i(x)) = \sum_{\Lambda_r \subseteq \Lambda^i_{\varepsilon-}} \prod_{j \in \Lambda_r} \varphi_\varepsilon(f_j(x) - f_i(x)) = b^-_r.$$

Analogno, pošto je $\varphi_\epsilon(f_i(x) - f_j(x)) = 0$ za $j \in \left(M^i \setminus \Lambda^i_-\right) \setminus \Lambda^i_{\varepsilon+}$, imamo da je

$$\sum_{\Lambda_q \subseteq M^i \setminus \Lambda^i_-} \prod_{j \in \Lambda_q} \varphi_\varepsilon(f_i(x) - f_j(x)) = \sum_{\Lambda_q \subseteq \Lambda^i_{\varepsilon+}} \prod_{j \in \Lambda_q} \varphi_\varepsilon(f_i(x) - f_j(x)) = b^+_q.$$

Znači, dobili smo da je izraz (4.3) ekvivalentan izrazu (4.12), što smo i hteli dokazati. □

Broj sabiraka u koeficijentima (4.3) je $\binom{m-1}{k}$, pa se broj aritmetičkih operacija potrebnih za njihovo izračunavanje eksponencijalno povećava. To znači da je računanje vrednosti funkcije (4.2) komplikovano i skupo, u smislu broja aritmetičkih operacija potrebnih za njihovo izračunavanje. Gaivoronski i Pflug su dokazali da se primenom sledećeg algoritma za računanje koeficijenata (4.3) znatno štedi na broju aritmetičkih operacija potrebnih za njihovo izračunavanje. Algoritam se zasniva na rekurzivnom računanju koeficijenta, koristeći da se oni mogu zapisati kao što je navedeno u prethodnoj teoremi.

Algoritam GP [21]

Neka su date tačka x i indeks i.

Korak 1. Na osnovu jednakosti $q - r = k - k_i$ odrediti veličine q_{max} i r_{max} tako da važi da je $q \in \{0, 1, \ldots, q_{max}\}$ i $r \in \{0, 1, \ldots, r_{max}\}$. Odrediti skupove $\Lambda^i_{\varepsilon+}$ i $\Lambda^i_{\varepsilon-}$, redom definisane sa (4.15) i (4.16), i uzeti da je $k^i_+ = \#\Lambda^i_{\varepsilon+}$ i $k^i_- = \#\Lambda^i_{\varepsilon-}$.

Korak 2. Uzeti da je

$$d^+_0 = 1, \quad d^+_l = \varphi_\varepsilon(f_i(x) - f_j(x)) \text{ za } l = 1, \ldots, k^i_+,$$

$$d_0^- = 1, \quad d_l^- = \varphi_\varepsilon(f_i(x) - f_j(x)) \text{ za } l = 1, \ldots, k_-^i.$$
$$e_l^+ = 1 \text{ za } l = 1, \ldots, k_+^i + 1,$$
$$e_l^- = 1 \text{ za } l = 1, \ldots, k_-^i + 1.$$

Korak 3. Ako je $q_{max} = 0$, onda je $b_0^+ = 1$ ili ako je $r_{max} = 0$, onda je $b_0^- = 1$.

Korak 4. Za $q = 1, \ldots, q_{max}$

1. $l = q$
2. ako je $l = q$, onda je $A = d_l^+ e_l^+$, inače je $A = d_l^+ e_l^+ + \bar{A}$
3. $\bar{A} = A$
4. ako je $l > q$, onda je $e_l^+ = \bar{A}$
5. ako je $l < k_+^i$, onda je $l = l + 1$, inače $b_q^+ = A$.

Korak 5. Za $r = 1, \ldots, r_{max}$

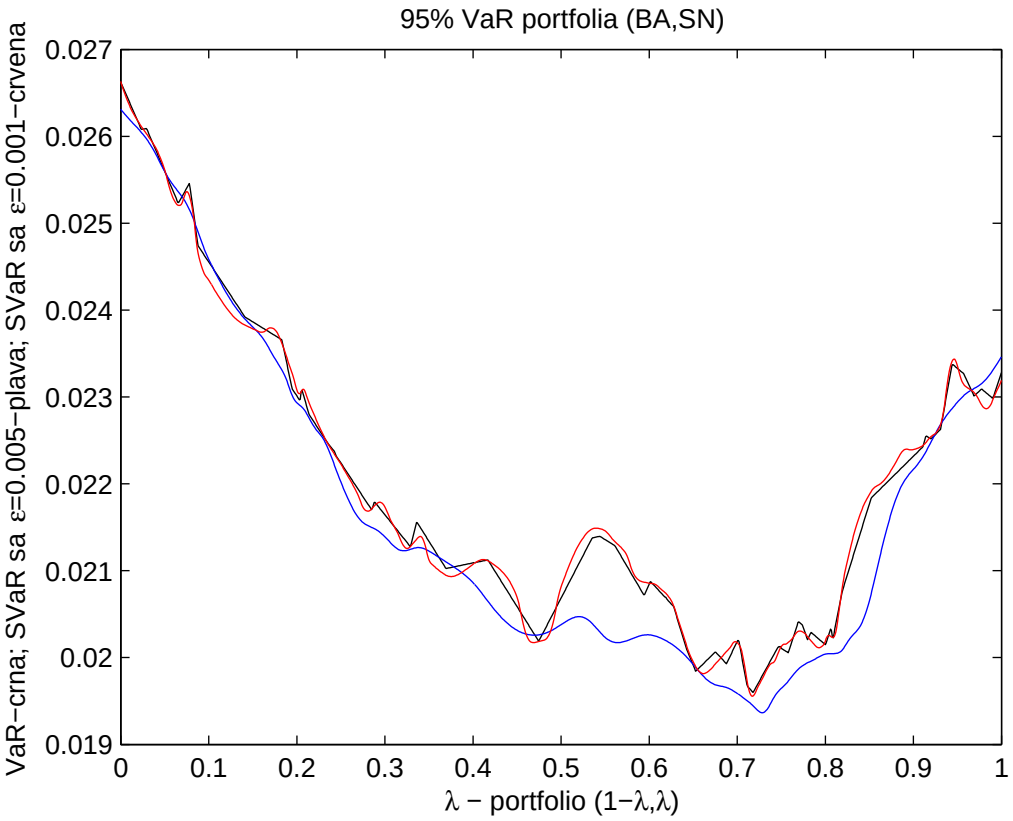
1. $l = r$
2. ako je $l = r$, onda je $A = d_l^- e_l^-$, inače je $A = d_l^- e_l^- + \bar{A}$
3. $\bar{A} = A$
4. ako je $l > r$, onda je $e_l^- = \bar{A}$
5. ako je $l < k_-^i$, onda je $l = l + 1$, inače $b_r^- = A$.

U primerima u kojima se VaR optimalan portfolio određuje primenom SVaR algoritma algoritam je implementiran u programskom paketu Matlab. U prvom koraku algoritma je korišten algoritam GP, a nelinearan potproblem sa ograničenjima, u drugom koraku, je rešavan ugrađenom funkcijom *fmincon* iz Matlaba.

Na slici 4.1 je ilustrovana izglačana VaR mera rizika primenjena na portfolio koji se sastoji iz akcija kompanija Bae Systems (BA) i Smith & Nephew (SN) sa Londonske berze. U pitanju je jednodnevna VaR mera rizika, računata sa nivoom poverenja od 95%. Uzimajući cene akcija na zatvaranju berze u periodu od 16. februara 2006. do 12. februara 2008. godine, dobija se uzorak sa prinosima za 500 dana trgovanja. Prinos u vremenu t je računat kao

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

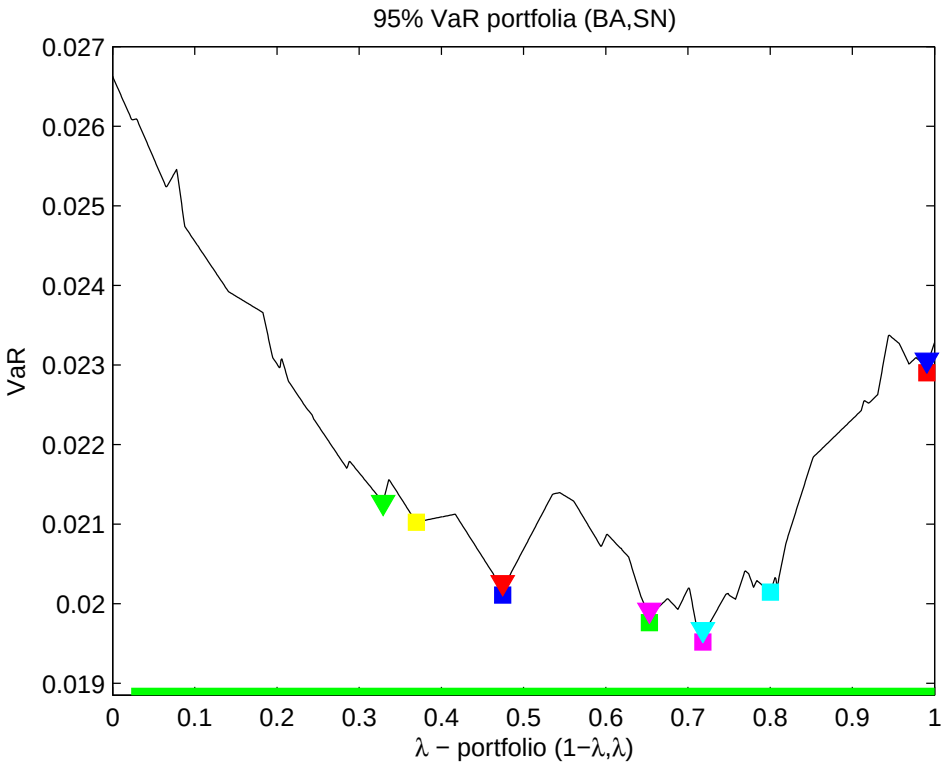
gde je P_i cena akcije u vremenu i. Na x-osi je predstavljena familija portfolia $(\lambda, 1-\lambda)$, gde je λ parametar iz skupa $[0,1]$, a na y-osi vrednost VaR i SVaR funkcije portfolia. Crnom krivom je obeležena VaR funkcija, plavom SVaR funkcija sa parametrom glačanja 0.005, a crvenom SVaR funkcija sa parametrom glačanja 0.001. Možemo da primetimo da su sa većim parametrom glačanja mnogi lokalni minimumi nestali. Što je manji parametar glačanja, SVaR funkcija se sve više poklapa sa VaR funkcijom, pa glačanje dolazi do izražaja jedino u tačkama u kojima se seku bar dve funkcije od funkcija f_i, $i = 1, \ldots, m$.



Slika 4.1: VaR funkcija i izglačana VaR funkcija (SVaR)

4.2 Poređenje OVO i SVaR algoritama primenjenih na VaR problem optimizacije

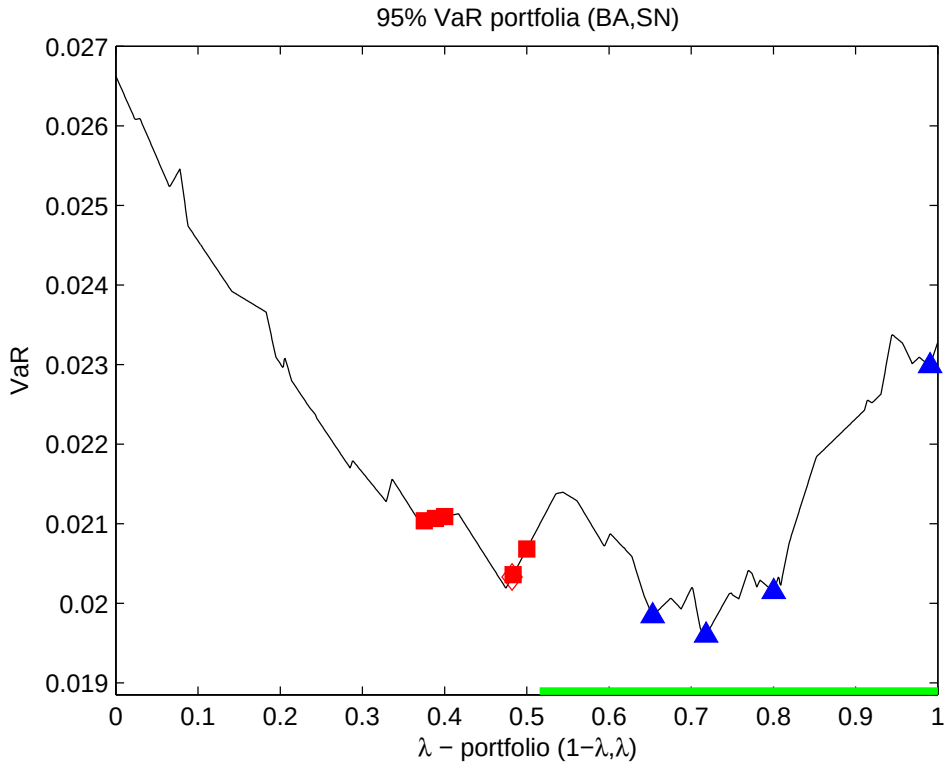
U prethodnom poglavlju smo videli da je problem optimizacije portfolia sa VaR merom rizika (4.1) OVO problem. Pošto su funkcije koje određuju funkciju cilja linearne, za njegovo rešavanje, od algoritama za rešavanje OVO problema, možemo primeniti primaran Košijev algoritam (PKovo). Za implementaciju PKovo algoritma je korišten programski paket Matlab. Potproblem algoritma, koji je nelinearan konveksan problem sa ograničenjima, je rešavan ugrađenom funkcijom *fmincon*.



Slika 4.2: VaR funkcija i OVO i SVaR rešenja sa raznim početnim tačkama

Posmatrajmo portfolio koji se sastoji iz akcija kompanija Bae Systems (BA) i Smith & Nephew (SN) sa Londonske berze. Na slici 4.2 je prikazan grafik VaR funkcije sa nivoom 95% (crna kriva) i rešenja VaR problema optimizacije dobijena rešavanjem primarnim Košijevim algoritmom i SVaR

algoritmom, uzimajući različite početne tačke. Prinosi akcija su određeni na osnovu podataka iz perioda od 16. februara 2006. do 12. februara 2008. godine. Za minimalan prinos koji se očekuje je uzeta vrednost $\mu = 0.03\%$. Na x-osi je predstavljena familija portfolia $(\lambda, 1-\lambda)$, gde je λ parametar iz skupa $[0, 1]$, a na y-osi vrednost VaR funkcije. Rešenja dobijena PKovo algoritmom su označena kvadratima, dok su rešenja dobijena SVaR algoritmom predstavljena trouglovima. Bojama su označene različite početne tačke, rešenja odgovaraju sledećim početnim tačkama:

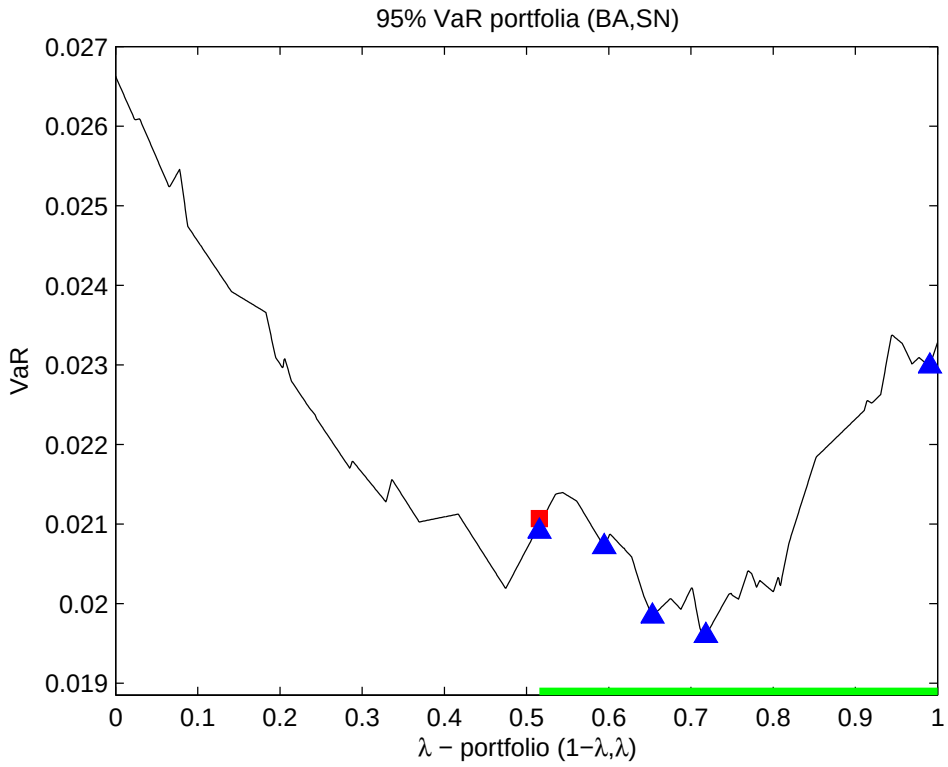


Slika 4.3: VaR funkcija i OVO rešenja sa raznim početnim tačkama

- žuti kvadrat – $(1, 0)$, $(0.9, 0.1)$, $(0.8, 0.2)$, $(0.7, 0.3)$, $(0.6, 0.4)$
- tamno plavi kvadrat – $(0.5, 0.5)$
- zeleni kvadrat – $(0.4, 0.6)$
- ljubičasti kvadrat – $(0.3, 0.7)$

- svetlo plavi kvadrat – $(0.2, 0.8)$, $(0.1, 0.9)$
- crveni kvadrat – $(0, 1)$
- crveni trougao – $(1, 0)$, $(0.8, 0.2)$, $(0.5, 0.5)$, $(0.4, 0.6)$
- zeleni trougao – $(0.9, 0.1)$
- ljubičasti trougao – $(0.7, 0.3)$, $(0.6, 0.4)$
- svetlo plavi trougao – $(0.3, 0.7)$, $(0.2, 0.8)$, $(0.1, 0.9)$
- tamno plavi trougao – $(0, 1)$

Vrednosti λ koje određuju dopustive tačke problema su zelenom bojom obojene na x-osi.



Slika 4.4: VaR funkcija i SVaR rešenja sa raznim početnim tačkama

Na slikama 4.3 i 4.4 su redom prikazana rešenja VaR problema optimizacije portfolia dobijena primenom primarne Košijeve metode i SVaR algoritma. Minimalan očekivani prinos je $\mu = 0.05\%$. I na ovim slikama je familija portfolia $(\lambda, 1-\lambda)$ predstavljena na x-osi, a vrednost VaR funkcije na y-osi. Dopustive tačke su zelenom bojom istaknute na x-osi. Rešenja dobijena polazeći od tačaka koje su van dopustivog skupa su obeležena crvenim kvadratima, dok su rešenja dobijena sa dopustivim početnim tačkama označena plavim trouglovima. Vidimo da se SVaR algoritmom dobija lokalni minimum nezavisno od toga da li je početna iteracija dopustiva tačka. Međutim, primenom algoritma za rešavanje OVO problema, potrebno je da početna iteracija bude dopustiva tačka.

Glava 5

Troškovi transakcija u optimizaciji portfolia

U prethodnim poglavljima smo videli šta je VaR i prikazali dva načina određivanja VaR optimalnog portfolia koji donosi bar predviđeni prinos. Sada ćemo razmotriti šta se dešava sa VaR optimalnim portfoliom kada se u problem optimizacije uključe troškovi transakcija. Polazeći od datog portfolia, posmatraćemo problem određivanja optimalnog portfolia koji ima minimalan VaR i donosi bar predviđeni prinos, uzimajući u obzir da je prinos umanjen za troškove transakcija. Troškovi transakcija se sastoje iz fiksnih troškova i troškova uzrokovanih privremenim i trajnim impaktom. Posmatraćemo slučaj linearnih i nelinearnih privremenih i trajnih impakt troškova. Razmotrićemo dominantnost impakt troškova nad fiksnim troškovima u VaR optimalnom portfoliu u zavisnosti od veličine fiksnih troškova.

5.1 Troškovi trajnog i privremenog impakta

Posmatramo problem izbora portfolia na optimalan način za investitora. Prilikom trgovanja portfoliom na berzi, kupovinom i prodajom akcija*, javljaju se troškovi transakcija. Troškovi se sastoje iz fiksnih troškova i takozvanog impakta (market impact). *Fiksne troškove* čine provizije brokera i takse, za koje ćemo pretpostaviti da su jednaki i pri kupovini i pri prodaji akcija. Što je veći investitor, fiksni troškovi su manji. Pod *impaktom* se po-

*Govorićemo o akcijama, međutim navedeni podaci važe za bilo koje hartije od vrednosti sa kojim se trguje na berzi.

drazumeva uticaj transakcije na tržište, odnosno promena cene akcije do koje se dolazi usled kupovine ili prodaje akcije. Grubo rečeno, prodaja većeg broj akcija izaziva promenu cene naniže, dok kupovina izaziva porast cene, pa veliki investitor može da prouzrokuje značajno odstupanje cene. Najmanja cena koja se nudi, na berzi, za prodaju jedne akcije naziva se *ask*, dok se najveća cena koja se nudi za kupovinu naziva *bid*. Prilikom prodaje velike količine akcija, najčešće se akcije ne mogu prodati odjednom. U svakom narednom trenutku prodaje cena akcije, odnosno ask, opada. Analogno je i kod kupovine, kupovina velike količine akcije rezultuje rastom bid cene.

Na osnovu radova Almgren [3] i Almgren i Chriss [4], razlikujemo dve vrste tržišnog impakta, *privremeni impakt* i *trajni impakt*. Pod privremenim impaktom se podrazumeva kratkotrajna promena cene prouzrokovana neravnotežom ponude i potražnje. Trajni impakt predstavlja promenu cene pri trgovanju investitora koja deluje bar tokom trgovanja tog investitora.

Način realizacije naloga za trgovanje utiče na impakt. Pretpostavljamo da se trgovanje izvršava na optimalan način, odnosno da je trajektorija trgovanja optimalna u smislu rada [4], zato ćemo koristiti impakt funkcije kako su modelirane u tom radu.

5.1.1 Optimalna trajektorija

Pojam optimalne trajektorije ćemo prikazati na prodaji akcije. Posmatrajmo investitora koji ima K komada neke akcije i cilj mu je da tu akciju proda u periodu T. Za realizaciju celokupnog naloga investitor ima plan prodaje tako što ceo vremenski period realizacije T deli na N delova, na periode $t_i = i\tau$, $i = 0, \ldots, N$, pri čemu je $\tau = T/N$. U svakom periodu t_i, $i = 0, \ldots, N$, se realizuje deo naloga. *Trajektorija trgovanja* se definiše kao lista $n_0, n_1, \ldots, n_N$, gde n_i predstavlja broj akcija koje investitor planira da poseduje u vremenu t_i. Vidimo da je $n_0 = K$ i $n_N = 0$. Označimo sa p_i broj akcija prodatih u vremenu $(t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, N$. Prilikom prodaje akcija broj prodatih akcija je pozitivan, $p_i = n_{i-1} - n_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$. Veza između broja akcija koje investitor planira da poseduje i broja prodatih akcija se može prikazati sa

$$n_i = n_0 - \sum_{j=1}^{i} p_j = \sum_{j=i+1}^{N} p_j, \quad i = 0, \ldots, N. \tag{5.1}$$

Definisanje je analogno kada se radi o kupovini akcije.

Neka je S_0 početna cena[†] jedne akcije. Pored impakta, na promenu cene utiče volatilnost (volatility) akcije. Za volatilnost se najčešće uzima standardno odstupanje promene u ceni akcije tokom posmatranog perioda. Pod pretpostavkom da cena akcije prati aritmetičko slučajno kretanje[‡], cena jedne akcije u periodu t_i, za $i = 1, \ldots, N$, ima oblik

$$S_i = S_{i-1} + \sigma\tau^{1/2}\zeta_i - \tau g\left(\frac{p_i}{\tau}\right), \quad i = 0, \ldots, N,$$

gde je σ volatilnost akcije, ζ_i su nezavisne normalne slučajne promenljive sa očekivanjem jednakim nuli i varijansom jednakoj jedinici, a g je funkcija trajnog impakta. Veličina $\dfrac{p_i}{\tau}$ predstavlja intenzitet trgovanja tokom vremenskog intervala $(t_{i-1}, t_i]$.

Ukoliko u periodu $(t_{i-1}, t_i]$ investitor planira da proda veliki broj akcija, odnosno p_i je veliki broj, investitor se može odlučiti da prodaju izvrši u manjim delovima. U ovom slučaju dolazi do privremenog impakta, pa se on uključuje u cenu. Znači, u i-tom koraku trajektorije trgovanja cena jedne akcije je

$$\tilde{S}_i = S_{i-1} - h\left(\frac{p_i}{\tau}\right), \quad i = 0, \ldots, N,$$

gde je h funkcija privremenog impakta. Privremeni impakt ne utiče na cenu akcije u vremenu t_i, odnosno ne figuriše u ceni S_i.

Razmotrimo prihode nakon svakog koraka trajektorije trgovanja. U prvom koraku je prodato p_1 akcija, pa je prihod

$$p_1\tilde{S}_1 = p_1 S_0 - p_1 h\left(\frac{p_1}{\tau}\right).$$

U drugom koraku imamo

$$p_2\tilde{S}_2 = p_2 S_1 - p_2 h\left(\frac{p_2}{\tau}\right) = p_2 S_0 + p_2\left(\sigma\tau^{1/2}\zeta_1 - \tau g\left(\frac{p_1}{\tau}\right)\right) - p_2 h\left(\frac{p_2}{\tau}\right).$$

Prihod od trećeg koraka je

$$\begin{aligned} p_3\tilde{S}_3 &= p_3 S_2 - p_3 h\left(\frac{p_3}{\tau}\right) = \\ &= p_3 S_0 + p_3\left(\sigma\tau^{1/2}\zeta_1 - \tau g\left(\frac{p_1}{\tau}\right)\right) + p_3\left(\sigma\tau^{1/2}\zeta_2 - \tau g\left(\frac{p_2}{\tau}\right)\right) - p_3 h\left(\frac{p_3}{\tau}\right). \end{aligned}$$

[†]Pod cenom akcije se podrazumeva srednja cena akcije koja je važeća na tržištu, $\frac{ask+bid}{2}$.

[‡]Kod trgovanja na kraćim periodima, za koje smo mi zainteresovani, promene u ceni su male, pa stoga koristimo aritmetičko slučajno kretanje. U slučaju trgovanja na duže periode bi posmatrali geometrijsko Braunovo (Brown) kretanje.

Analogno dolazimo do prihoda u N-tom koraku

$$\begin{aligned} p_N\tilde{S}_N &= p_N S_{N-1} - p_N h\left(\frac{p_N}{\tau}\right) = \\ &= p_N S_0 + p_N \sum_{j=1}^{N-1}\left(\sigma\tau^{1/2}\zeta_j - \tau g\left(\frac{p_j}{\tau}\right)\right) - p_N h\left(\frac{p_N}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Kao rezultat trajektorije trgovanja, koristeći vezu (5.1) i da je $n_N = 0$, dobija se ukupan prihod

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} p_i\tilde{S}_i = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{N} p_i S_0 + \sum_{i=1}^{N-1}\left(\sigma\tau^{1/2}\zeta_i - \tau g\left(\frac{p_i}{\tau}\right)\right)\left(\sum_{j=i+1}^{N} p_j\right) - \sum_{i=1}^{N} p_i h\left(\frac{p_i}{\tau}\right) = \\ &\quad = n_0 S_0 + \sum_{i=1}^{N}\left(\sigma\tau^{1/2}\zeta_i - \tau g\left(\frac{p_i}{\tau}\right)\right) n_i - \sum_{i=1}^{N} p_i h\left(\frac{p_i}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Ukupan trošak trgovanja, koji se u radovima [3] i [4] naziva *trošak realizacije* (implementation shortfall), predstavlja razliku

$$n_0 S_0 - \sum_{i=1}^{N} p_i\tilde{S}_i = \sum_{i=1}^{N} \tau g\left(\frac{p_i}{\tau}\right) n_i - \sum_{i=1}^{N} \sigma\tau^{1/2}\zeta_i n_i + \sum_{i=1}^{N} p_i h\left(\frac{p_i}{\tau}\right). \tag{5.2}$$

Pre trgovanja ukupan trošak trgovanja je nepoznat, pa je on slučajna promenljiva. Njegovo očekivanje (expected shortfall) je

$$E(n_0,\ldots,n_N) = \sum_{i=1}^{N} \tau g\left(\frac{p_i}{\tau}\right) n_i + \sum_{i=1}^{N} p_i h\left(\frac{p_i}{\tau}\right), \tag{5.3}$$

a varijansa

$$V(n_0,\ldots,n_N) = \sigma^2\tau\sum_{i=1}^{N} n_i^2. \tag{5.4}$$

Pod optimalnom trajektorijom trgovanja se podrazumeva da za trajektorije sa manjom ili jednakom varijansom ne postoji trajektorija trgovanja

koja ima manje očekivane troškove transakcija od optimalne trajektorije. Do optimalne trajektorije trgovanja $n_0, \ldots, n_N$ dolazi se rešavanjem problema

$$\min_{\{n_0,\ldots,n_N\}} E(n_0, \ldots, n_N) + \lambda V(n_0, \ldots, n_N),$$

za različite vrednosti λ. Parametar λ predstavlja meru averzije investitora prema rizika. U slučaju da je $\lambda = 0$ problem se svodi na problem minimiziranja troškova bez uzimanja u obzir rizika. Što je parametar λ veći, time se stavlja veći značaj na rizik. Za $\lambda > 0$ optimalna trajektorija je jedinstvena, što je pokazano u radu [4].

5.1.2 Trajni i privremeni impakt

Pretpostavljamo da se trgovanje izvršava po optimalnoj trajektoriji u smislu rada [4], zato koristimo impakt funkcije kako su modelirane u tom radu. Ako se za funkcije trajnog i privremenog impakta uzmu linearne funkcije, trajni impakt je oblika

$$g(v) = \gamma v, \tag{5.5}$$

a privremeni impakt

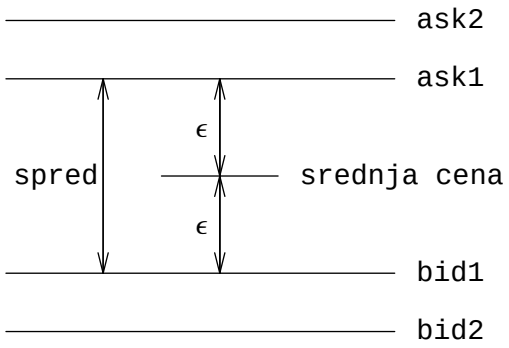
$$h(v) = \epsilon \operatorname{sgn}(v) + \eta v, \tag{5.6}$$

gde je v intenzitet trgovanja. Za definisanje parametara koji figurišu u navedenim funkcijama, potrebno je navesti pojam *spred* (spread) koji predstavlja razliku između ask i bid cena, odnosno

$$\text{spred} = \text{ask} - \text{bid} \qquad \left(\frac{\text{novčana jedinica}}{\text{akcija}}\right).$$

Na slici 5.1 su ilustrovani pojmovi ask, bid, spred, srednja cena i parametar ϵ.

Parametar γ predstavlja promenu u ceni od jednog spreda nakon trgovanja 10% od dnevnog obima trgovanja. Parametar ϵ je fiksan deo privremenog impakta i iznosi polovinu spreda. Parametrom η se izražava impakt od jednog



Slika 5.1: Spred, srednja cena i parametar ϵ

spreda pri trgovanju od 1% od dnevnog obima trgovanja. Znači,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\text{spred}}{10\%\text{ dnevni obim}} \qquad \left(\frac{\text{novčana jedinica}}{\text{akcija}^2}\right), \\
\epsilon &= \frac{1}{2}\,\text{spred} \qquad \left(\frac{\text{novčana jedinica}}{\text{akcija}}\right), \\
\eta &= \frac{\text{spred}}{1\%\text{ dnevni obim}} \qquad \left(\frac{\text{novčana jedinica}}{\text{akcija}} \cdot \frac{\text{vreme}}{\text{akcija}}\right).
\end{aligned}$$

Kako su troškovi linearnog trajnog impakta u očekivanim troškovima (5.3)

$$\sum_{i=1}^{N} \tau g\left(\frac{p_i}{\tau}\right) n_i = \gamma \sum_{i=1}^{N} p_i n_i = \gamma \sum_{i=1}^{N} (n_{i-1} - n_i) n_i =$$
$$= \frac{1}{2}\gamma \sum_{i=1}^{N} \left(n_{i-1}^2 - n_i^2 - (n_i - n_{i-1})^2\right) = \frac{1}{2}\gamma \left(n_0^2 - \sum_{i=1}^{N} p_i^2\right),$$

a troškovi linearnog privremenog impakta

$$\sum_{i=1}^{N} p_i h\left(\frac{p_i}{\tau}\right) = \epsilon \sum_{i=1}^{N} |p_i| + \frac{\eta}{\tau} \sum_{i=1}^{N} p_i^2,$$

očekivani ukupni troškovi sa linearnim impaktom su

$$E(n_0, \ldots, n_N) = \frac{1}{2}\gamma n_0^2 + \epsilon \sum_{i=1}^{N} |p_i| + \frac{\eta - \frac{1}{2}\gamma\tau}{\tau} \sum_{i=1}^{N} p_i^2. \tag{5.7}$$

Kada je $\eta - \frac{1}{2}\gamma\tau > 0$, funkcija očekivanih troškova je konveksna. Ako se tokom trgovanja vrši samo prodaja ili samo kupovina akcije $\sum_{i=1}^{N} |p_i| = K$, pa je

$$E(n_0, \ldots, n_N) = \frac{1}{2}\gamma K^2 + \epsilon K + \frac{\eta - \frac{1}{2}\gamma\tau}{\tau} \sum_{i=1}^{N} p_i^2.$$

U radu [3] je dat predlog za nelinearan impakt. Gerneralno, impakt se modelira kao funkcija oblika β^ν, gde je β intenzitet trgovanja, a $\nu > 0$. Za slučaj $\nu = 1$, dobijamo linearan impakt. Funkcija impakta je konkavna kada je $0 < \nu < 1$, a za $\nu > 1$ je konveksna.

5.2 VaR mera rizika u optimizaciji portfolia sa troškovima transakcija

Posmatrajmo transakciju koja se izvršava optimalno u odnosu na očekivane troškove, odnosno, izvršava se po optimalnoj trajektoriji, uzmajući vremenski interval od jednog dana, $\tau = 1$.

Neka je početni portfolio, koji se sastoji od n akcija, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$. Sa $\hat{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, je označen procenat zastupljenosti i-te akcije u portfoliu. Neka je $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vektor prinosa portfolia, odnosno ξ_i je prinos i-te akcije, $i = 1, \ldots, n$, za određeni period. Neka su poznati podaci $\{\xi^1, \ldots, \xi^m\}$ o prinosu akcija u portfoliu za m prethodnih perioda trgovanja. Prosečan prinos portfolia označimo sa $\bar{\xi}$,

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \xi^i.$$

Tražimo portfolio koji ima najmanju VaR meru rizika pod uslovom da nakon posmatranog perioda donese bar predviđeni prinos, uzimajući u obzir da troškovi transakcija smanjuju prinos. Odnosno, tražimo portfolio koji je re-

šenje problema

$$\begin{aligned} \min_x \min^{\lceil \alpha m \rceil} \{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\} & \\ x^T\bar{\xi} - \tilde{t}(\hat{x} - x) \geq \mu & \\ x^T e = 1 & \\ x \geq 0, & \end{aligned} \tag{5.8}$$

gde je α nivo poverenja VaR mere rizika, μ najmanji prinos koji se očekuje od portfolia, a $\tilde{t}$ funkcija troškova.

Funkcija troškova se sastoji iz fiksnih troškova i troškova privremenog i trajnog impakta. Ako je n_i broj kupljenih ili prodatih komada i-te akcije (u oba slučaja uzimamo pozitivne vrednosti), novčani iznos troškova transakcije sa posmatranom akcijom je

$$t(n_i) = n_i \left(h(n_i) + g(n_i) + q_i\right), \tag{5.9}$$

gde su funkcije h i g redom funkcije privremenog i trajnog impakta, a q_i je fiksan trošak. U posmatranom problemu je na portfolio nametnuto ograničenje $x^T e = 1$, koje označava da je celokupni budžet investiran u portfolio. Sa druge strane je funkcija troškova modelirana u novčanom iznosu, pa ju je potrebno normalizovati. Znači, funkcija troškova $\tilde{t}$ i-te akcije je

$$\tilde{t}(n_i) = \left(h(n_i) + g(n_i) + q_i\right) \frac{n_i}{y},$$

gde je sa y obeležena vrednost portfolia.

Razliku početnog i optimalnog portfolia možemo da zapišemo u obliku razlike delova portfolia koji se prodaje x^p i portfolia koji se kupuje x^k,

$$\hat{x} - x = x^p - x^k, \quad x^p \geq 0,\ x^k \geq 0.$$

Komponente veličina x^p i x^k su procenti, pa za n_i^p prodatih i n_i^k kupljenih akcija i-te akcije važi da je

$$x_i^p = \frac{n_i^p P_i}{y}, \quad x_i^k = \frac{n_i^k P_i}{y}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gde je P_i cena i-te akcije. Novčani iznos troškova nastalih pri kupovini je

$$t^k(n^k) = \sum_{i=1}^{n} t(n_i^k),$$

a troškova nastalih pri prodaji je

$$t^p(n^p) = \sum_{i=1}^{n} t(n_i^p),$$

pa je novčani iznos ukupnih troškova pri formiranju optimalnog portfolia, nakon posmatranog perioda,

$$t(\hat{x} - x) = t^k(n^k) + t^p(n^p),$$

odakle nakon normiranja dobijamo funkciju troškova

$$\tilde{t}(\hat{x} - x) = \frac{t(\hat{x} - x)}{y}.$$

Broj prodatih i kupljenih akcija, n_i, je nenegativan, pa pretpostavljanjem da su troškovi modelirani linearnim impaktom (5.5) i (5.6), funkcija troškova je oblika

$$\tilde{t}(n_i) = (\epsilon_i + \eta_i n_i + \gamma_i n_i + q_i)\,\frac{n_i}{y}.$$

Pod pretpostavkom da su privremeni troškovi modelirani nelinearnim privremenim impaktom

$$h(v) = \operatorname{sgn}(v)\left(\epsilon + \eta |v|^{1/2}\right),$$

gde je v intenzitet trgovanja, a trajni linearnim trajnim impaktom (5.5), funkcija troškova je

$$\tilde{t}(n_i) = \left(\epsilon_i + \eta_i n_i^{1/2} + \gamma_i n_i + q_i\right)\frac{n_i}{y}.$$

Pretpostavljanjem da su privremeni troškovi modelirani linearnim privremenim impaktom (5.6), dok su trajni modelirani nelinearnim trajnim impaktom

$$g(v) = \operatorname{sgn}(v)\gamma |v|^{1/2},$$

gde je v intenzitet trgovanja, funkcija troškova je određena sa

$$\tilde{t}(n_i) = \left(\epsilon_i + \eta_i n_i + \gamma_i n_i^{1/2} + q_i\right)\frac{n_i}{y}.$$

Za fiksne troškove kod velikog početnog portfolia (u našim primerima 100 miliona funti) ćemo uzeti da je

$$q_i = \frac{1}{2}\, s_i + 3 \cdot 10^{-4} P_i,$$

gde je s_i spred, a P_i cena i-te akcije, dok ćemo u slučaju malog početnog portfolia (u primerima milion funti) koristiti da je

$$q_i = 1\% P_i.$$

Posmatraćemo primere sa jednodnevnim i desetodnevnim prinosima. Kako se radi o kratkim periodima, prinosi i troškovi su male vrednosti, pa je praktično koristiti takozvanu *base point* meru, u oznaci *bp*. Jedan *bp* predstavlja 10^{-4} deo celog dela, odnosno $1 = 10^4 bp$, pa je $1\% = 10^2 bp$.

Na portfoliu sastavljenom od akcija kompanija Smith & Nephew (SN) i Rio Tinto (RIO) sa Londonske berze ćemo prikazati određivanje parametara u funkciji troškova. Za početni portfolio uzimo portfolio $\hat{x} = (0.5, 0.5)$, a za vrednost portfolia $y = 100 \cdot 10^6$ funti. Pokazaćemo uticaj promene veličine fiksnih troškova, koristeći da je za i-tu akciju

$$\begin{aligned} q_i^{II} &= \frac{1}{2} s_i + 2bpP_i \\ q_i^{III} &= \frac{1}{2} s_i + 3bpP_i \\ q_i^{X} &= \frac{1}{2} s_i + 10bpP_i, \end{aligned}$$

gde je s_i spred, a P_i cena akcije.

Na dan 12. februara 2008. godine je cena jedne akcije SN na zatvaranju berze bila $P_1 = 686$ funti, spred je bio $s_1 = 3.5$ funti, a srednji dnevni obim trgovanja tokom 500 dana je bio $ADV_1 = 8355100$. Za akcije RIO je $P_2 = 5523$ funti, $s_2 = 9$ funti i $ADV_2 = 6246400$. Na osnovu ovih podataka dobijamo da je

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{s_1}{0.1 \cdot ADV_1} = 4.77 \cdot 10^{-6} \ \frac{\text{funti}}{\text{akcija}^2}, \\ \epsilon_1 &= \frac{1}{2} \ s_1 = 1.75 \ \frac{\text{funti}}{\text{akcija}}, \\ \eta_1 &= \frac{s_1}{0.01 \cdot ADV_1} = 4.77 \cdot 10^{-5} \ \frac{\text{funti}}{\text{akcija}^2}, \\ \gamma_2 &= \frac{s_2}{0.1 \cdot ADV_2} = 8.58 \cdot 10^{-6} \ \frac{\text{funti}}{\text{akcija}^2}, \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{2} \ s_2 = 4.5 \ \frac{\text{funti}}{\text{akcija}}, \\ \eta_2 &= \frac{s_2}{0.01 \cdot ADV_2} = 8.58 \cdot 10^{-5} \ \frac{\text{funti}}{\text{akcija}^2}. \end{aligned}$$

Fiksni troškovi pri kupovini ili prodaji jedne akcije SN su

$$\begin{aligned} q_1^{II} &= 1.8872 \text{ funti} \\ q_1^{III} &= 1.9558 \text{ funti} \\ q_1^{X} &= 2.436 \text{ funti,} \end{aligned}$$

a akcije RIO

$$\begin{aligned} q_2^{II} &= 5.6046 \text{ funti} \\ q_2^{III} &= 6.1569 \text{ funti} \\ q_2^{X} &= 10.023 \text{ funti.} \end{aligned}$$

Rešavajući problem (5.8) za predviđene prinose $\mu = 0, 1, \ldots, 12$ dobijamo različite iznose troškova u zavisnosti od izbora fiksnih troškova. U tabeli 5.1 su prikazani normirani troškovi impakta ($\tilde{t}_{IMP}$) i fiksni troškovi ($\tilde{t}_{FIKS}$) u zavisnosti od vrednosti trgovanih akcija. Vrednost prodatih i kupljenih akcija izražena u procentima je jednaka i obeležena je sa Δ, odnosno

$$\Delta = |\hat{x}_1 - x_1^*| = |\hat{x}_2 - x_2^*|,$$

pri čemu je x^* VaR optimalni portfolio.

Možemo da primetimo da za fiksne troškove sa $2bp$ troškovi impakta dominiraju kada je vrednost trgovanih akcija bar 9.8% ($\Delta \geq 4.9\%$) od vrednosti portfolia, a za vrednosti manje ili jednake od $7.6\%y$ ($\Delta \leq 3.8\%$) dominiraju fiksni troškovi. Za q^{III} troškovi impakta dominiraju ukoliko je trgovano sa akcijama u vrednosti većoj ili jednakoj $11.8\%y$ ($\Delta \geq 5.9\%$), dok za trgovanu vrednost od $9.6\%y$ ($\Delta \leq 4.8\%$) dominiraju fiksni troškovi. U slučaju $10bp$ u fiksnim troškovima fiksni troškovi dominiraju nad troškovima impakta.

Znači, ako su fiksni troškovi mali i ako se trguje sa dovoljno velikom vrednošću akcija, troškovi impakta postaju dominantni.

Akcija sa kojom se može trgovati u kratkom vremenskom roku bez izazivanja velikih promena u njenoj ceni se naziva *likvidnom akcijom* (liquid stock). Spred likvidnih akcija je mali, pa one uzrokuju manji impakt, odnosno kod njih dominiraju fiksni troškovi u odnosu na troškove impakta. Tako, na primer, za akciju kompanije Vodafone (VOD), 12.2.2008. godine je spred bio 0.2 funti. Zahvaljujući velikoj likvidnosti akcije VOD, kod portfolia sastavljenog od akcija VOD i RIO fiksni troškovi dominiraju nad troškovima impakta i za fiksne troškove sa $2bp$, što ilustrujemo podacima prikazanim u tabeli 5.2.

$q_1^{II}+q_2^{II}$			$q_1^{III}+q_2^{III}$			$q_1^{X}+q_2^{X}$		
Δ (%)	$\tilde{t}_{IMP}$ (bp)	$\tilde{t}_{FIKS}$ (bp)	Δ (%)	$\tilde{t}_{IMP}$ (bp)	$\tilde{t}_{FIKS}$ (bp)	Δ (%)	$\tilde{t}_{IMP}$ (bp)	$\tilde{t}_{FIKS}$ (bp)
12.7	6.1495	4.7986	12.5	6.0082	4.964	11.1	5.1573	5.965
11.8	5.5883	4.4568	11.2	5.2179	4.4489	10.3	4.6824	5.5267
7.5	3.1521	2.8119	10.7	4.9185	4.2469	9.5	4.2157	5.082
10	4.4921	3.7528	9.8	4.3869	3.878	8.6	3.7576	4.6302
9	3.9582	3.3898	8.8	3.8649	3.5014	7.5	3.1521	4.0066
8	3.4345	3.0188	0	0	0	6.9	2.8689	3.7034
7	2.9217	2.6392	6.9	2.8522	2.7238	6	2.4393	3.2278
6	2.4208	2.2505	5.9	2.3629	2.3215	5.1	2.0203	2.7433
4.9	1.9324	1.852	4.8	1.8861	1.9094	4.2	1.6125	2.2495
3.8	1.4578	1.4428	3.7	1.4228	1.4866	3.3	1.2164	1.7459
2.7	0.9979	1.0221	2.7	0.974	1.0525	2.3	0.833	1.2317
1.6	0.5542	0.5888	1.5	0.5409	0.6059	1.3	0.463	0.7064
0.4	0.1282	0.1417	0.4	0.1252	0.1457	0.3	0.1072	0.1692

Tabela 5.1: Portfolio (SN,RIO) sa fiksnim troškovima $q_i^{II} = \frac{1}{2}\, s_i + 2bpP_i$, $q_i^{III} = \frac{1}{2}\, s_i + 3bpP_i$, $q_i^{X} = \frac{1}{2}\, s_i + 10bpP_i$

Δ (%)	26.5	25.5	23.3	13.4	13.4	13.4	13.4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$\tilde{t}_{IMP}$ (bp)	4.02	3.86	3.5	1.94	1.94	1.94	1.94	0.026	0.026	0.026	0.026	0.026
$\tilde{t}_{FIKS}$ (bp)	4.71	4.54	4.14	2.37	2.37	2.37	2.37	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034

Tabela 5.2: Portfolio (VOD,RIO) sa fiksnim troškovima $q_i^{II} = \frac{1}{2}\, s_i + 2bpP_i$

Glava 6

Numerički rezultati

U ovom poglavlju ćemo prikazati numeričke rezultate dobijene primenom SVaR postupka na problem optimizacije portfolia koji se sastoji od odabranih akcija sa Londonske berze. Ispitaćemo uticaj troškova na VaR optimalni portfolio na primerima jednodnevong i desetodnevne prinosa. Uporedićemo kako utiču troškovi na optimalan portfolio kada je u pitanju veliki i mali obim portfolia. Razmotrićemo uticaj linearnog i nelinearnog impakta na veličinu troškova transakcija.

Podaci o akcijama sa Londonske berze (cena, spred, obim trgovanja) su uzimani sa sajtova www.advfn.com i www.finance.yahoo.com. Problemi optimizacije portfolia su rešavani primenom SVaR algoritma, koji je opisan u glavi 4.

6.1 Jednodnevni VaR

Posmatrajmo portfolio (SN,RIO) koji je sastavljen od akcija kompanija Smith & Nephew i Rio Tinto sa Londonske berze. Poznati su vektori dnevnih prinosa portfolia $\xi^i = (\xi_1, \xi_2)$, $i = 1, \ldots, m$, za $m = 500$ dana. Prosečan prinos portfolia izražen u *bp* je

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \xi^i = (6.97, 17.65),$$

spred akcije SN je $s_1 = 3.5$ funti, a za RIO je $s_2 = 9$ funti, dok su cene $P_1 = 686$ funti i $P_2 = 5523$ funti, što znači da je spred akcije SN izražen u *bp*

51.02, a akcije RIO 16.3. Polazeći od početnog portfolia

$$\hat{x} = (0.5, 0.5),$$

tražimo VaR optimalan portfolio, sa nivoom poverenja 95%, koji nakon jednog dana donosi očekivani prinos veći ili jednak od unapred fiksiranog μ. Odnosno, tražimo portfolio koji je rešenje problema

$$\begin{aligned} \min_x \min^{\lceil 0.95m \rceil} \{-x^T\xi^1, \ldots, -x^T\xi^m\} \\ x^T\bar{\xi} - \tilde{t}(\hat{x} - x) \geq \mu \\ x^T e = 1 \\ x \geq 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

gde je $\tilde{t}$ normirana funkcija troškova. Pod pretpostavkom da investitor na optimalan način izvršava naloge kupovine i prodaje, [4], razmatramo četiri slučaja. Obeležimo intenzitet trgovanja i-tom akcijom sa v.

1. Nema troškova transakcija, pa je funkcija troškova

$$\tilde{t}(v) = 0. \tag{6.2}$$

2. Impakt je linearan, na osnovu čega je funkcija troškova

$$\tilde{t}(v) = (\epsilon_i + \eta_i v + \gamma_i v + q_i)\,\frac{v}{y}. \tag{6.3}$$

3. Privremeni impakt je nelinearan, dok je trajni impakt linearan, pa je

$$\tilde{t}(v) = \left(\epsilon_i + \eta_i v^{1/2} + \gamma_i v + q_i\right)\frac{v}{y}. \tag{6.4}$$

4. Trajni impakt je nelinearan, a privremeni je linearan, pa je funkcija troškova oblika

$$\tilde{t}(v) = \left(\epsilon_i + \eta_i v + \gamma_i v^{1/2} + q_i\right)\frac{v}{y}. \tag{6.5}$$

Sva četiri slučaja razmatramo za velikog i malog institucionalnog investitora. Na graficima u ovom poglavlju su crnom bojom prikazani rezultati dobijeni bez uzimanja u obzir troškova transakcija, rezultati sa troškovima

linearnog impakta su označeni crvenom bojom, zelenom bojom su prikazani rezultati kada je trajni impakt linearan, a privremeni impakt nelinearan, dok je plava boja upotrebljena za rezultate sa troškovima za koje je trajni impakt nelinearan, a privremeni impakt linearan. Kod velikog institucionalnog investitora vrednost portfolia je $y = 10^8$ funti, a kod malog je $y = 10^6$ funti. Fiksni troškovi kod velikog institucionalnog investitora su

$$q_i = \frac{1}{2}\, s_i + 3 \cdot 10^{-4} P_i,$$

dok su u slučaju malog institucionalnog investitora

$$q_i = 1\% P_i.$$

Za ilustraciju promene VaR mere rizika optimalnog portfolia koristimo krivu koja prikazuje zavisnost optimalne VaR mere rizika od predviđenog prinosa μ. Ova kriva se naziva *efikasna granica* (efficient frontier). Efikasna granica za velikog institucionalnog investitora je prikazana na slici 6.1, a za malu vrednost portfolia na slici 6.3.

Na slikama 6.2 i 6.4 je redom prikazan VaR optimalan portfolio u zavisnosti od predviđenog prinosa μ za portfolio sa vrednošću od sto miliona funti i milion funti. Zbog oganičenja $x^T e = 1$, svaki portfolio od dve akcije se može prikazati u obliku $(1-\lambda, \lambda)$, gde je $\lambda \in [0, 1]$, pa je portfolio na slikama predstavljen koristeći parametar λ. U nekim slučajevima je mala razlika u parametru μ dovela do velike razlike u rešenjima (skokovi na slikama) što je posledica toga da je algoritam u pojedinim slučajevima došao do lokalnog rešenja.

Poredeći slike 6.1 i 6.3, možemo da primetimo da je za isti predviđeni prinos μ optimalna vrednost VaR mere rizika veća kada je u pitanju portfolio sa manjom vrednošću. Znači, VaR optimalni portfolio za malog institucionalnog investitora je rizičniji u odnosu na VaR optimalni portfolio velikog institucionalnog investitora.

I u slučaju velike i u slučaju male vrednosti portfolia vidimo da troškovi transakcija značajno utiču na optimalnu vrednost VaR mere rizika i na VaR optimalan portfolio. Kako troškovi transakcija smanjuju prinos portfolia, dopustivi skup za problem sa troškovima transakcija je podskup dopustivog skupa problema bez troškova transakcija. Zato se uzimanjem u obzir troškove transakcija dobija optimalna vrednost VaR mere rizika koja je veća ili jednaka optimalnoj vrednosti VaR mere rizika zanemarivanjem troškova transakcija.

Povećavanjem predviđenog prinosa μ, u problemima sa troškovima transakcija, smanjuje se razlika između početnog portfolia i VaR optimalnog portfolia. Za predviđeni prinos

$$\mu = \hat{x}^T \bar{\xi} = 12.31,$$

izražen u *bp*, VaR optimalni portfolio je baš početni portfolio $\hat{x}$. Kada je

$$\mu > \hat{x}^T \bar{\xi} = 12.3$$

početni portfolio je van dopustivog skupa, pa za te slučajeve, u prikazanim primerima, algoritam nije našao dopustivo rešenje.

Posmatrajući spred akcija, imamo informaciju da je akcija RIO likvidnija od akcije SN. Na slikama 6.2 i 6.4 se vidi da se stavljanjem naglaska na rizik portfolia – predviđeni prinos je mali u problemima minimizacije VaR mere rizika – dobija optimalni portfolio u kojem je vrednost akcija SN veća od vrednosti akcija RIO. Što je veći predviđeni prinos μ, vrednost akcija RIO raste u odnosu na vrednost akcija SN.

Slika 6.3 prikazuje da su kod malog institucionalnog investitora troškovi uzrokovani impaktom zanemarljivi u poređenju sa fiksnim troškovima, pa ne postoji značajna razlika u izboru linearnog i nelinearnog modela privremenog i trajnog impakta. Ovu činjenicu potvrđuju i podaci u tabeli 6.1, koja sadrži vrednosti troškova uzrokovanih impaktom u slučajevima (6.3), (6.4) i (6.5). Normirani troškovi impakta su prikazani u zavisnosti od vrednosti prodatih i kupljenih akcija, koje su jednake i obeležene su sa Δ. Znači,

$$\Delta = |\hat{x}_1 - x_1^*| = |\hat{x}_2 - x_2^*|,$$

pri čemu je x^* VaR optimalni portfolio. Apsolutne razlike vrednosti troškova uzrokovanih impaktom u posmatranim slučajevima, izraženim u *bp*, su manje od 10^{-3}.

U slučaju velikog institucionalnog investitora postoji razlika u izboru linearnog i nelinearnog modela privremenog i trajnog impakta, slika 6.1. Kako je

$$\epsilon_i + \eta_i v > \gamma_i v = \frac{\eta_i}{10}\ v,$$

troškovi privremenog impakta su veći od troškova trajnog impakta. Zbog ove osobine, kada se koristi nelinearan privremeni i linearan trajni impakt optimalna vrednost VaR mere rizika je manja ili jednaka vrednosti VaR mere

rizika dobijene sa linearnim impaktom, kao i vrednosti VaR mere rizika dobijene sa linearnim privremenim i nelinearnim trajnim impaktom. Troškovi prouzrokovani linearnim privremenim i trajnim impaktom su dosta bliski po veličini troškovima uzrokovanim linearnim privremenim i nelinearnim trajnim impaktom.

Sada ćemo razmotriti uticaj troškova transakcija na problem optimizacije VaR mere rizika portfolia sastavljenog od sedam akcija. Posmatrajmo portfolio (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) koji je sastavljen od akcija kompanija Astrazeneca (AZN), Bae Systems (BA), Lonmin (LMI), Rio Tinto (RIO), Smith & Nephew (SN), Tesco (TSCO) i Vodafone (VOD) sa Londonske berze. Vektori dnevnih prinosa portfolia $\xi^i = (\xi_1, \ldots, \xi_7)$, $i = 1, \ldots, m$, su poznati za $m = 500$ dana. Prosečan prinos početnog portfolia $\hat{x}$ izražen u *bp* je

$$\bar{\xi} = (-5.08, 2.91, 13.41, 17.65, 6.96, 5.82, 6.72),$$

a početni portfolio je

$$\hat{x} = \left(\frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{7}\right).$$

Spred akcija u portfoliu je $s_1 = 2$, $s_2 = 1.5$, $s_3 = 8$, $s_4 = 9$, $s_5 = 3.5$, $s_6 = 0.25$ i $s_7 = 0.2$ funti. Znači, akcije TSCO, AZN i VOD su najlikvidnije.

Na slikama 6.5 i 6.10 je redom prikazana efikasna granica problema (6.1) za vrednost portfolia od $y = 10^8$ funti i $y = 10^6$ funti, razmatrajući sva četiri slučaja, (6.2), (6.3), (6.4) i (6.5), za normiranu funkciju troškova. Nezavisno od vrednosti portfolia troškovi transakcija utiču na VaR optimalni portfolio, odnosno dovode do povećanja optimalne vrednosti VaR mere rizika, s tim da je VaR optimalni portfolio sa vrednošću od milion funti rizičniji od VaR optimalnog portfolia sa vrednošću od sto miliona funti.

VaR optimalni portfolio za velikog institucionalnog investitora je ilustrovan na slikama 6.6, 6.7, 6.8 i 6.9 tako što je prikazana zavisnost udela svake akcije iz portfolia u odnosu na predviđeni prinos μ. Svakom od četiri navedena slučaja za troškove transakcija odgovara jedna slika. Zanemarujući troškove transakcija, VaR optimalni portfolio za malog institucionalnog investitora je isti kao i za velikog institucionalnog investitora, slika 6.6. Na slikama 6.11, 6.12 i 6.13 je redom prikazan VaR optimalni portfolio problema sa troškovima transakcija (6.3), (6.4) i (6.5) za malog institucionalnog investitora. Slike pokazuju da se, uzimanjem u obzir troškove transakcija, povećavanjem parametra μ smanjuje razlika između početnog portfolia i VaR

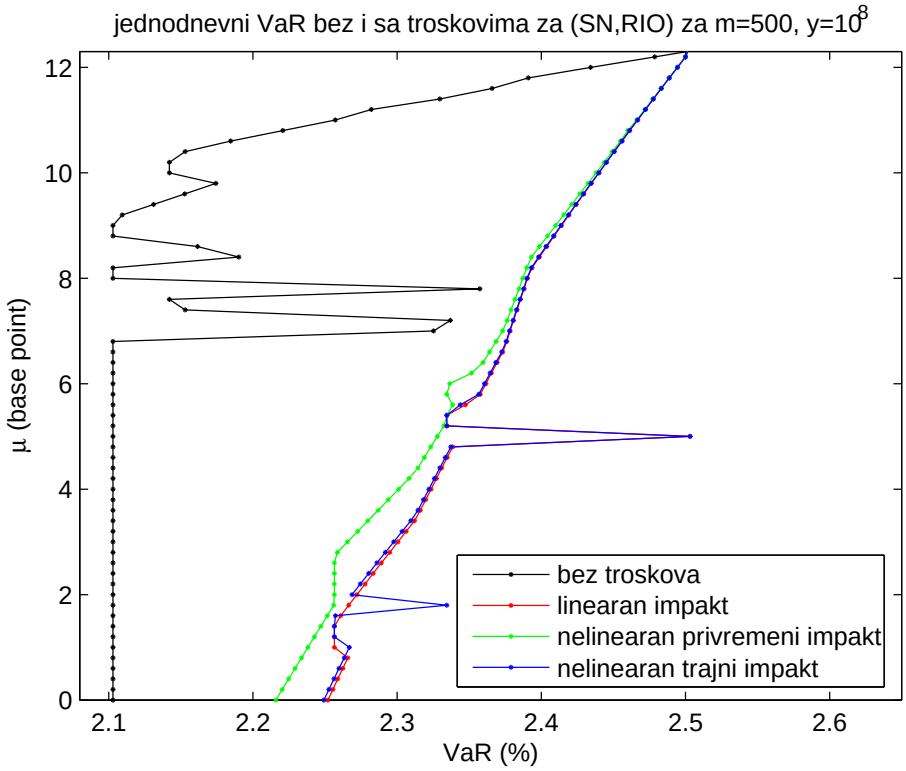
optimalnog portfolia. Za predviđeni prinos

$$\mu = \hat{x}^T \bar{\xi} = 6.9,$$

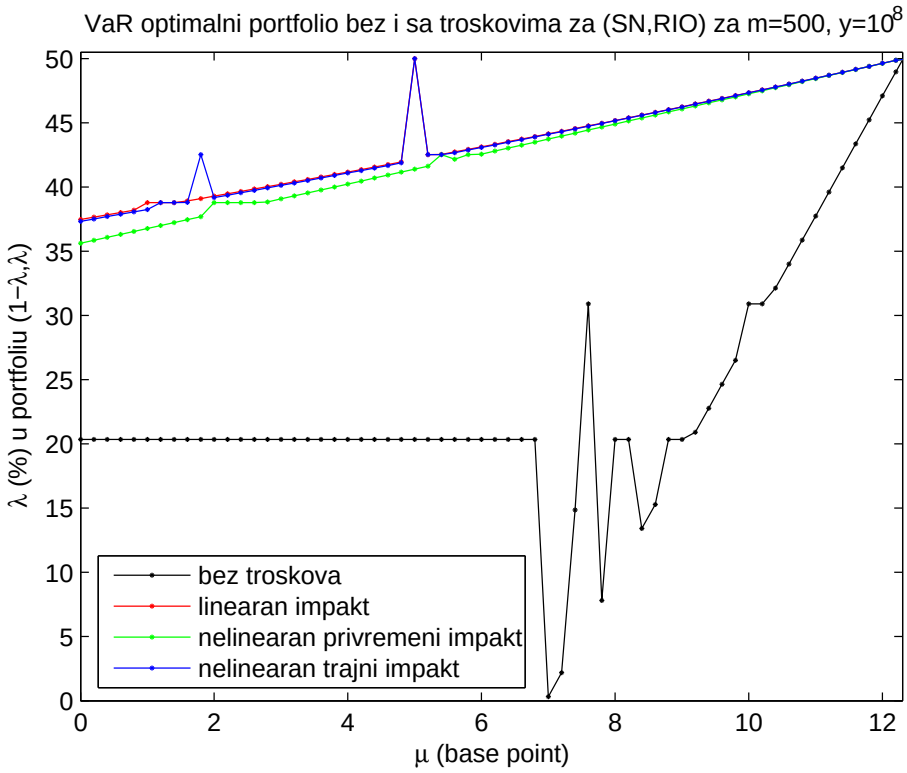
izražen u *bp*, VaR optimalni portfolio je baš početni portfolio $\hat{x}$, dok za veće predviđene prinose algoritam nije našao dopustivo rešenje.

Grafik sa slike 6.6 pokazuje da je, bez uzimanja u obzir troškova transakcija, zastupljenost manje likvidnih akcija RIO i LMI, kao i akcije AZN sa negativnim prosečnim prinosom u VaR optimalnom portfoliu manja od 10%, dok je najviše zastupljena akcija jedna od najlikvidnijih akcija, akcija TSCO. Nakon uvođenja troškova, slike 6.7, 6.8, 6.9, 6.11, 6.12 i 6.13, akcija AZN, koja je jedna od najlikvidnijih akcija, postaje zastupljenija u VaR optimalnom portfoliu. Kod velike vrednosti portfolia akcija RIO i dalje ostaje najmanje zastupljena, a kod male vrednosti portfolia akcije RIO i LMI ostaju najmanje zastupljene.

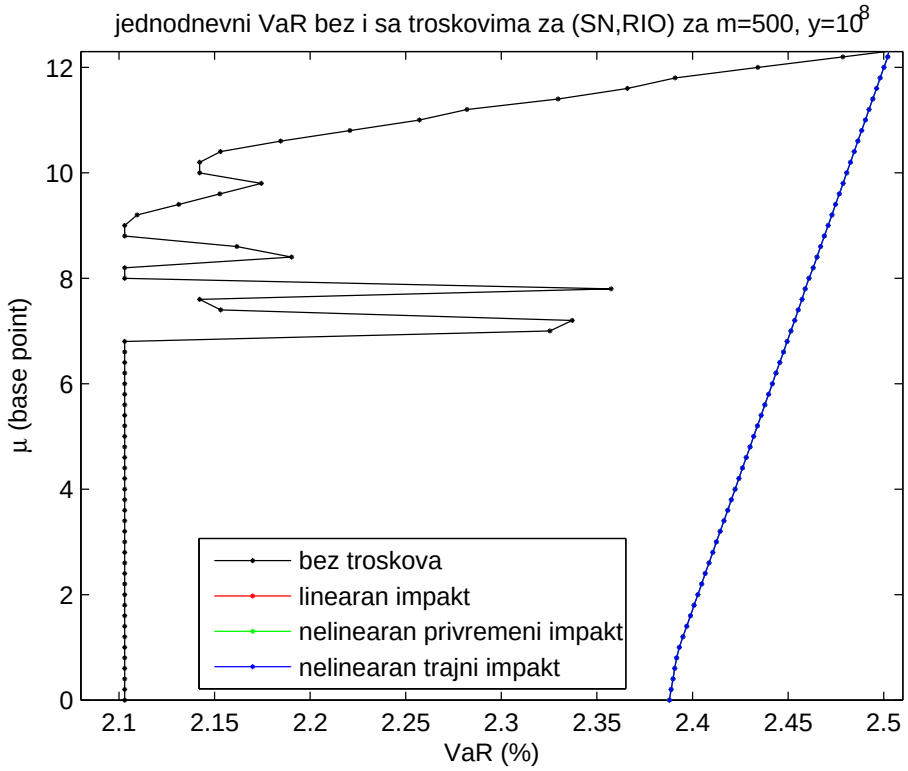
I u slučaju portfolia koji je sastavljen od sedam akcija, dobijeni grafici za malog institucionalnog investitora potvrđuju da izbor linearnog i nelinearnog modela impakta ne igra ulogu u određivanju VaR optimalnog portfolia kada je vrednost portfolia mala.



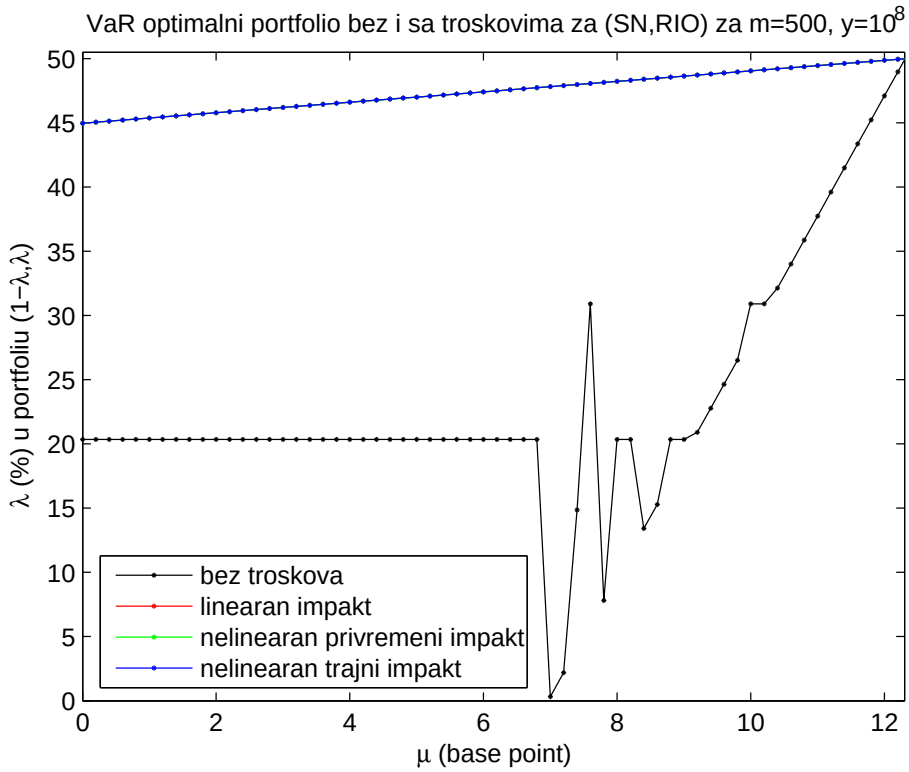
Slika 6.1: Efikasna granica jednodnevne VaR mere rizika za velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (SN,RIO)



Slika 6.2: VaR optimalni portfolio za velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (SN,RIO) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika



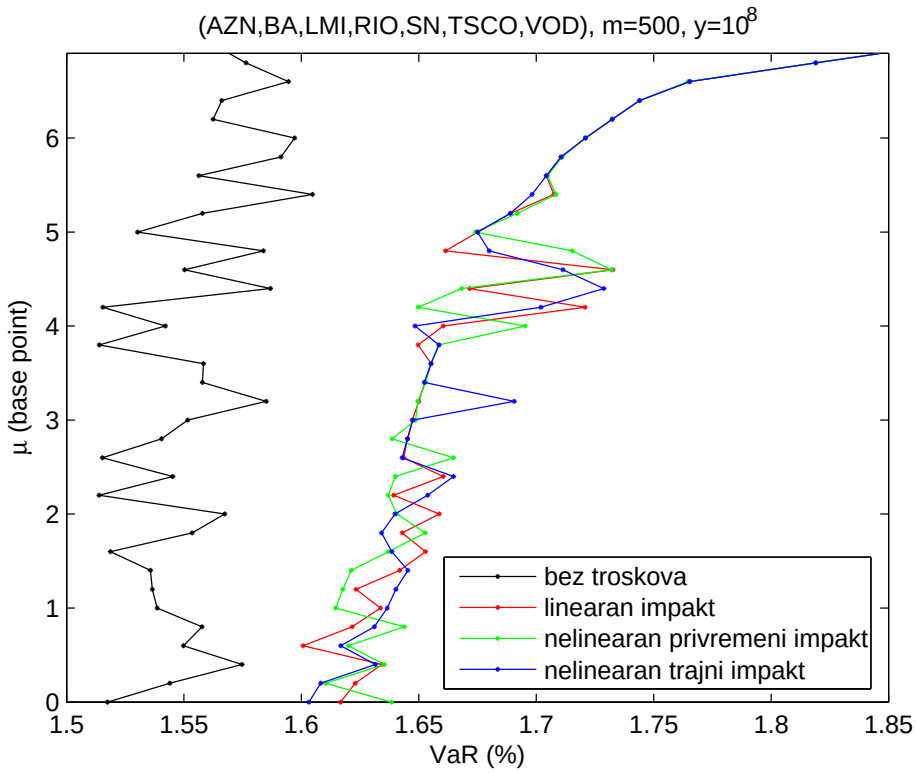
Slika 6.3: Efikasna granica jednodnevne VaR mere rizika za malog institucionalnog investitora sa portfoliom (SN,RIO)



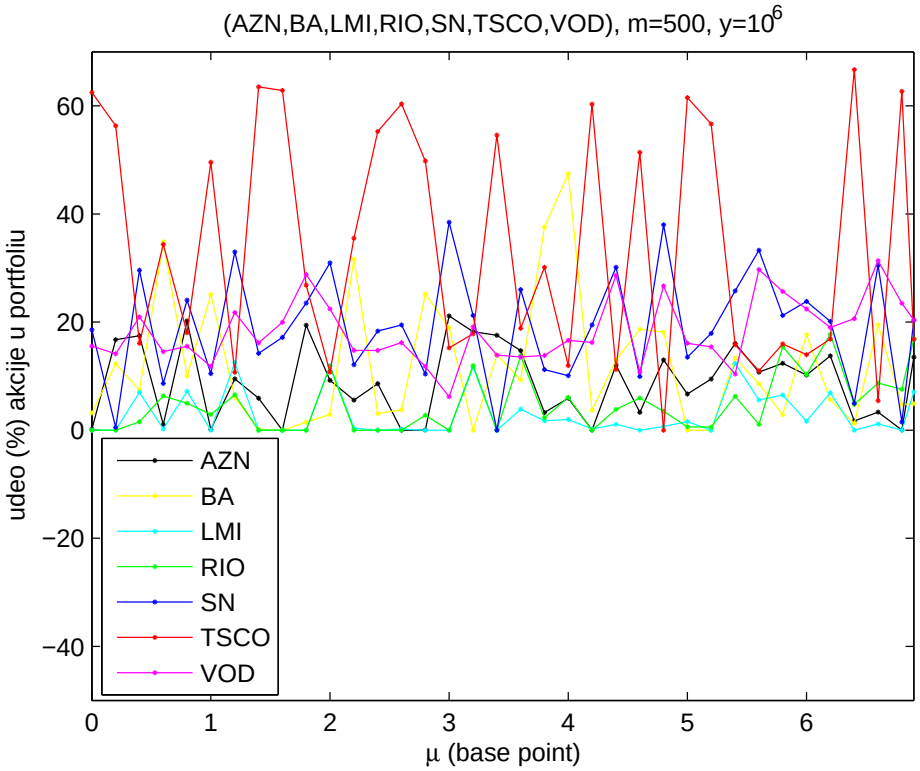
Slika 6.4: VaR optimalni portfolio za malog institucionalnog investitora sa portfoliom (SN,RIO) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika

	lin. trajni i lin. privremeni impakt	lin. trajni i nelin. privremeni impakt	nelin. trajni i lin. privremeni impakt
Δ (%)	troškovi impakta (bp)	troškovi impakta (bp)	troškovi impakta (bp)
5.04	1.69818172	1.6961823	1.69798185
4.63	1.56004449	1.55836684	1.55987678
4.22	1.42194031	1.42055582	1.4218019
3.81	1.28386918	1.28274932	1.28375723
3.40	1.14583112	1.14494742	1.14574277
2.99	1.00782613	1.00715021	1.00775855
2.58	0.8698542	0.8693578	0.86980457
2.17	0.73191535	0.73157034	0.73188085
1.76	0.59400957	0.59378799	0.59398742
1.35	0.45613688	0.456011	0.45612429
0.95	0.31829727	0.31823969	0.31829151
0.54	0.18049075	0.18047463	0.18048914
0.13	0.04271732	0.04271699	0.04271729

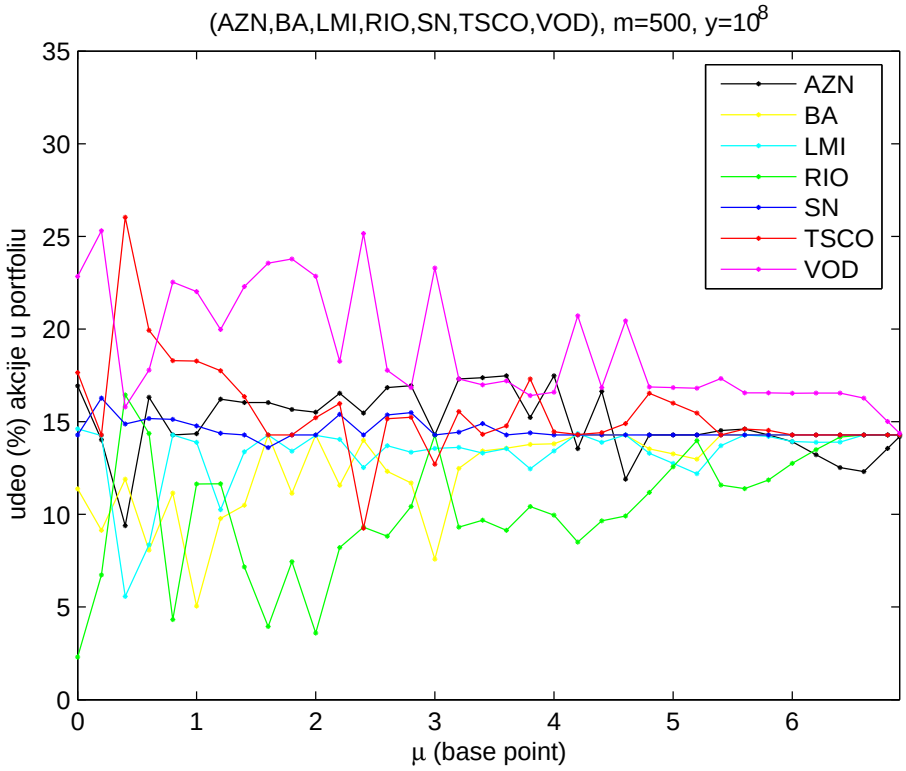
Tabela 6.1: Troškovi impakta portfolia (SN,RIO) sa vrednošću od milion funti u slučajevima (6.3), (6.4) i (6.5)



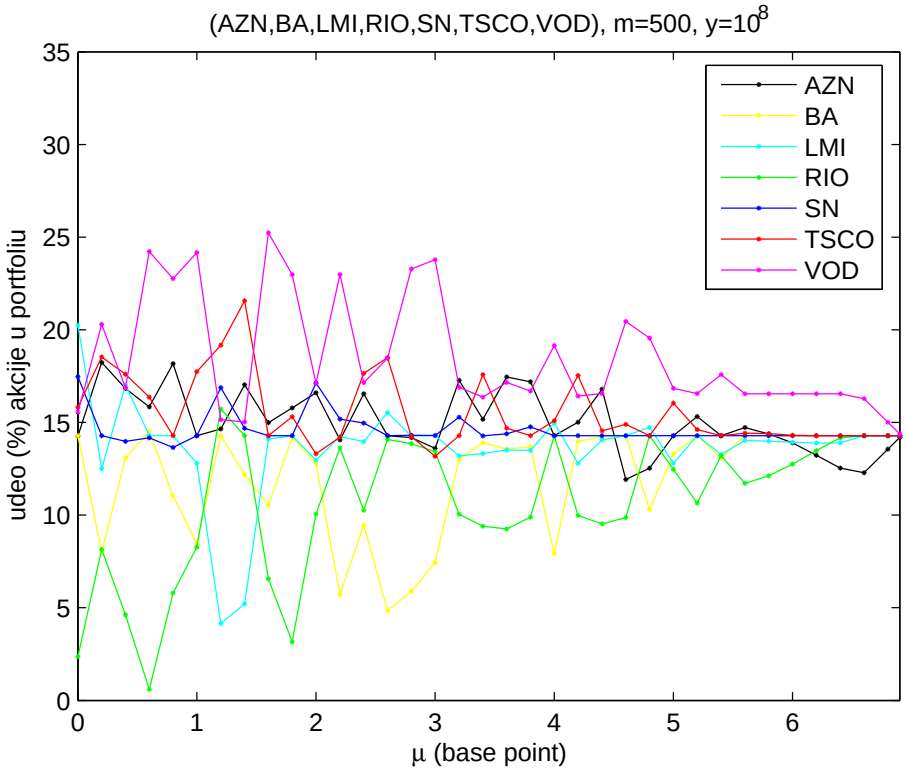
Slika 6.5: Efikasna granica jednodnevne VaR mere rizika za velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD)



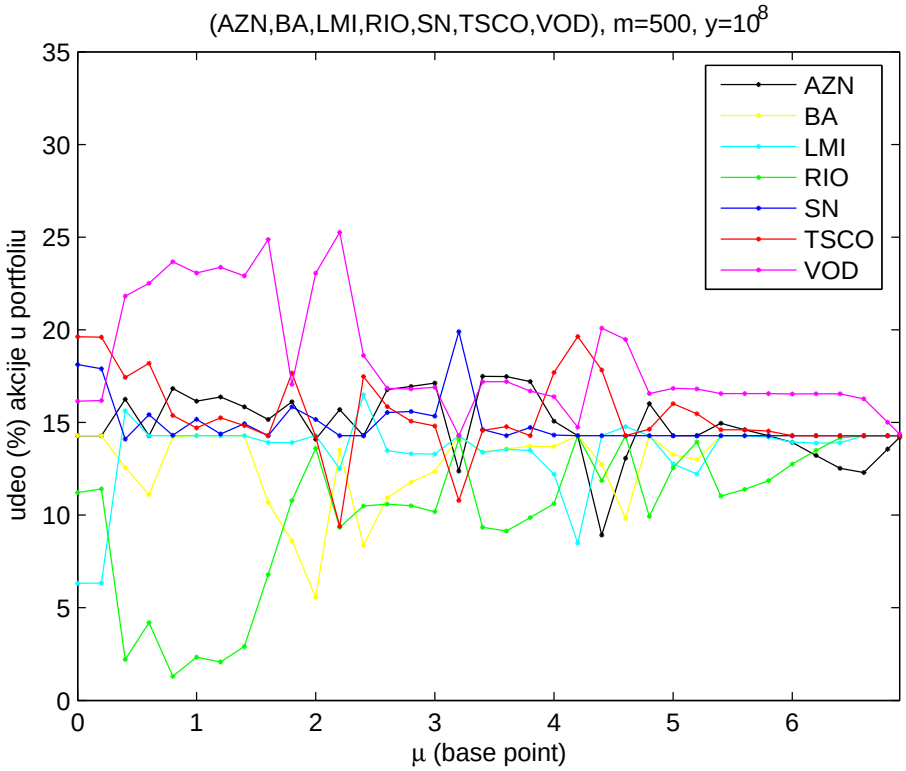
Slika 6.6: VaR optimalni portfolio velikog i malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika, bez troškova transakcija



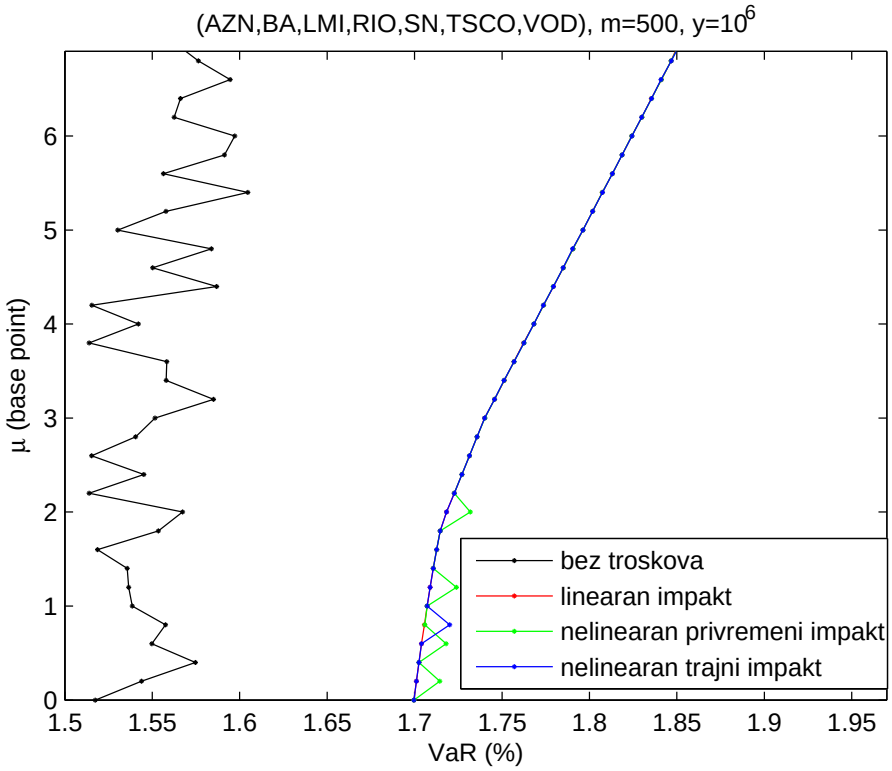
Slika 6.7: VaR optimalni portfolio velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika, sa linearnim impaktom



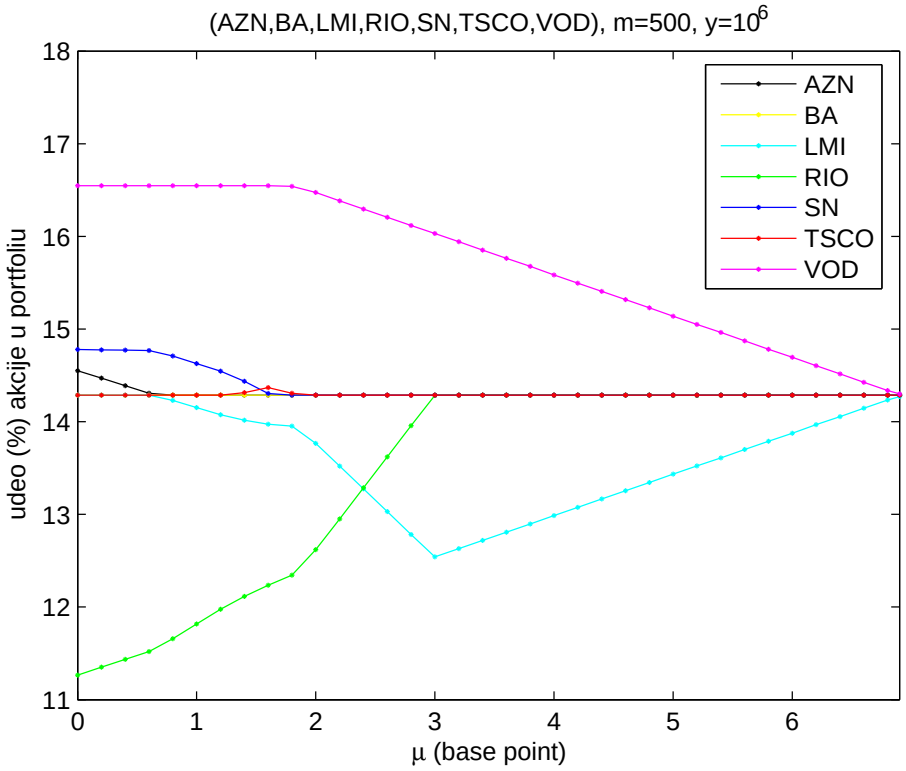
Slika 6.8: VaR optimalni portfolio velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika, sa nelinearnim privremenim impaktom i linearnim trajnim impaktom



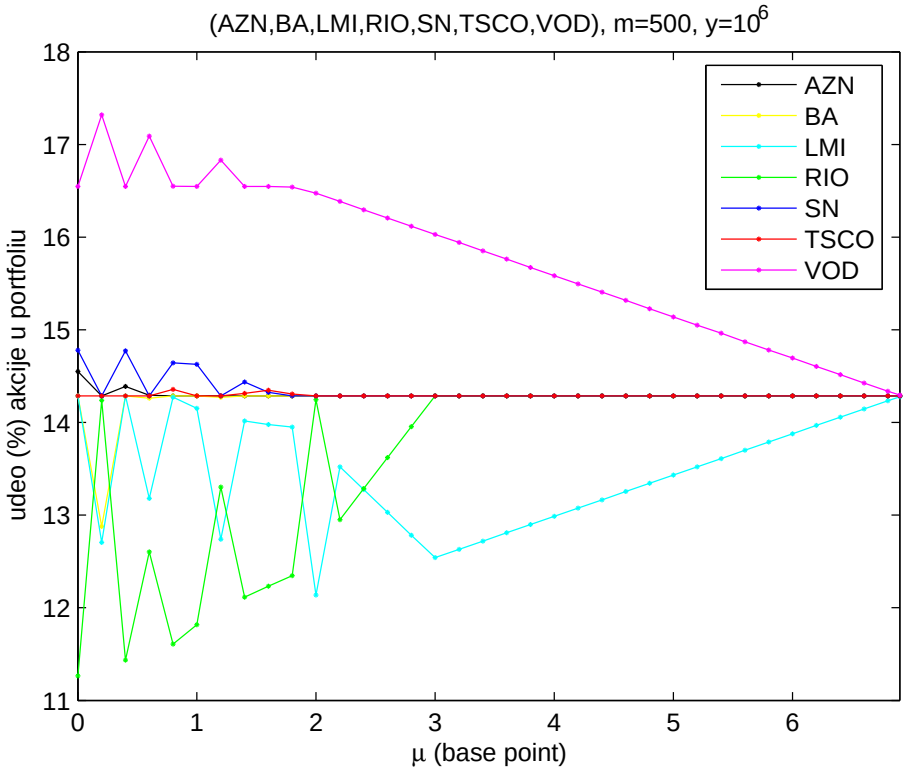
Slika 6.9: VaR optimalni portfolio velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika, sa linearnim privremenim impaktom i nelinearnim trajnim impaktom



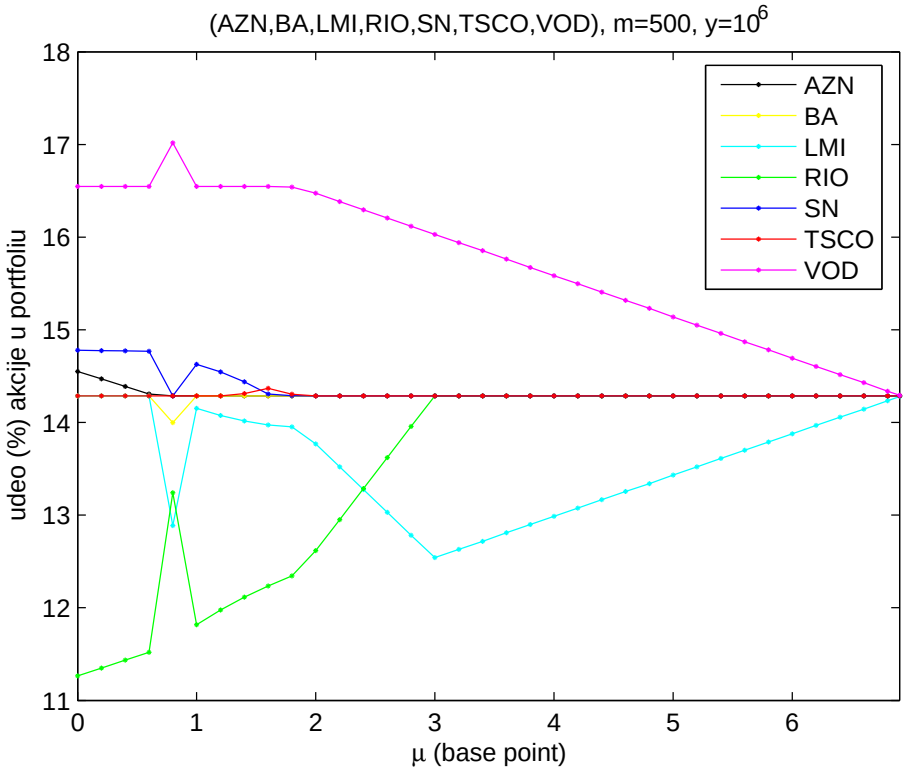
Slika 6.10: Efikasna granica jednodnevne VaR mere rizika za malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD)



Slika 6.11: VaR optimalni portfolio malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika, sa linearnim impaktom



Slika 6.12: VaR optimalni portfolio malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika, sa nelinearnim privremenim impaktom i linearnim trajnim impaktom



Slika 6.13: VaR optimalni portfolio malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći jednodnevnu VaR meru rizika, sa linearnim privremenim impaktom i nelinearnim trajnim impaktom

6.2 Desetodnevni VaR

Posmatrajmo portfolio (SN,RIO) koji je sastavljen od akcija kompanija Smith & Nephew i Rio Tinto sa Londonske berze. Poznati su vektori desetodnevih prinosa portfolia $\xi^i = (\xi_1, \xi_2)$, $i = 1, \ldots, m$, za $m = 100$. Uzimajući za početni portfolio

$$\hat{x} = (0.5, 0.5),$$

tražimo VaR optimalan portfolio, sa nivoom poverenja 95%, koji nakon deset dana donosi prinos μ – tražimo rešenje problema (6.1). Upoređujemo optimalnu VaR meru rizika i VaR optimalni portfolio za normiranu funkciju troškova oblika (6.2), (6.3), (6.4) i (6.5), kao i za vrednost portfolia od $y = 10^8$ funti i $y = 10^6$ funti. I u ovom poglavlju su crnom bojom prikazani rezultati dobijeni bez troškova transakcija, crvenom bojom su označeni rezultati sa troškovima linearnog impakta, zelenom bojom su prikazani rezultati primenom troškova za koje je trajni impakt linearan, a privremeni impakt nelinearan, dok je plava boja upotrebljena za rezultate sa troškovima za koje je trajni impakt nelinearan, a privremeni impakt linearan.

U slučaju kada je za veliku vrednost portfolia predviđeni prinos μ, izražen u procentima, u intervalu $[0, 0.79]$ optimalna vrednost VaR mere rizika za probleme sa i bez troškova je jednaka. Isti je slučaj i za malu vrednost portfolia kada $\mu \in [0, 0.69]$. Iz tog razloga, na slikama 6.14 i 6.16 je redom prikazana efikasna granica za velikog i malog institucionalnog investitora za $\mu \in [0.75, 0.97]$ i $\mu \in [0.65, 0.94]$. Analogno je sa VaR optimalnim portfoliom koji je ilustrovan slikom 6.15 za portfolio u vrednosti od sto miliona funti i slikom 6.17 za portfolio sa vrednošću od milion funti. Znači, kada je VaR optimalni portfolio problema bez troškova transakcija dopustiv i nakon uzimanja u obzir troškove transakcija, rešenje problema minimizacije VaR mere rizika koji uključuje troškove transakcija je jednako rešenju problema bez troškova. Na slici 6.17, za impakt modeliran linearnom funkcijom, postoji skok za $\mu = 0.66$ jer je u problemu sa tim parametrom dobijeno lokalno rešenje.

Kao i kod jednodnevne, tako i kod desetodnevne VaR mere rizika optimalna vrednost VaR mere rizika zanemarivanjem troškove transakcija je manja ili jednaka optimalnoj vrednosti dobijene uzimajući u obzir troškove transakcija. Odnosno, VaR optimalni portfolio velikog institucionalnog investitora je manje rizičan u odnosu na VaR optimalan portfolio malog institucionalnog investitora. Pored toga, kod male vrednosti portfolia ne postoji

značajna razlika u izboru linearnog i nelinearnog modela privremenog i trajnog impakta.

Pošto je vektor prinosa portfolia izražen u procentima

$$\bar{\xi} = (0.36, 1.52),$$

za predviđeni prinos

$$\mu > \hat{x}^T \bar{\xi} = 0.94$$

početni portfolio nije dopustiv za posmatrane probleme. Kod malog institucionalnog investitora, za navedene vrednosti parametra μ, korišteni algoritam nije došao do rešenja. Međutim, kod velikog institucionalnog investitora smo dobili rešenje do $\mu = 0.97$.

Posmatrajmo portfolio sastavljen od akcija kompanija Astrazeneca (AZN), Bae Systems (BA), Lonmin (LMI), Rio Tinto (RIO), Smith & Nephew (SN), Tesco (TSCO) i Vodafone (VOD) sa Londonske berze. Poznati su vektori desetodnevnih prinosa portfolia $\xi^i = (\xi_1, \ldots, \xi_7)$, $i = 1, \ldots, m$, za $m = 100$, na osnovu kojih je prosečan prinos portfolia izražen u procentima

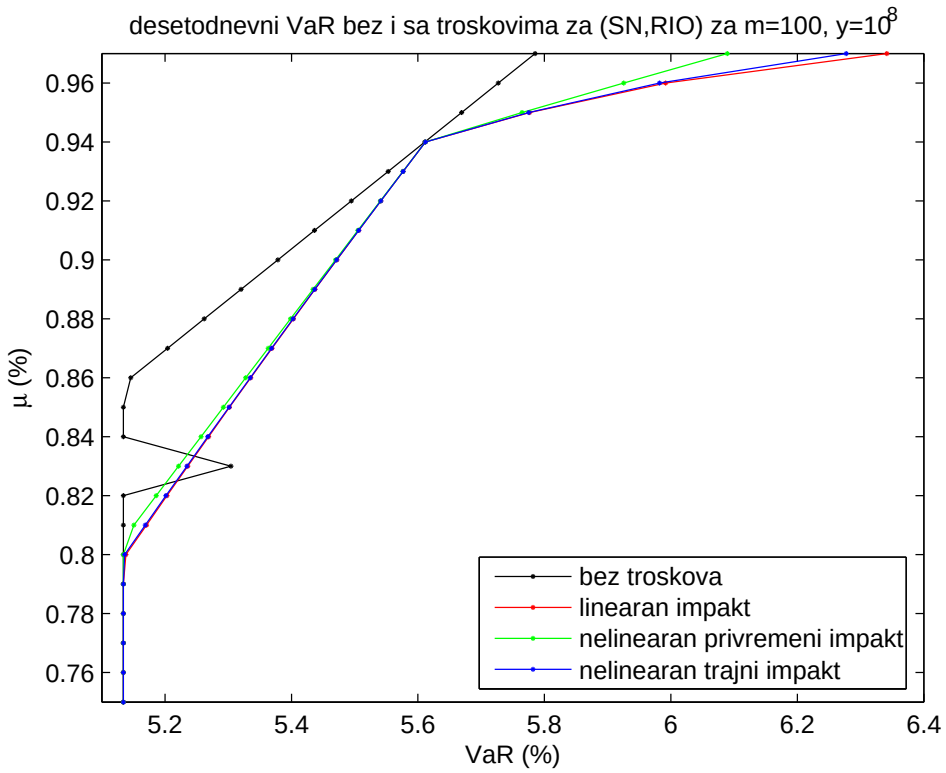
$$\bar{\xi} = (-0.16, 1.08, 1.29, 1.52, 0.36, 0.53, 0.2).$$

Početni portfolio je

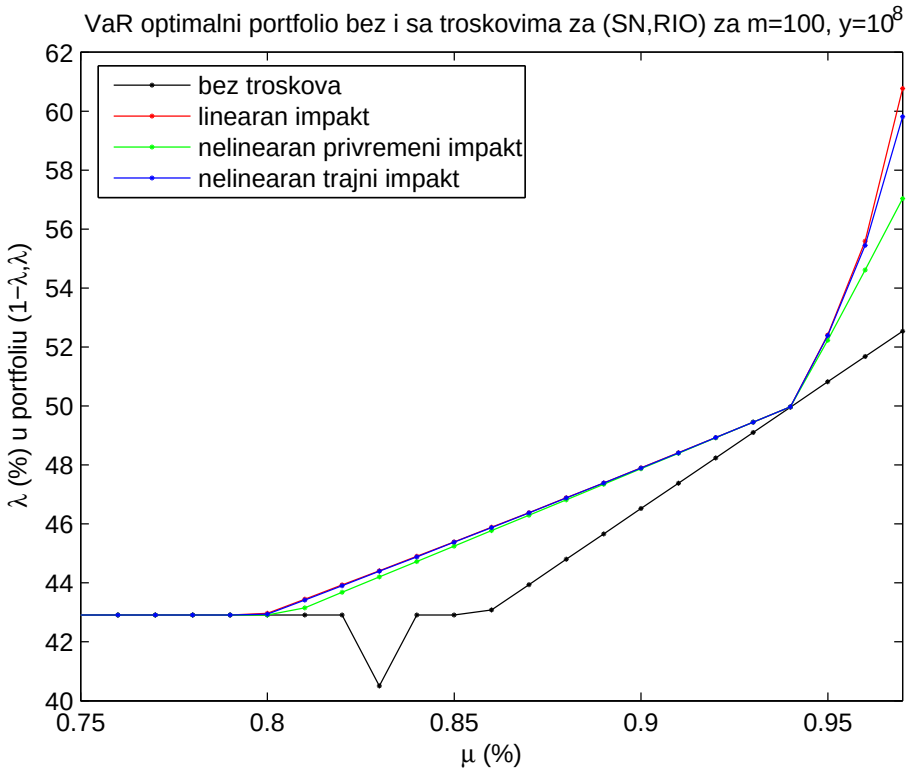
$$\hat{x} = \left(\frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{7}\right).$$

Efikasne granice za portfolio u vrednosti od sto miliona funti i za portfolio u vrednosti od milion funti, slike 6.18 i 6.19, i na ovim primerima potvrđuju da troškovi transakcija utiču na smanjenje vrednosti optimalne VaR mere rizika. Kao i da u slučaju malog institucionalnog investitora ne postoje velike razlike u izboru linearnosti impakta.

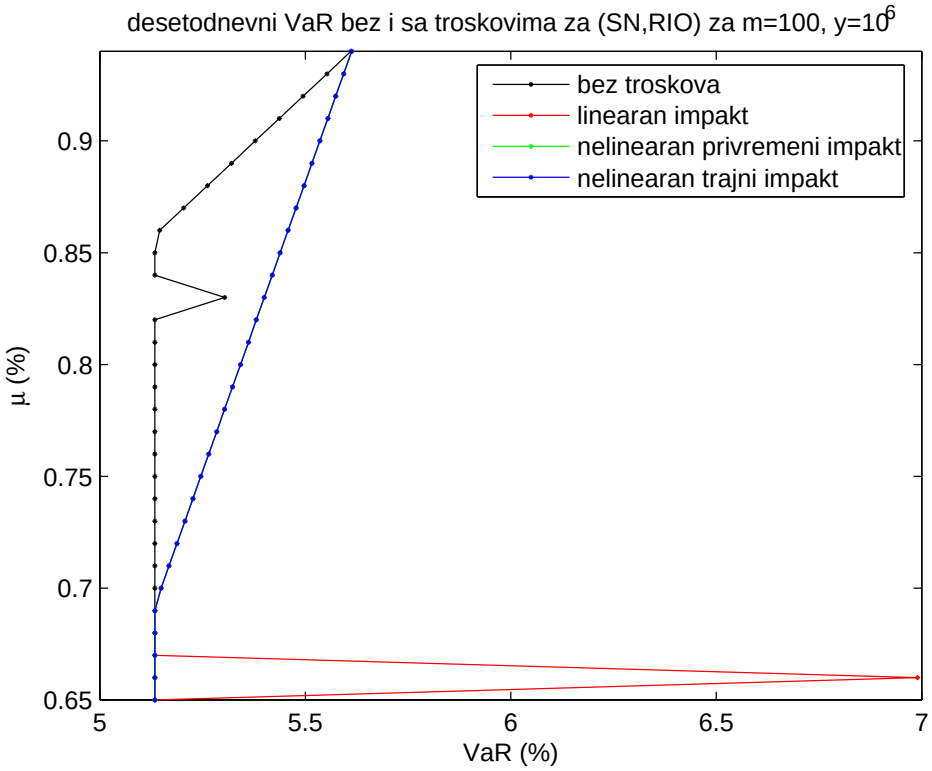
VaR optimalan portfolio za problem bez troškova transakcija je prikazan tabelom 6.2. Tabele 6.3, 6.4 i 6.5 ilustruju VaR optimalan portfolio za portfolio sa vrednošću od sto miliona funti, uzimajući da su troškovi funkcija redom oblika (6.3), (6.4) i (6.5). Možemo da vidimo da je akcija TSCO, jedna od najlikvidnijih akcija, najzastupljenija u optimalnom portfoliu, dok su najmanje likvidne akcije koje imaju najveći prosečan prinos, akcije RIO i LMI, uglavnom najmanje zastupljene. Za malog institucionalnog investitora VaR optimalan portfolio za problem sa troškovima modeliranim funkcijama (6.3), (6.4) i (6.5) je prikazan u tabelama 6.6, 6.7 i 6.8, respektivno. Sve dok predviđeni prinos μ dozvoljava, akcija TSCO je najviše zastupljena u VaR optimalnom portfoliu, dok su akcije RIO i LMI najmanje zastupljene.



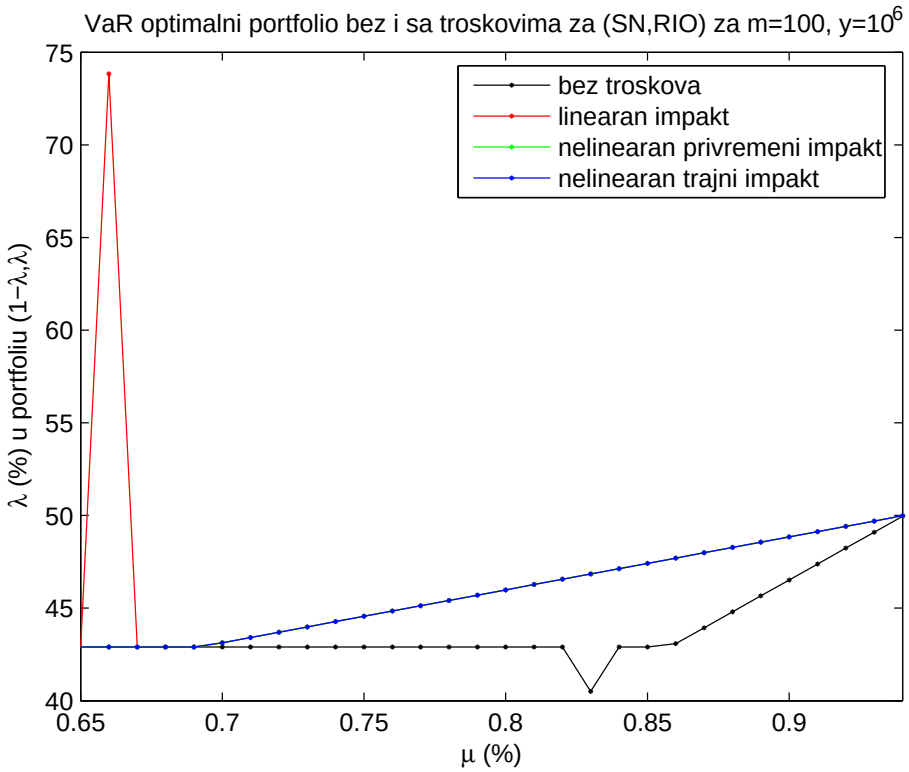
Slika 6.14: Efikasna granica desetodnevne VaR mere rizika za velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (SN,RIO)



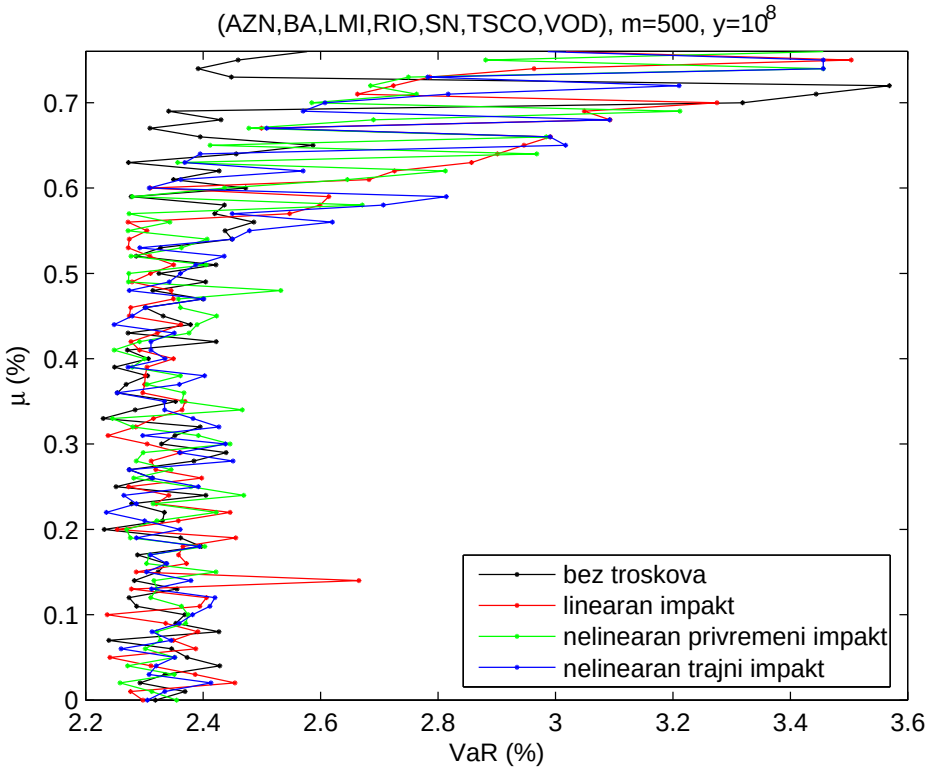
Slika 6.15: VaR optimalni portfolio za velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (SN,RIO) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika



Slika 6.16: Efikasna granica desetodnevne VaR mere rizika za malog institucionalnog investitora sa portfoliom (SN,RIO)



Slika 6.17: VaR optimalni portfolio za malog institucionalnog investitora sa portfoliom (SN,RIO) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika



Slika 6.18: Efikasna granica desetodnevne VaR mere rizika za velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD)

μ (%)	x_1 (%)	x_2 (%)	x_3 (%)	x_4 (%)	x_5 (%)	x_6 (%)	x_7 (%)
0	18.31	5.4	1.76	9.81	16.9	26.93	20.89
0.05	9.46	14.89	1.41	9.62	19.2	31.46	13.95
0.1	4.67	10.79	6.14	4.18	23.26	37.87	13.09
0.15	24.65	17.83	5.39	2.99	18.05	22.91	8.18
0.2	18.49	12.08	2.98	9.27	17.82	16.94	22.42
0.25	19.96	20.01	3.36	7.31	14.16	34.69	0.5
0.3	15.04	11.98	0	11.48	17.41	27.77	16.32
0.35	9.04	9.75	9.99	2.69	23.44	29.65	15.44
0.4	20.95	14.79	8.4	2.83	16.09	25.39	11.55
0.45	11.29	11.41	1.76	9.53	19.11	31.28	15.63
0.5	14.53	12.26	9.93	1.48	19.72	29.28	12.8
0.55	8.33	10.49	0.56	10.29	19.51	34.27	16.56
0.6	10.54	18.54	0	10.7	17.18	31.7	11.33
0.65	0	11.29	4.57	8.71	21.03	45.34	9.06
0.7	0	0	0	16.79	0	83.21	0
0.75	0	11.25	4.6	14.42	6.35	59.77	3.62
0.76	2.67	18.34	5.91	13.23	16.28	42.72	0.85

Tabela 6.2: VaR optimalni portfolio velikog i malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika, bez troškova transakcija

μ (%)	x_1 (%)	x_2 (%)	x_3 (%)	x_4 (%)	x_5 (%)	x_6 (%)	x_7 (%)
0	15.61	14.76	7.73	5.18	19.2	25.29	12.23
0.05	16.12	11.77	4.54	7.39	18.67	19.27	22.24
0.1	18.1	11.74	3.51	8.91	17.47	17.44	22.82
0.15	18.2	18.42	4.63	6.68	15.77	31.43	4.87
0.2	16.43	11.21	4.6	7.36	18.45	17.86	24.09
0.25	14.42	12.86	9.05	2.2	19.93	27.07	14.46
0.3	17.97	13.21	3.37	9.67	18.07	18.04	19.68
0.35	18.86	19.31	4.04	7.57	16.15	28.24	5.83
0.4	0.13	5.89	9.91	6.27	13.84	50.38	13.59
0.45	4.96	16.69	5.28	10.96	17.45	37.39	7.26
0.5	6.06	15.29	5.98	10.49	17.2	37.3	7.67
0.55	7.25	16.87	5.46	12.11	16.08	35.5	6.74
0.6	6.95	16.01	6.54	11.35	15.04	36.39	7.72
0.65	15.31	17.58	9.65	15.49	14.29	14.29	13.4
0.7	14.82	22.46	14.02	15.31	16.08	9.7	7.6
0.75	9.43	16.62	11.69	20.88	14.29	14.29	12.81
0.76	0.34	28.26	13.83	11.78	14.29	27.72	3.79

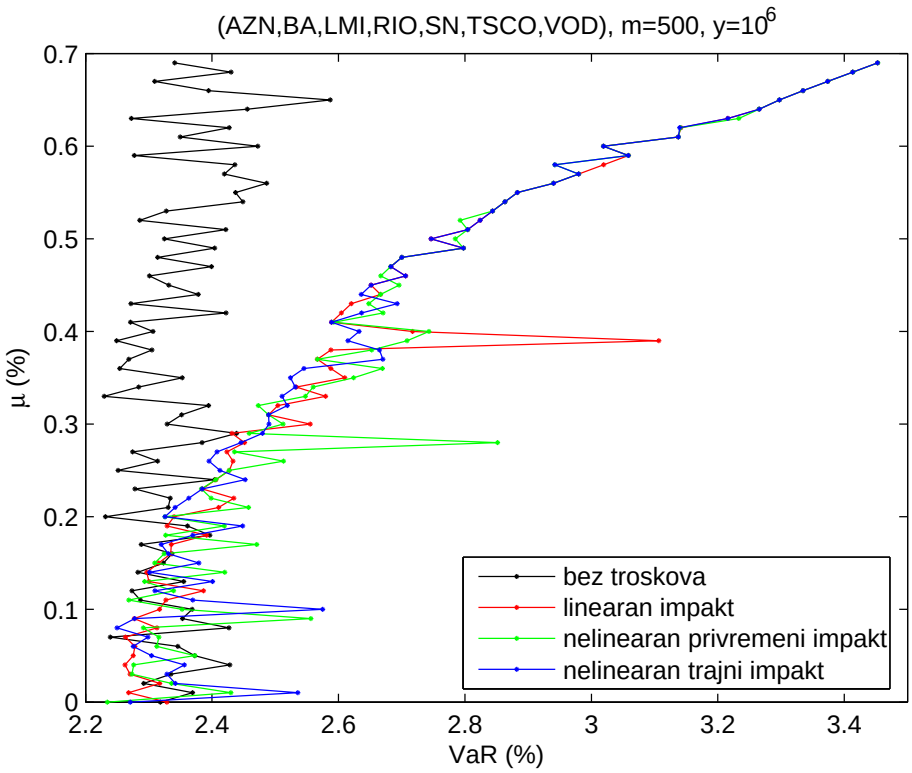
Tabela 6.3: VaR optimalni portfolio velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika, sa linearnim impaktom

μ (%)	x_1 (%)	x_2 (%)	x_3 (%)	x_4 (%)	x_5 (%)	x_6 (%)	x_7 (%)
0	14.62	10.95	3.47	8.43	19.35	26.41	16.77
0.05	0	6.26	8.97	6.47	13.86	50.63	13.81
0.1	13.83	2.31	11.14	1.64	21.94	28.80	20.33
0.15	15.06	9.44	9.16	4.85	22.92	21.53	17.04
0.2	31.9	17.85	6.63	5.39	12.63	22.85	2.75
0.25	16.3	9.12	4.56	3.62	15.28	17.02	34.09
0.3	6.36	3.22	9.95	8.62	7.25	48.04	16.57
0.35	0.61	6.43	8.87	7.09	14.86	50.35	11.79
0.4	22.35	15.56	0	8.62	14.29	25.07	14.12
0.45	4.70	16.43	8.14	9.21	17.09	37.87	6.57
0.5	5.06	16.39	5.67	10.87	17.34	37.39	7.28
0.55	5.16	16.21	5.58	10.9	17.29	37.43	7.43
0.6	0	9.05	3.47	16.45	12.91	53.92	4.2
0.65	1.99	15.6	10.53	9.05	14.29	41.48	7.06
0.7	0	18.49	8.87	13	14.29	39.46	5.9
0.74	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29
0.75	0	20.37	11.4	14.29	14.29	33.09	6.56
0.76	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29

Tabela 6.4: VaR optimalni portfolio velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika, sa nelinearnim privremenim impaktom i linearnim trajnim impaktom

μ (%)	x_1 (%)	x_2 (%)	x_3 (%)	x_4 (%)	x_5 (%)	x_6 (%)	x_7 (%)
0	19.66	20.13	3.05	7.27	15.53	31.58	2.79
0.05	16.58	13.65	7.33	0.77	21.84	23.46	16.37
0.1	28.85	21.75	1.91	4.84	17.17	21.66	3.82
0.15	6.28	15.55	5.43	11.36	16.61	37.62	7.15
0.2	4	11.36	4.67	4.89	22.87	39.59	12.62
0.25	14.74	16.57	8.66	5.98	19.42	26.01	8.62
0.3	1.9	8.13	7.76	12.2	5.86	56.45	7.7
0.35	12.33	12.88	2.19	9.73	18.77	29.33	14.76
0.4	7.92	10.75	6.68	4.63	22.5	32.57	14.94
0.45	16.71	16.67	6.01	6.22	17.84	28.49	8.06
0.5	12.70	18.31	0	12.99	17.53	27.61	10.85
0.55	14.29	23.82	0.2	14.29	15.2	32.2	0
0.6	5.18	15.87	7.32	10.28	15.68	38.2	7.48
0.65	15.91	22.82	6.21	21.21	15.73	8.04	10.08
0.7	0	18.94	8.45	13.75	14.29	38.83	5.75
0.75	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29	14.29
0.76	0	21.29	12.4	14.29	14.29	31.59	6.15

Tabela 6.5: VaR optimalni portfolio velikog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika, sa linearnim privremenim impaktom i nelinearnim trajnim impaktom



Slika 6.19: Efikasna granica desetodnevne VaR mere rizika za malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD)

μ (%)	x_1 (%)	x_2 (%)	x_3 (%)	x_4 (%)	x_5 (%)	x_6 (%)	x_7 (%)
0	8.07	16.7	5.23	9.72	18.92	32.04	9.31
0.05	5.26	16.15	5.68	10.88	17.12	37.41	7.5
0.1	19.27	13.33	9.56	2.43	18.88	21.37	15.17
0.15	6.52	14.63	6.93	10.57	15.01	37.72	8.62
0.2	8.24	14.96	6.94	11.11	14.28	35.65	8.82
0.25	14.29	14.29	0	14.26	16.71	26.93	13.53
0.3	14.29	14.29	1.11	14.29	15.87	25.88	14.29
0.35	14.29	17.29	3.12	14.18	16.54	16.09	18.51
0.4	14.29	14.29	9.44	11.77	14.29	25.71	10.22
0.45	16.75	14.29	7.71	14.29	18.58	14.9	13.48
0.5	15.07	14.29	9.12	14.29	19.45	14.29	13.5
0.55	15.46	16.05	9.5	14.29	14.29	16.14	14.29
0.6	14.29	15.5	11	14.29	14.29	16.36	14.29
0.65	14.29	14.35	13.04	14.29	15.47	14.29	14.29
0.69	14.29	14.29	14.26	14.29	14.31	14.29	14.29

Tabela 6.6: VaR optimalni portfolio malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika, sa linearnim impaktom

μ (%)	x_1 (%)	x_2 (%)	x_3 (%)	x_4 (%)	x_5 (%)	x_6 (%)	x_7 (%)
0	18.71	12.25	2.69	9.75	17.75	16.5	22.35
0.05	19.8	11.81	2.18	9.94	19.6	18.89	17.78
0.1	21.65	14.29	0	10.38	14.29	25.12	14.29
0.15	14.45	14.84	6.79	6.23	19.51	26.9	11.29
0.2	16.06	13.98	3.76	10.17	18.66	18.14	19.24
0.25	14.29	14.29	0	14.25	16.71	26.94	13.53
0.3	14.29	14.71	5.99	9.93	18.15	22.65	14.29
0.35	14.29	16.25	4.63	12.42	16.68	21.44	14.29
0.4	14.29	17.89	3.95	14.29	15.31	19.99	14.29
0.45	16.2	17.67	6.38	14.29	16.89	14.29	14.29
0.5	16.58	15.66	8.12	14.29	14.29	16.79	14.29
0.55	15.46	16.05	9.5	14.29	14.29	16.14	14.29
0.6	14.29	15.5	11	14.29	14.29	16.36	14.29
0.65	14.29	14.35	13.04	14.29	15.47	14.29	14.29
0.69	14.29	14.29	14.26	14.29	14.31	14.29	14.29

Tabela 6.7: VaR optimalni portfolio malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika, sa nelinearnim privremenim impaktom i linearnim trajnim impaktom

μ (%)	x_1 (%)	x_2 (%)	x_3 (%)	x_4 (%)	x_5 (%)	x_6 (%)	x_7 (%)
0	17.39	17.08	5.76	6.23	17.38	29.07	7.09
0.05	14.10	13.01	8.97	2.43	20.33	28.02	13.14
0.1	2.8	3.99	9.14	14.29	14.29	41.21	14.29
0.15	6.68	15.13	5.85	10.94	15.4	36.42	9.58
0.2	16.05	13.98	3.76	10.17	18.66	18.13	19.24
0.26	11.24	14.29	7.61	9.68	14.29	31.52	11.37
0.3	14.29	16.6	6.07	9.6	18.2	20.95	14.29
0.35	19.51	15.08	3.94	14.29	15.48	17.42	14.29
0.4	19.84	16.94	5.84	14.29	15.19	14.3	13.6
0.45	16.75	14.29	7.71	14.29	18.58	14.9	13.48
0.5	15.07	14.29	9.12	14.29	19.45	14.29	13.5
0.55	15.46	16.05	9.5	14.29	14.29	16.14	14.29
0.6	14.29	15.5	11	14.29	14.29	16.35	14.29
0.65	14.29	14.35	13.04	14.29	15.47	14.29	14.29
0.69	14.29	14.29	14.26	14.29	14.31	14.29	14.29

Tabela 6.8: VaR optimalni portfolio malog institucionalnog investitora sa portfoliom (AZN,BA,LMI,RIO,SN,TSCO,VOD) u zavisnosti od predviđenog prinosa μ, koristeći desetodnevnu VaR meru rizika, sa linearnim privremenim impaktom i nelinearnim trajnim impaktom

Literatura

[1] C. Acerbi, C. Nordio, C. Sirtori, *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*, working paper, 2001
www.gloriamundi.org/picsresources/ncs.pdf

[2] C. Acerbi, D. Tasche, *On the Coherence of Expected Shortfall*, Journal of Banking and Finance 26 (7), 1487-1503, 2002

[3] R. F. Almgren, *Optimal Execution with Nonlinear Impact Functions and Trading-Enhanced Risk*, Applied Mathematical Finance 10 (1), 1-18, 2003

[4] R. F. Almgren, N. Chriss, *Optimal Execution of Portfolio Transaction*, Journal of Risk 3 (2), 5-39, 2001

[5] R. Andreani, C. Dunder, J. M. Martínez, *Order-Value Optimization: Formulation and Solution by Means of a Primal Cauchy Method*, Mathematical Mathods of Operations Research 58 (3), 387-399, 2003

[6] R. Andreani, C. Dunder, J. M. Martínez, *Nonlinear-Programming Reformulation of the Order-Value Optimization Problem*, Mathematical Methods of Operations Research 61 (3), 365-384, 2005

[7] R. Andreani, J. M. Martínez, M. Salvatierra, F.Yano, *Quasi-Newton methods for order-value optimization and value-at-risk calculations*, Pacific Journal of Optimization 2, 11-33, 2006

[8] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heath, *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance 9 (3), 203-228, 1999

[9] D. Bertsimas, A. W. Lo, Optimal Control of Execution Costs, Journal of Financial Markets 1 (1), 1-50, 1998

[10] M. J. Best, J. Hlouskova, *Portfolio Selection and Transactions Costs*, Computational Optimization and Applications 24, 95-116, 2003

[11] M. W. Brandt, P. Santa-Clara, *Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space*, The Journal of Finance 61 (5), 2006

[12] S. Butenko, A. Golodnikov, S. Uryasev, *Optimal Security Liquidation Algorithms*, Computational Optimization and Applications 32 (1-2), 9-27, 2005

[13] A. Chabaane, J-P. Laurent, Y. Malevergne, F. Turpin, *Alternative Risk Measures for Alternative Investments*, Journal of Risk 8 (4), 1-32, 2006

[14] J. Daníelsson, B. N. Jorgensen, C. G. de Vries, X. Yang, *Optimal portfolio allocation under the probabilistic VaR constraint and incentives for financial innovation*, Annals of Finance 4, 345-367, 2008

[15] D. Duffie, J. Pan, *An Overview of Value at Risk*, Journal of Derivatives 4, 7-49, 1999

[16] P. Embrechts, R. Frey, A. J. McNeil, *Basic Concepts in Risk Management*, in "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", Princeton University Press, 2005
www.gloriamundi.org/picsresources/efmc1.pdf

[17] P. Embrechts, H. Furrer, R. Kaufmann, *Different Kinds of Risk*, in Handbook of Financial Time Series, Eds. Andersen, Davis, Kreiss, Mikosch, 2008

[18] H. Frydman, G. Simon, *Discrete Quantile Estimation*, 2007
http://w4.stern.nyu.edu/emplibrary/QuantilePaper.pdf

[19] A. A. Gaivoronski, G. Pflug, *Finding Optimal Portfolios with Constraints on Value at Risk*
http://citeseer.ist.psu.edu/gaivoronski99finding.html

[20] A. A. Gaivoronski, G. Pflug, *Properties and computation of value at risk efficient portfolios based on historical data*, Department of Industrial Economics and Technology Management, NTNU – Norwegian University of Science and Technology

[21] A. A. Gaivoronski, G. Pflug, *Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach*, Journal of Risk 7 (2), 1-31, 2005

[22] C. Gourieroux, J.P. Laurent, O. Scaillet, *Sensitivity analysis of Values at Risk*, Journal of Empirical Finance 7, 225-245, 2000

[23] Ph. Jorion, *Risk2: Measuring the Risk in Value at Risk*, Financial Analysts Journal 52 (6), 47-56, 1996

[24] S. Jöhri, *Portfolio Optimization with Hedge Funds: Conditional Value At Risk And Conditional Draw-Down At Risk For Portfolio Optimization With Alternative Investments*, Masters Thesis, Department of Computer Science of Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2004

[25] A. I. Kibzun, E. A. Kuznetsov, *Analysis of criteria VaR and CVaR*, Journal of Banking and Finance 30, 779-796, 2006

[26] R. Kissell, *The Expanded Implementation Shortfall: "Understanding Transaction Cost Components"*, Journal of Trading, 2006

[27] N. Krejić, M. Kumaresan, A. Rožnjik, *VaR Optimal Portfolio with Transaction Costs*, submitted

[28] P. Krokhmal, J. Palmquist, S. Uryasev, *Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints*, Journal of Risk 4 (2), 43-68, 2002

[29] P. Krokhmal, S. Uryasev, *A sample-path approach to optimal position liquidation*, Annals of Operation Research 152 (1), 193-225, 2007

[30] N. Larsen, H. Mausser, S. Uryasev, *Algorithms for Optimization of Value-at-Risk*, in P. Pardalos and V. K. Tsitsiringos (Eds.), Financial Engineering, E-Commerce and Suppply Chain, Kluwer Academic Publishers, 129-157, 2002

[31] M. S. Lobo, M. Fazel, S. Boyd, *Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs*, Annals of Operation Research 152, 341365, 2007

[32] H. Markowitz, *Portfolio Selection*, The Journal of Finance 7 (1), 77-91, 1952

[33] H. Mausser, D. Rosen, *Beyond VaR: From Measuring Risk to Managing Risk*, Algo Research Quarterly 1 (2), 5-20, 1998

[34] R. Mansini, G. Speranza, *An exact approach for portfolio selection with transaction costs and rounds*, IIE Transactions 37, 919-929, 2005

[35] J. Nocedal, S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer Series in Operations Research, Springer Verlag New York Inc, 1999

[36] J. Pang, S. Leyffer, *On the Global Minimization of the Value-at-risk*, Optimization Methods and Software 19 (5), 611-631, 2004

[37] G. Ch. Pflug, *How to measure risk?*, in Festschrift to F. Ferschl, Physica Verlag, 1999
www.citeseer.ist.psu.edu/pflug99how.html

[38] G. Ch. Pflug, *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk*, in "Probabilistic Constrained Optimization – Methodology and Applications", editor S. Uryasev, Kluwer Academic Publishers, 272-281, 2000
www.citeseer.ist.psu.edu/pflug00some.html

[39] M. Potaptchik, L. Tuncel, H. Wolkowicz, *Large Scale Portfolio Optimization with Piecewise Linear Transaction Costs*, Research Report CORR 2006-19, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 2006
www.math.uwaterloo.ca/ ltuncel/publications/corr2006-19.pdf

[40] Risk Metrics^{TM}, Technical Document, 4-th Edition, New York, NY, J.P.Morgan Inc., 1996

[41] R. T. Rockafellar, *Coherent Approaches to Risk in Optimization Under Uncertainty*, Tutorials in Operations Research INFORMS, 38-61, 2007
www.math.washington.edu/ rtr/papers.html

[42] R. T. Rockafellar, S. Uryasev, *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, The Journal of Risk 2 (3), 21-41, 2000

[43] R. T. Rockafellar, S. Uryasev, *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Journal of Banking and Finance 26 (7), 1443-1471, 2002

[44] S. Uryasev, *Introduction to the Theory of Probabilistic Functions and Percentiles (Value-at-Risk)*, in "Probabilistic Constrained Optimization – Methodology and Applications", editor S. Uryasev, Kluwer Academic Publishers, 1-25, 2000

Kratka biografija

Rođena sam 16. oktobra 1979. godine u Subotici, od majke Izabele i oca Tibora. Udata sam i živim u Subotici. Osnovnu školu i gimnaziju završila sam u Subotici.

Od 1998. do 2002. godine studirala sam na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na odseku matematika, smeru diplomirani matematičar - matematika finansija. Diplomirala sam sa radom na temu „Obveznice - matematički aspekt" i time završila osnovne studije sa prosečnom ocenom 9,77. Na nivou Univerziteta u Novom Sadu dobila sam „Mileva Marić - Ajnštajn" nagradu za najbolji diplomski rad i izuzetnu nagradu za izrađen temat sa temom „Približno određivanje ravnotežne cene".

Poslediplomske studije, smer primenjena matematika, sam upisala 2002. godine. Učestvovala sam na XVI konferenciji primenjene matematike (PRIM) i prvoj MASSEE (Mathematical Society of South Eastern Europe) konferenciji. Interesantno iskustvo sam stekla na dva seminara iz matematičkog modeliranja na kojima studenti timskim radom rešavaju probleme iz realnosti (Mathematical Modelling Week u Novom Sadu i Mathematical Modelling Week u Barseloni). Predviđene ispite magistarskih studija položila sam do decembra 2005. godine sa prosečnom ocenom 9,78.

Krajem 2004. godine zaposlila sam se na Građevinskom fakultetu u Subotici kao asistent pripravnik za predmete Matematika I, Matematika II i Matematika III. Koautor sam rečnika „Mađarsko-srpsko-engleski matematički rečnik".

Novi Sad, 25. jun 2008.

ANDREA ROŽNJIK

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA
Redni broj:

RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni tampani materijal
TZ
Vrsta rada: Magistarska teza
VR
Autor: Andrea Rožnjik
AU
Mentor: Prof. dr Nataša Krejić
MN
Naslov rada: VaR kao mera rizika u optimizaciji portfolia
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s/e
JI
Zemlja publikovanja: R Srbija
ZP
Ue geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2008
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF,
Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (6,109,44,10,1,34,0)
FO
Naučna oblast: Matematika

NO
Naučna disciplina: Optimizacija
ND
Ključne reči: mera rizika, VaR, optimizacija portfolia, OVO problem, troškovi transakcije
PO
UDK:
Čuva se:
ÇU
Vana napomena:
VN
Izvod:
IZ
Rad sadrži osnovne pojmove o VaR meri rizika, VaR optimalnom portfoliu, troškovima transakcija i OVO problemima. Razmotrena je optimizacija portfolia ako je VaR mera rizika, a očekivani prinos predstavlja ograničenje. Prvi način rešavanja ovog problema optimizacije se zasniva na OVO problema, dok je drugi razmatrani način dat SVaR algoritmom u kojem se vrši glačanje funkcije cilja posmatranog problema. Numerički primeri pokazuju značaj uticaja troškova transakcija na VaR optimalan portfolio.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 17. jun 2008.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Zorana Lužanin, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu
Član: dr Nataša Krejić, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu, mentor
Član: dr Katarina Surla, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu
Član: dr Vera Kovačević-Vujčić, redovni profesor FON-a u Beogradu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FAKULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION
Accession number:

ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Andrea Rožnjik
AU
Mentor: Prof. dr Nataša Krejić
MN
Title: VaR as Risk Measure and Portfolio Optimization
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2008
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (6,109,44,10,1,34,0)
PD
Scientific field: Mathematics

SF
Scientific discipline: Optimization
SD
Key words: risk measure, VaR, portfolio optimization, OVO problem, transaction costs
SKW
UC:
Holding data:
HD
Note:
N
Abstract:
AB
This master thesis contains the basis of the VaR risk measure, VaR optimal portfolio, transaction costs and OVO problems. Two ways for solving the problem of VaR optimization with given expected return are considered: the algorithms for solving the OVO problems and SVaR algoritms, where the objective function is smoothed. Numercal examples shows the significance of the transaction cost in determining the VaR optimal portfolio.
Accepted by the Scientific Board on: June 17, 2008
ASB
Defended:
De
Thesis defend board:
DB
President: Prof. Dr. Zorana Lužanin, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Prof. Dr. Nataša Krejić, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, mentor
Member: Prof. Dr. Katarina Surla, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Prof. Dr. Vera Kovačević-Vujčić, Faculty of Organizational Sciences, University of Beograde