Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Sonja Rauški

OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA KADA JE VREME IZLASKA NEIZVESNO

Master rad

Novi Sad, februar 2011

Sadržaj

Predgovor

U radu je prvo formulisan problem optimizacije portfolija, dat dijagram portfolija kao i skup efikasnih portfolija. Zatim je prezentovan jedan od modela optimizacije portfolija, standardni Markowitz-ov model, u kom investitor želi da ostvari minimalni rizik za dati očekivani prinos portfolija. Standardni Markowitz-ov model je zasnovan na pretpostavci da investitor sa sigurnošću zna kada ce izaći sa tržišta.

Međutim, mnogi investitori kada ulaze na tržište ne znaju sa sigurnošću vreme izlaska sa tržišta. Vreme izlaska može zavisiti od promena cene jedne ili više aktiva ili biti nezavisno od njih. Iz tog razloga posmatran je generalizovani Markowitz-ov model kada je vreme izlaska neizvesno. Razmatrana su dva slučaja: kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa portfolija kao i slučaj kada je zavisno od njega.

Zatim je oslabljena pretpostavka o nezavisnosti vremena izlaska od prinosa portfolija i posmatran je zavisan slučaj. U ovom slučaju funkcija cilja problema minimizacije je nelinearna funkcija težinskih koeficijenata portfolija, pa se problem ne može rešiti eksplicitno. Pokazano je da funkcija cilja nije konveksna funkcija, pa nije moguče primeniti globalne metode rešavanja. Navedeni modeli su predlozeni i analizirani u radu [1]. Opisani problemi nelinearnog programiranja se mogu rešiti jednom od numeričkih metodom za rešavanje problema nelinearne optimizacije sa ograničenjima, sekvencijalnim kvadratnim programiranjem, što će biti testirano u radu.

Generalizacija rezultata iz [1] je problem optimizacije portfolija u slučaju investiranja u strano tržište. Posmatran je slučaj sa stanovišta američkog investitora koji ulaže u srpsko tržište. Takođe, kao i u slučaju ulaganja samo u domaće tržište, posmatrano je dva slučaja, kada vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima, kao i slučaj kada zavisi.

Na kraju je testirana metoda rešavanja, sekvencijalno kvadratno programiranje, na primeru investiranja u 10 aktiva. Problem optimizacije portfolija je rešen i analiziran u svim pomenutim slučajevima pomoću programskog paketa MATLAB.

Ovde želim da se zahvalim svom mentoru prof. dr Nataši Krejić na izuzetnoj pomoć, savetima i ukazanom znanju tokom izrade rada, kao i tokom osnovnih i master studija. Tema master rada koju mi je ona predložila je bila veoma zanimljiva i izazovna za mene. Takođe želim da se zahvalim prof. dr Branku Uroševiću na sugestijama i korisnim savetima.

1 Uvod

Osnovni problem u svetu investicija je optimalan izbor aktiva za datu količinu kapitala. Pri tome pod investicijom podrazumevamo svako ulaganje u cilju ostvarivanja profita- kupovina akcija, nekretnina, ulaganje u profitabilan projekat i slično. Za datu količinu kapitala i skup raspoloživih aktiva, optimalni izbor aktiva podrazumeva formiranje portfolija koji sadrži određeni broj aktiva iz skupa svih raspoloživih. Kretanje cene aktiva nije unapred poznato, pa ono predstavlja slučajnu promenljivu koja ima očekivanu vrednost i u sebi nosi određeni rizik koji merimo varijansom, odnosno standardnim odstupanjem. Optimalnost možemo shvatiti kao maksimizaciju očekivanog prinosa ili minimizaciju rizika ili kombinaciju ova dva kriterijuma.

Modeliranje nam pomaže da otkrijemo faktore koji utiču na prinos i rizik, prirodu njihovog uticaja i korelaciju između različitih rizika. Nakon modeliranja, optimizacija služi da formiramo diversifikovani portfolio u kom različiti instrumenti međusobno poništavaju rizik ili na druge načine tražimo optimalne karakteristike u odnosu na rizik i očekivani prinos. Pri tome moramo voditi računa o dve činjenice. Prva je da na efikasnom tržištu maksimizacija prinosa neminovno maksimizira i rizik, a druga važna činjenica je da eliminisanjem rizika koje možemo kontrolisati izlažemo portfolio rizicima koje ne možemo kontrolisati. Zbog toga razlikujemo sistematski rizik, koji koristimo za optimizaciju portfolija, i nesistematski rizik, koji ne možemo kontrolisati.

2 Oznake i definicije koje ćemo koristiti u radu

U toku rada koristićemo sledeće oznake:

$D_i, \quad i = 1, ..., n$ - i-ta aktiva

$S_{ij}, \quad i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ - cena i-te aktive za j-ti vremenski period

$R_i, \quad i = 1, ..., n$ - stopa prinosa i-te aktive

$\mathbf{E}[\cdot]$ - očekivanje slučajne promeljive

$\mathbf{V}[\cdot]$ - varijansa slučajne promeljive

$cov[\cdot, \cdot]$ - kovarijansa dve slučajne promeljive

$\mu_i, \quad i = 1, ..., n$ - očekivana stopa prinosa i-te aktive

p - portofolio

$w_i, \quad i = 1, ..., n$ - i-ti težinski koeficijenti portfolija

R_p- stopa prinosa portfolija

μ_p - očekivani prinos portfolija

σ_p - standardno odstupanje portfolija

σ_p^2 - varijansa portfolija

$\sigma_{ij}, \quad i = 1, ..., n, j = 1, ..., n$ - kovarijansa i-te i j-te aktive

$V = [\sigma_{ij}]$ - kovarijansna matrica

$w = [w_1, ..., w_n]^T$ - vektor težinskih keoficijenata

$R = [R_1, ..., R_n]^T$ - vektor prinosa

$\mu = [\mu_1, ..., \mu_n]^T$ - vektor očekivanih prinosa

I - jedinična matrica

$\mathbf{1} = [1...1]^T$ - vektor jedinica

ρ - koeficijent korelacije

$\overline{E}$ - fiksirana očekivana stopa prinosa

λ_1 i λ_2 - Langranžovi množitelji

$L(\cdot)$ - Langranžova funkcija

0 do τ - vremenski horizont investitora

S_0 - cena aktive u početnom periodu 0

S_τ - cena aktive u periodu τ

$R_{0,\tau}$ - stopa prinosa od vremena 0 do τ

$\mathbf{E}(R_{0,\tau})$ - bezuslovni očekivani prinos

$\mathbf{E}(R_{0,\tau}|\tau)$ - uslovni očekivani prinos

$\mathbf{V}(R_{0,\tau})$ - bezuslovna varijansa prinosa

$\mathbf{V}(R_{0,\tau}|\tau)$ - bezuslovna varijansa prinosa

$R^p_{0,\tau}$ - prinos portfolija od vremena 0 do vremena τ

$\mathbf{E}(R^p_{0,\tau})$ - očekivani prinos portfolija od vremena 0 do vremena τ

$\mathbf{V}(R^p_{0,\tau})$ - varijansa prinosa portfolija od vremena 0 do vremena τ

$\mathbf{E}(\tau)$ - očekivanje vremena izlaska

$\mathbf{V}(\tau)$ - varijansa vremena izlaska

q - verovatnoća da se desi raniji izlazak

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ - funkcija standardne normalne raspodele

$R^{RSDi}_{0,\tau}, \quad i = 1, ..., n$ - prinos i- te aktive sa srpskog tržišta

$R^{\$i}_{0,\tau}, \quad i = 1, ..., n$ - prinos izražen u dolarima i- te aktive sa srpskog tržišta

$e_{0,\tau}$ - stopa rasta dinara u odnosu na dolar

$\mu^{RSD}_i, \quad i = 1, ..., n$ - očekivani prinos i- te aktive sa srpskog tržišta

$\sigma^{RSD}_i, \quad i = 1, ..., n$ - standardno odstupanje i- te aktive sa srpskog tržišta

μ_e - očekivana vrednost stopa rasta dinara u odnosu na dolar

σ_e - standardno odstupanje stope rasta dinara u odnosu na dolar

$\rho_{RSDi,RSDj}, \quad i = 1, ..., n, j = 1, ..., n$ - koeficijent korelacije prinosa i-te i j-te aktive sa srpskog tržišta

$\rho_{RSDi,e}, \quad i = 1, ..., n$ - koeficijent korelacije prinosa i-te aktive sa srpskog tržišta i stope rasta dinara u odnosu na dolar

Sledeće definicije i teoreme su nam potrebne u radu

Definicija 1. *Realna simetrična matrica $A \in R^{n\times n}$ je pozitivno semidefinitna (definitna) ako za svaki nenula vektor $z \in R^n$ važi da je $z^T Az \geq 0$ $(z^T Az > 0)$.*

Teorema 1. *Za bilo koja dva vektora $u, v \in R^n$ važi Koši- Švarcova nejednakost*

$$(u^T v)^2 \leq \| u \|^2 \| v \|^2 .$$

Teorema 2. *Neka je f konveksna funkcija definisana na konveksnom skupu. Tada važi da je svaki lokalni minimum funkcije f i globalni minimum funkcije f.*

Teorema 3. *Neka je τ slučajna promenljiva sa raspodelom $g_\tau(t)$ i neka je X dato uslovnom raspodelom $f_{X|\tau=t}(x|\tau = t)$. Tada je bezuslovna raspodela za X data sa*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|\tau=t}(x|\tau = t)g_\tau(t)dt.$$

Teorema 4. *Neka su X i Y slučajne promeljive tada važi*

$$\boldsymbol{E}(X) = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}(X|Y)].$$

$$\boldsymbol{V}(X) = \boldsymbol{E}[\,\boldsymbol{V}(X|Y)] + \boldsymbol{V}[\boldsymbol{E}(X|Y)].$$

Definicija 2. *Problem nelinearne minimizacije sa nelinearnim ograničenjima tipa jednakosti je*

$$\min f(x) \tag{1}$$

pri ograničenjima

$$h(x) = 0 \tag{2}$$

gde $f, h \in C^1$, $f : R^n \to R$, $h : R^n \to R^m$ i $m < n$. Funkcija koja se minimizira, $f(x)$, se naziva funkcija cilja.

Definicija 3. *Langranžova funkcija problema (1) do (2) je data sa*

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x).$$

gde su λ_i, $i = 1, ..., m$ Langranžovi množitelji.

Definicija 4. *Tačka $\tilde{x}$ koja zadovoljava jednačinu $h(\tilde{x}) = 0$ je regularna u odnosu na ograničenja ako i samo ako je skup vektora $\{\nabla h_1(\tilde{x}), ..., \nabla h_m(\tilde{x})\}$ linearno nezavisan.*

Definicija 5. *Ako je $\tilde{x}$ regularna tačka površi $S = \{x \in R^n : h(x) = 0\}$ onda je tangentna ravan data sa*

$$T = \{y \in R^n : \nabla h(\tilde{x})y = 0\}.$$

Teorema 5 (Potrebni uslov prvog reda- uslov Kun-Takera)**.** *Neka je x^* lokalni minimum za problem* (1) *do* (2)*. Pretpostavimo da je x^* regularna tačka u odnosu na ograničenja. Tada postoji $\lambda^* \in R^m$ tako da je*

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0.$$

Teorema 6 (Potrebni uslov drugog reda)**.** *Neka je x^* regularna tačka i lokalni minimum za problem* (1) *do* (2)*, a T tangentna ravan. Pretpostavimo da su $f, h \in C^2$. Tada postoji $\lambda^* \in R^m$ tako da je*

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0,$$

i

$$y^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*) y \geq 0, \quad \text{za svako } y \in T.$$

Teorema 7 (Dovoljni uslov prvog reda)**.** *Neka je x^* regularna tačka takva da je $h(x^*) = 0$ i T tangentna ravan. Ako je $\lambda^* \in R^m$ takvo da je*

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0,$$

i

$$y^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*) y > 0, \quad \text{za svako } y \in T \backslash \{0\},$$

onda je x^* strogi lokalni minimum za problem (1) *do* (2)*.*

3 Standardni Markowitz-ov model

Kretanje cene aktiva nije unapred poznato, pa ono predstavlja slučajnu promenljivu koja ima očekivanu vrednost i u sebi nosi određeni rizik koji merimo varijansom, odnosno standardnim odstupanjem. U daljoj analizi ćemo umesto cene koristiti stopu prinosa. Ako su dati istorijski podaci o cenama n aktiva u obliku $S_{ij}, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ za m vremenskih perioda, onda se prinosi izračunavaju kao

$$R_{ij} = \frac{S_{ij} - S_{ij-1}}{S_{ij-1}}.$$

Kako je izvedena iz cene, i stopa prinosa predstavlja slučajnu promenljivu čiju očekivanu vrednost ćemo ocenjivati na osnovu srednje vrednosti stopa prinosa iz nekog ranijeg perioda. Takođe, stvarni budući prinosi mogu odstupati od te očekivane vrednosti pa ćemo ovo odstupanje meriti varijansom, odnosno standardnim odstupanjem. Dakle, svaku aktivu okarakterisaćemo njenim očekivanim prinosom i standardnim odstupanjem. Investitor želi da od ovih aktiva napravi optimalan portfolio.

3.1 Očekivanje i varijansa portofolija

Neka je dato n aktiva D_i sa stopama prinosa R_i i standardnim odstupanjima σ_i, $i = 1, ..., n$. Očekivane vrednosti za stope prinosa označavamo sa $\mu_i = \mathbf{E}[R_i], i = 1, ..., n$. Formiramo portfolio p od ovih aktiva koristeći težinske koeficijente $w_i \in R, i = 1, ..., n$

$$p = w_1 D_1 + ... + w_n D_n.$$

Stopa prinosa portfolija je

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i,$$

a očekivani prinos portfolija je

$$\mu_p \equiv \mathbf{E}(R_p) = w_1 \mathbf{E}(R_1) + ... + w_n \mathbf{E}(R_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i.$$

Ako sa σ_p označimo standardno odstupanje portfolija, a sa σ_{ij} kovarijansu i-te i j-te aktive onda je varijansa celog portfolija

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathbf{E}[(R_p - \mu_p)^2] \\
&= \mathbf{E}[(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i)^2] \\
&= \mathbf{E}[(\sum_{i=1}^{n} w_i (R_i - \mu_i))(\sum_{i=1}^{n} w_i (R_i - \mu_i))] \\
&= \mathbf{E}[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}.
\end{aligned}
$$

Označićemo sa V kovarijansnu matricu $V = [\sigma_{ij}]$ i uvesti oznake za vektor težinskih keoficijenata $w = [w_1, ..., w_n]^T$, prinosa $R = [R_1, ..., R_n]^T$ i očekivanih prinosa $\mu = [\mu_1, ..., \mu_n]^T$. Tada su prinos portfolija R_p, očekivani prinos portfolija μ_p i varijansa portfolija σ_p^2 sledeći

$$R_p = w^T R, \qquad \mu_p = w^T \mu, \qquad \sigma_p^2 = w^T V w.$$

Rizik portfolija se meri varijansom portfolija što je intuitivno jasno, ali možemo dati i formalno objašnjenje. Ako su poznati prinosi $R_{ij}, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ svih investicija tokom m istorijskih perioda, onda bi idealna situacija- prinos bez rizika, bila

$$w_1 R_{1j} + w_2 R_{2j} + ... + w_n R_{nj} = \mu_p \quad j = 1, ..., m.$$

Iz definicije očekivanog prinosa za portfolio imamo da je to ekvivaletno sa sledećim homogenim sistemom jednačina

$$w_1(R_{1j} - \mu_1) + w_2(R_{2j} - \mu_2) + ... + w_n(R_{nj} - \mu_n) = 0 \quad j = 1, ..., m.$$

Ovaj sistem je preuslovljen za $m > n$ pa je jedino rešenje $w_1 = w_2 = ... = w_n = 0$. Međutim ovo rešenje nije prihvatljivo jer vodi ka nula portfoliju. Logičan zahtev koji se može postaviti jeste da umesto rešenja sistema linearnih jednačina tražimo vektor w tako da je rezidualni vektor što manji. Ako sa A označimo matricu iz $R^{m \times n}$ sa elementima

$$a_{ij} = (R_{ij} - \mu_i),$$

onda se problem svodi na minimizaciju neke norme rezidualnog vektora Aw. Ako se izabere euklidska norma

$$\| Aw \|^2 = w^T A^T A w,$$

vidimo da je $A^T A = mV$, pa kako konstanta m ne utiče na minimum, problem je ekvivalentan problemu određivanju minimuma kvadratne funkcije $w^T V w$. Istovremeno zaključujemo da je matrica V pozitivno semidefinitna, definicija 1, jer je za svaki vektor z

$$z^T V z = \frac{1}{m^2} z^T A^T A z \geq 0.$$

U radu ćemo pretpostaviti da je kovarijansna matrica V pozitivno definitna. Kako razmatramo skup aktiva sa idejom da plasiramo sav raspoloživi kapital onda treba da važi

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Ukoliko je $w_i = 0$ znači da aktiva D_i ne pripada portfoliju, ako je $w_i > 0$ onda je deo kapitala, određen koeficijentom w_i, uložen u i-tu aktivu. Ako je $w_i < 0$ znači da smo u portfolio uložili negativan kapital, dakle taj deo portfolia smo pozajmili. Negativni težinski koeficijenti označavaju kratke operacije- uključivanje nečega što ne posedujemo i što u nekom trenutku treba vratiti. Pretpostavićemo da su kratke operacije dozvoljene.

Relativno veliko standardno odstupanje označava visok nivo rizika. U opštem slučaju povećavanjem broja aktiva koje čine portfolio moguće je smanjiti nivo rizika, tj. smanjiti standardno odstupanje portfolija. Ovaj proces se naziva diverzifikacija rizika.

Neka je dato n aktiva koje nisu u međusobnoj korelaciji i neka su sve aktive sa istim očekivanim prinosom μ i standardnim odstupanjem σ, $D_i(\mu, \sigma), i = 1, ..., n$. U ovom slučaju je $\mu = [\mu ... \mu]^T = \mu \mathbf{1}^T$, gde je $\mathbf{1} = [1...1]^T$ jedinični vektor, a matrica V je skalarna matrica $V = \sigma^2 I$, gde je I jedinična matrica. Ako je portfolio konstruisan od jednakih delova svih investicija

$$w_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, ..., n,$$

pa je

$$w = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T.$$

Prinos portfolija je

$$R_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

Onda je očekivan prinos

$$\mu_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \mu,$$

a odgovarajuća varijansa se dobija kao

$$\sigma_p^2 = w^T \cdot V \cdot w = \frac{1}{n^2} \sigma^2 \mathbf{1}^T \cdot I \cdot \mathbf{1} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Vidimo da očekivana vrednost za stopu prinosa ovakvog portfolija ne zavisi od broja investicija n u portfoliju dok povećavanjem broja investicija smanjujemo rizik portfolija.

Ako je na raspolaganju proizvoljan broj ovakvih investicija onda se rizik portfolija može učiniti proizvoljno malim zahvaljujući specijalnoj strukturi matrice kovarijansi. U opštem slučaju, ako V nije skalarna matrica, rizik celog portfolija se ne može smanjiti ispod neke minimalne vrednosti jer je

$$\sigma_p^2 = w^T \cdot V \cdot w$$

kvadratna funkcija koja ima svoj minimum. Kako je V simetrična pozitivno definitna matrica to je rizik portfolija uvek nenegativan i ne može se smanjiti ispod vrednosti minimuma ove kvadratne funkcije. Ako skup investicija koji smo prethodno posmatrali promenimo tako što ćemo uslov da su sve kovarijanse jednake nuli zameniti uslovom da su sve kovarijanse jednaki nenula brojevi $\sigma_{ij} = k\sigma^2, i \neq j$, onda je

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= w^T \cdot V \cdot w \\
&= \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1} n\sigma^2 + \sum_{i \neq j} nk\sigma^2) \\
&= \frac{1}{n^2}(n\sigma^2 + (n^2 - n)k\sigma^2) \\
&= \frac{\sigma^2}{n} + (1 - \frac{1}{n})k\sigma^2.
\end{aligned}$$

Vidimo da je za proizvoljno n uvek zadovoljena nejednakost

$$\sigma_p^2 > k\sigma^2.$$

Što znači da se rizik celog portfolija ne može smanjiti ispod vrednosti $k\sigma^2$.

3.2 Dijagram i skup efikasnih portofolija

Kako sve aktive i portfolije možemo okarakterisati očekivanom vrednošću za stopu prinosa μ i standardnim odstupanjem σ onda svaki portfolio možemo prikazati kao tačku u $\mu - \sigma$ ravni.

Razmotićemo slučaj portfolija koji se sastoji od dve aktive $D_1(\mu_1, \sigma_1)$ i $D_2(\mu_2, \sigma_2)$. Neka je α realan broj, a $w_1 = 1 - \alpha$ i $w_2 = \alpha$ težinski koeficijenti portfolija. Neka je $\alpha \in [0, 1]$, onda kratka prodaja nije dozvoljena. Ovakav portfolio možemo prikazati u $\mu - \sigma$ ravni koristeći rezultat sledeće leme. Pri tome je važno uočiti da izgled krive zavisi od σ_{12}.

Lema 1 (Portfolio dijagram lema)**.** *Kriva u $\mu - \sigma$ ravni definisana nenegativnom kombinacijom dve aktive D_1 i D_2 lezi unutar trougaone oblasti određene tačkama D_1, D_2 i A, pri čemu je tačka A na μ osi sa σ- koordinatom $A = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$.*

Dokaz:

Za prinosa portfolija važi
$$R = (1-\alpha)R_1 + \alpha R_2,$$
pa je očekivana vrednost za stopu prinosa portfolija

$$\mu = (1-\alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2.$$

Standardno odstupanje je

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} + \alpha^2\sigma_2^2}.$$

Ako sa ρ označimo koeficijent korelacije $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$, standardno odstupanje možemo zapisati kao
$$\sigma(\alpha) = \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2}.$$

Kako je $-1 \leq \rho \leq 1$, a funkcija $\sigma(\alpha)$ je rastuća funkcija po ρ, dobijamo gornju granicu funkcije σ za $\rho = 1$

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha)^* &= \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\
&= \sqrt{((1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2)^2} \\
&= (1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2.
\end{aligned}$$

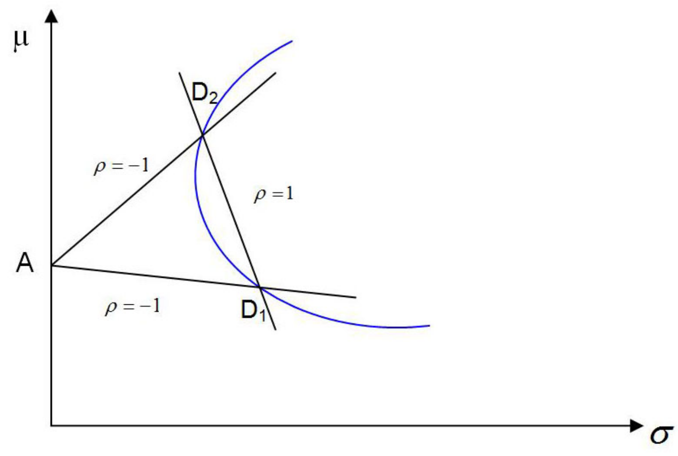
Analogno, za $\rho = -1$, dobijamo gornju granicu funkcije

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha)_* &= \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\
&= \sqrt{((1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2)^2} \\
&= |(1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2|
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2, & \alpha < \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}; \\ \alpha\sigma_2 - (1-\alpha)\sigma_1, & \alpha \geq \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}. \end{cases}$$

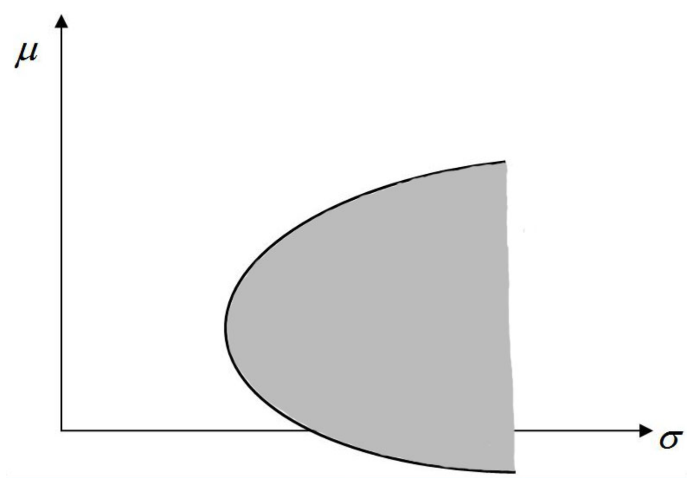
Prave koje određuju donju granicu se seku u tački A. Za $\rho \in (-1, 1)$ kriva se nalazi unutar trougla te sledi tvrđenje leme.

$\square$



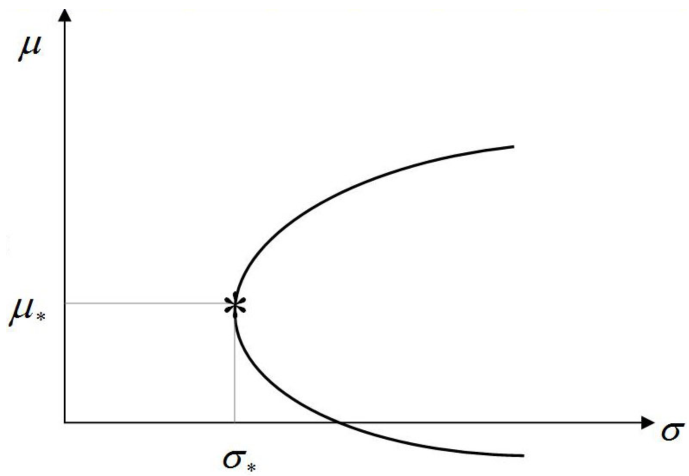
Slika 1: Dijagram portfolija

Pretpostavimo sada da imamo n aktiva. Možemo ih predstaviti kao tačke na $\mu - \sigma$ dijagramu. Formiramo portfolije od datih aktiva koristeći sve moguće vrednosti težinskih koeficijenata tako da je $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Skup tačaka koje predstavljaju portfolije se naziva dopustiv skup. Dopustiv skup je konveksan, slika (2).



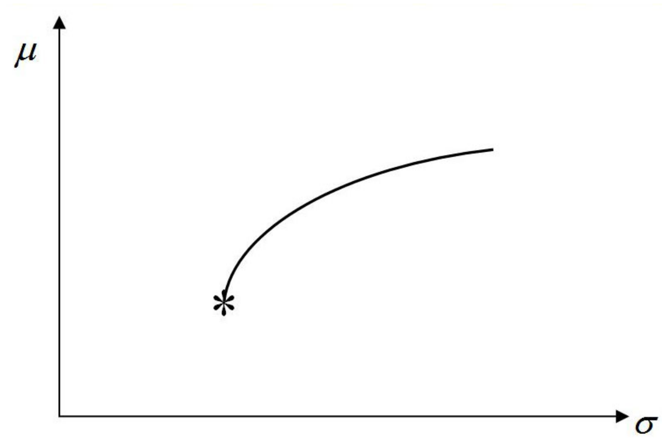
Slika 2: Dopustiv skup

Leva granica dopustivog skupa se naziva skup minimalne varijanse, jer za datu vrednost prihoda, dopustiva tačka sa najmanjim standardnim odstupanjem odgovara tački koja se nalazi na levoj granici. Skup minimalne varijanse je konveksna kriva, prikazana na slici (3). Na slici vidimo tačku (σ_*, μ_*) koja predstavlja portfolio globalno minimalne varijanse.



Slika 3: Skup minimalne varijanse

Gornja granica skupa minimalne varijanse se naziva skup efikasnih portfolija. Ako za fiksirani rizik posmatramo sve portfolije sa datim standardnim odstupanjem onda je portfolio sa najvećim prinosom efikasni portfolio, koji se baš nalazi na gornjem delu granice, slika (4).



Slika 4: Skup efikasnih portfolija

U sledećem poglavlju je objašnjeno kako se računaju efikasni portfoliji. Za konstrukciju optimalnog portfolio koristićemo Markovitz-ov model. koji omogučava minimizaciju rizika

3.3 Markowitz-ov model

Markovitz-ov model razmatra konstrukciju optimalnog portfolija u smislu minimizacije rizika za datu očekivanu stopu prinosa. Neka je dato n aktiva D_i sa očekivanjima μ_i, standardnim odstupanjima σ_i i kovarijansama σ_{ij}, $i, j = 1, ..., n$. Da bi odredili skup minimalne varijanse fiksiramo očekivanje za stopu prinosa $\overline{E}$ i tražimo dopustivi portfolio. Drugim rečima rešavamo problem minimizacije sa ograničenjima. Pa je problem koji rešavamo

$$\min_w \sigma_p^2 \equiv \min_w w^T \cdot V \cdot w, \tag{3}$$

pri ograničenjima

$$\mu_p \equiv \mathbf{E}(R_p) = \overline{E}, \tag{4}$$

$$w^T \cdot \mathbf{1} = 1. \tag{5}$$

Dati problem je kvadratni, gde je V simetrična i pozitivno definitna matrica, pa rešenje postoji i jedinstveno je.

Tvrđenje 1. *Rešenje Markowitz-ovog problema je dato sa*

$$w^* = \frac{C\overline{E} - B}{AC - B^2} V^{-1} \cdot \mu + \frac{A - B\overline{E}}{AC - B^2} V^{-1} \cdot \boldsymbol{1},$$

gde je

$$A \equiv \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mu,$$
$$B \equiv \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \boldsymbol{1},$$
$$C \equiv \boldsymbol{1}^T \cdot V^{-1} \cdot \boldsymbol{1}.$$

Dokaz:

Funkcija cilja je kvadratna funkcija, a ograničenja su tipa jednakosti. Pa ako sa λ_1 i λ_2 označimo odgovarajuće Langranžove množitelje onda Langranžova funkcija ima oblik

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} w^T \cdot V \cdot w - \lambda_1(w^T \cdot \mu - \overline{E}) - \lambda_2(w^T \cdot \mathbf{1} - 1).$$

Uslovi optimalnosti prvog reda, teorema 5, određuju sledeći sistem jednačina

$$V \cdot w^* - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mathbf{1} = 0$$
$$w^{*T} \cdot \mu - \overline{E} = 0$$
$$w^{*T} \cdot \mathbf{1} - 1 = 0.$$

Ovo je sistem linearnih jednačina dimenzije $n+2$. Po pretpostavci matrica V je simetrična i pozitivno definitna, pa sledi da je regularna. Tada postoji inverzna matrica V^{-1}, pa iz prve jednačine imamo

$$w^* = \lambda_1 V^{-1} \cdot \mu - \lambda_2 V^{-1} \cdot \mathbf{1}. \tag{6}$$

Zamenom u drugu i treću jednačinu sistema dobija se

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mu - \lambda_2 \mathbf{1}^T \cdot V^{-1} \cdot \mu &= \overline{E} \\
\lambda_1 \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1} - \lambda_2 \mathbf{1}^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1} &= 1
\end{aligned}$$

Koristeći oznake $A \equiv \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mu$, $B \equiv \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1}$ i $C \equiv \mathbf{1}^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1}$ imamo

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{C\overline{E} - B}{AC - B^2}, \\
\lambda_2 &= \frac{B\overline{E} - A}{AC - B^2}.
\end{aligned}$$

Zamenjujući u (6) dobijamo rešenje problema.

□

Označimo sa $\phi(w)$ standardno odstupanje portfolija $\phi(w) = \sigma$,

$$\phi(w) = \sqrt{w^T \cdot V \cdot w}.$$

Lema 2. *Funkcija $\phi(w)$ je konveksna.*

Dokaz:

Diferencirajući

$$\phi^2(w) = w^T \cdot V \cdot w,$$

dobijamo

$$2\phi\phi_w = 2V \cdot w,$$

i

$$\phi\phi_{ww} + \phi_w \phi_w^T = V.$$

Dalje je

$$\phi\phi_{ww} = V - \frac{V \cdot w \cdot w^T \cdot V}{\phi^2}.$$

Na osnovu poslednje jednakosti pokazujemo da je matrica ϕ_{ww} pozitivno semidefinitna. Za proizvoljan vektor z imamo

$$\phi z^T \phi_{ww} z = z^T V z - \frac{(w^T \cdot V \cdot w)^2}{w^T \cdot V \cdot w},$$

pa sledi da je $\phi z^T \phi_{ww} z \geqslant 0$ na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti, teorema 1.

□

Pošto je funkcija cilja, tj. varijansa standardnog Markowitz-ov model konveksna, na osnovu teoreme 2 znamo da rešenje problema nije samo lokalni minimum već i globalni.

Lema 3. *Ako je $\phi(w)$ konveksna funkcija i*

$$\sigma = min\{\phi(w) : w^T \cdot \mu = \overline{E}, w^T \cdot \boldsymbol{1} = 1\},$$

onda je $\sigma(\mu)$ konveksna funkcija.

Dokaz:

Neka su $\overline{E}^1$ i $\overline{E}^2$ dve realne vrednosti, dok su w^1 i w^2 odgovarajući argumenti za koje funkcija $\phi(w)$ dostiže minimum uz uslove $w^T \cdot \mu = \overline{E}^1$, odnosno $w^T \cdot \mu = \overline{E}^2$. Neka je $\theta \in [0, 1]$. Tada je, za portfolio

$$\theta w^1 + (1-\theta) w^2, \tag{7}$$

$$\mu^T(\theta w^1 + (1-\theta) w^2) = \theta \overline{E}^1 + (1-\theta)\overline{E}^2,$$

i

$$\mathbf{1}^T(\theta w^1 + (1-\theta) w^2) = 1.$$

Dakle portfolio formiran sa (7) je dopustiv. Na osnovu osobina minimuma i konveksnosti funkcije sledi nejednakost

$$\begin{aligned}
\sigma(\theta \overline{E}^1 + (1-\theta)\overline{E}^2) &\leq \phi(\theta w^1 + (1-\theta) w^2) \\
&\leq \theta \phi(w^1) + (1-\theta)\phi(w^2) \\
&= \theta \sigma(\overline{E}^1) + (1-\theta)\sigma(\overline{E}^2).
\end{aligned}$$

Pa je $\sigma(\mu)$ konveksna funkcija.

□

Pokazali smo da za portfolio formiran od n investicija takođe važi da je skup efikasnih portfolija u $\mu - \sigma$ ravni konveksna kriva.

Standardni Markowitz-ov model je zasnovan na pretpostavci da investitor sa sigurnošću zna kada ce izaći sa tržišta. On kupuje aktive u početnom vremenu 0 i prodaje ih u vremenu 1. Pošto su u problem uključena samo dva vremena, problem je statički. Sada ćemo posmatrati slučaj kada je vreme izlaska neizvesno.

4 Generalizovani Markowitz-ov model

Mnogi investitori kada ulaze na tržište ne znaju sa sigurnošu vreme izlaska sa tržišta. Vreme izlaska može zavisiti od promena cene jedne ili više aktiva ili biti nezavisno od njih. U slučaju kada vreme izlaska ne zavisi od promena cena aktiva, izlazak sa tržišta može se desiti na primer zbog gubitka posla, ranijeg odlaska u penziju, prodaje kuće, zdravstvenih problema, itd. Iz tog razloga posmatramo Markowitz-ov problem kada je vreme izlaska neizvesno. Razmatrana su i dva slučaja: kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa portfolija kao i slučaj kada je zavisno od njega. Počećemo tako što ćemo izraziti očekivanje i varijansu stope prinosa aktiva.

4.1 Očekivanje i varijansa kada je vreme izlaska neizvesno

Radi jednostavnosti, prvo ćemo posmatrati samo jednu aktivu koju investitor poseduje od vremena 0 do vremena τ, gde je τ pozitivna slučajna promenljiva koja predstavlja vremenski horizont investitora. Pretpostavljamo da je raspodela od τ poznata i da ima konačne momente prvog i drugog reda. Stopa prinosa od vremena 0 do τ se definiše

$$R_{0,\tau} = \frac{S_\tau - S_0}{S_0}.$$

gde je S_τ cena aktive u periodu τ, a S_0 cena aktive u početnom periodu 0. Primetimo da ovde imamo dva izvora neizvesnosti. Sa jedne strane, za datu realizaciju vremena izlaska τ buduća cena aktive je neizvesna. Ova vrsta rizika se zove rizik cene aktive. Sa druge strane, sama realizacija od τ je neizvesna, što nazivamo rizikom vremena izlaska. Tako da u daljoj analizi moramo uzeti u obzir obe vrste rizika.

Na osnovu teoreme 4, dobija se bezuslovno očekivanje prinosa nad vremenskim horizontom τ

$$\mathbf{E}(R_{0,\tau}) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(R_{0,\tau}|\tau)].$$

Vidimo je bezuslovni očekivani prinos težinska sredina uslovnog očekivanih prinosa. Što je korisno za praktičnu primenu, jer se lakše procenjuju uslovni nego bezuslovni momenti prinosa portfolija. Iz teoreme 4 se dobija i varijansa prinosa

$$\mathbf{V}(R_{0,\tau}) = \mathbf{E}[\mathbf{V}(R_{0,\tau}|\tau)] + \mathbf{V}[\mathbf{E}(R_{0,\tau}|\tau)].$$

Vidimo da se varijansa sastoji iz dva sabirka. Prvi sabirak $\mathbf{E}[\mathbf{V}(R_{0,\tau}|\tau)]$ je težinska sredina uslovnih varijansi. To je mera prosečnog rizika prinosa. Drugi sabirak $\mathbf{V}[\mathbf{E}(R_{0,\tau}|\tau)]$ je varijansa uslovnih očekivanih prinosa. Ona je jednaka nuli u slučaju fiksnog vremena izlaska, pa se stoga može interpretirati kao mera rizika vremena izlaska. Dakle, kada je vreme izlaska neizvesno, rizik se može rastaviti na dve komponente: prinos i vreme izlaska.

4.2 Problem optimizacije portofolija kada je vreme izlaska neizvesno

Do sada smo posmatrali samo jednu aktivu. Uopštićemo tako što ćemo posmatrati portfolio sa n aktiva. Označićemo prinos i-te aktive portfolija od vremena 0 do vremena τ sa $R^i_{0,\tau}$. Tada je prinos portfolija p

$$R^p_{0,\tau} \equiv \sum_{i=1}^{n} w_i R^i_{0,\tau}.$$

Očekivanje portfolija p je dato sledećim izrazom

$$\mathbf{E}(R^p_{0,\tau}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{E}(R^i_{0,\tau}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{E}[\mathbf{E}(R^i_{0,\tau}|\tau)],$$

dok je varijansa

$$\mathbf{V}(R^p_{0,\tau}) = \mathbf{E}[\mathbf{V}(R^p_{0,\tau}|\tau)] + \mathbf{V}[\mathbf{E}(R^p_{0,\tau}|\tau)].$$

Tada je problem optimizacije portfolija kada je vreme izlaska neizvesno:

$$\min_{w} \mathbf{V}(R^p_{0,\tau}), \tag{8}$$

pri ograničenjima

$$\mathbf{E}(R^p_{0,\tau}) = \overline{E}, \tag{9}$$

$$w^T \cdot \mathbf{1} = 1, \tag{10}$$

4.3 Markowitz-ov problem kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa

Sada ćemo analizirati slučaj kada je vreme izlaska nezavisno od prinosa. Da bi to uradili prvo ćemo predstaviti proces slučajnog hoda.

Tvrđenje 2. *Pretpostavićemo da prinosi uslovno po vremenu τ prate slučajan hod sa očekivanjem μ i volatilnošću σ. Tada su bezuslovno očekivanje i varijansa prinosa sledeći:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(R_{0,\tau}) &= \mu \boldsymbol{E}(\tau),\\ \boldsymbol{V}(R_{0,\tau}) &= \sigma^2 \boldsymbol{E}(\tau) + \mu^2 \boldsymbol{V}(\tau),\end{aligned}$$

gde su $\boldsymbol{E}(\tau)$ i $\boldsymbol{V}(\tau)$ očekivanje i varijansa vremena izlaska, respektivno.

Dokaz:

Koeficijenti μ i σ su ograničeni i determinističke funkcije vremena. Pošto prinosi prate slučajan hod, uslovno očekivanje i varijansa prinosa su linearne funkcije vremena. Zbog nezavisnosti dobija se

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(R_{0,\tau}|\tau = t) &= \mathbf{E}(R_{0,t}) = \mu t,\\ \mathbf{V}(R_{0,\tau}|\tau = t) &= \mathbf{V}(R_{0,t}) = \sigma^2 t.\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 3, dobijaju se bezuslovni očekivani prinos

$$\mathbf{E}(R_{0,\tau}) = \mu \mathbf{E}(\tau), \tag{11}$$

i varijansa

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(R_{0,\tau}) &= \int_a^b \sigma^2 t g(t)dt + \int_a^b (\mu t - \mu \mathbf{E}(\tau))^2 g(t)dt\\ &= \sigma^2 \mathbf{E}(\tau) + \mu^2 \mathbf{V}(\tau). \qquad (12)\end{aligned}$$

□

Ponovo, varijansa ima dva sabirka: meru rizika cene aktive $\sigma^2\mathbf{E}(\tau)$ i meru rizika vremena izlaska $\mu^2\mathbf{V}(\tau)$. Primetimo da je ovo uopštenje slučaja sa fiksnim vremenom izlaska, kada je $\mathbf{E}(\tau) = T, \mathbf{V}(\tau) = 0$.

Kada prinosi prate slučajan hod i kada je vreme izlaska nezavisno od prinosa, prinos i-te aktive zadovoljava sledeće (videti jednačine (11) i (12))

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(R^i_{0,\tau}) &= \mu_i \mathbf{E}(\tau),\\ \mathbf{V}(R^i_{0,\tau}) &= \sigma_i^2 \mathbf{E}(\tau) + \mu_i^2 \mathbf{V}(\tau).\end{aligned}$$

gde je μ_i očekivani prinos, a σ_i^2 varijansa i-te aktive. Kovarijansa i-te i j-te aktive je

$$cov(R^i_{0,\tau}, R^j_{0,\tau}) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \mathbf{E}(\tau) + \mu_i \mu_j \mathbf{V}(\tau).$$

a ρ_{ij} je koeficijent korelacije dve aktive (pretpostavljamo da je vreme izlaska isto za sve aktive). Tada je očekivani prinos portfolija

$$\mathbf{E}(R^p_{0,\tau}) = \mathbf{E}(\tau)\sum_{i=1}^{n} w_i\mu_i = \mathbf{E}(\tau)\mu_p,$$

i varijansa portofolija je

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(R^p_{0,\tau}) &= \mathbf{E}\sum_{i,j=1}^{n} w_iw_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} + \mathbf{V}(\tau)\sum_{i,j=1}^{n} w_iw_j\mu_i\mu_j \\ &= \sigma_p^2\mathbf{E}(\tau) + \mu_p^2\mathbf{V}(\tau).\end{aligned}$$

Kada smo izrazili očekivanje i varijansu portfolija, sada ćemo formulisati problem.

Tvrđenje 3. *Ako prinosi prate slučajan hod i ako je vreme izlaska nezavisno od prinosa, problem* (8) *do* (10) *je ekvivalentan sledećem problemu:*

$$\min_w w^T \cdot K \cdot w, \tag{13}$$

pri ograničenjima

$$w^T \cdot \mu = E^*, \tag{14}$$

$$w^T \cdot \mathbf{1} = 1, \tag{15}$$

gde je

$$K_{ij} \equiv \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} + \frac{\boldsymbol{V}(\tau)}{\boldsymbol{E}(\tau)}\mu_i\mu_j,$$

$$E^* \equiv \frac{\overline{E}}{\boldsymbol{E}(\tau)}.$$

Šta više, rešenje datog problema postoji i jedinstveno je.

Dokaz:

Langranžova funkcija koja odgovara problemu (8) do (10) je data sa

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\tau)w^T \cdot V \cdot w + \frac{\mathbf{V}(\tau)}{2}(w^T\cdot\mu)^2 + \lambda_1(\overline{E} - \mathbf{E}(\tau)w^T\cdot\mu) + \lambda_2\mathbf{E}(\tau)(1 - w^T\cdot\mathbf{1}).$$

Uslov prvog reda daje

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(\tau)\cdot V\cdot w + \mathbf{V}(\tau)(w^T\cdot\mu)\cdot\mu - \lambda_1\mathbf{E}(\tau)\mu - \lambda_2\mathbf{E}(\tau)\mathbf{1} = 0 \\ \mathbf{E}(\tau)w^T\cdot\mu = \overline{E}, \\ w^T\cdot\mathbf{1} = 1.\end{gathered}$$

Što se moze zapisati

$$V \cdot w + \frac{\mathbf{V}(\tau)}{\mathbf{E}(\tau)}(w^T \cdot \mu) \cdot \mu - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mathbf{1} = 0, \tag{16}$$

$$w^T \cdot \mu = \frac{\overline{E}}{\mathbf{E}(\tau)}, \tag{17}$$

$$w^T \cdot \mathbf{1} = 1. \tag{18}$$

Langranžova funkcija problema (13) do (15) je

$$L^1 = \frac{1}{2} w^T \cdot V \cdot w + \frac{\mathbf{V}(\tau)}{2\mathbf{E}(\tau)}(w^T \cdot \mu)^2 + \lambda_1 (\frac{\overline{E}}{\mathbf{E}(\tau)} - w^T \cdot \mu) + \lambda_2 (1 - w^T \cdot \mathbf{1}).$$

Primećujemo da je uslov prvog reda primenjen na Langranžovu funkciju L^1 jednak jednačinama (16), (17) i (18). Pa je problem (13) do (15) ekvivalentan problemu (8) do (10).

Da bi pokazali drugi deo tvrđenja, dovoljno je pokazati da je K kovarijansna matrica, tj. da je simetrična i pozitivno definitna. Očigledno je da je $(\frac{\mathbf{V}(\tau)}{\mathbf{E}(\tau)} \mu_i \mu_j)_{i,j=1,\ldots,n}$ simetrična matrica, a V je simetrična matrica po pretpostavci. Pa je i matrica K simetrična. Konačno, pokazaćemo da je matrica K pozitivno definitna. Za svaki vektor $w \neq 0$ važi $w^T \cdot V \cdot w > 0$, jer je V pozitivno definitna matrica. Zato imamo

$$w^T \cdot K \cdot w = w^T \cdot V \cdot w + \frac{\mathbf{V}(\tau)}{\mathbf{E}(\tau)}(w^T \cdot \mu)^2 \geq w^T \cdot V \cdot w > 0$$

jer su $\mathbf{E}(\tau)$ i $\mathbf{V}(\tau)$ strogo pozitivni, a $(w^T \cdot \mu)^2$ je nenegativno. Pošto je matrica K simetrična i pozitivno definitna ona je regularna, pa je zadovoljen dovoljan uslov za postojanje jedinstvenog minimuma.

□

Videli smo da kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa, problem optimizacije portfolija sa neizvesnim vremenom izlaska se može predstaviti u obliku standardne kvadratne optimizacije. Šta više, rešenje problema postoji i jedinstveno je. Sada ćemo ekplicitno rešiti problem i pokazati da rešenje ima isti oblik kao i rešenje standardnog Markowitz-ovog problema sa prilagođenim parametrima.

Tvrđenje 4. *Ako vreme izlaska τ ne zavisi od performanse portfolija i ako prinosi prate slučajan hod, rešenje kvadratnog problema* (13) *do* (15) *je dato sa*

$$w^* = \frac{CE^* - B}{AC - B^2} V^{-1} \cdot \mu + \frac{A - BE^*}{AC - B^2} V^{-1} \cdot \mathbf{1},$$

gde je

$$A \equiv \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mu,$$

$$B \equiv \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \boldsymbol{1},$$
$$C \equiv \boldsymbol{1}^T \cdot V^{-1} \cdot \boldsymbol{1},$$

i

$$E^* \equiv \frac{\overline{E}}{\boldsymbol{E}(\tau)}.$$

Dokaz:

Dokazaćemo uopšteniju verziju tvrđenja. Oslabićemo pretpostavku da prinosi prate slučajan hod i pretpostavićemo da je uslovna kovarijansna matrica proporcionalna nekoj pozitivnoj funkciji vremena h i očekivani prinos je linearna funkcija vremena. Što znači

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(R_{0,\tau}|\tau = t) &\equiv \mathbf{E}(R_{0,\tau}) = \mu t \\
\mathbf{V}(R_{0,\tau}|\tau = t) &\equiv \mathbf{V}(R_{0,\tau}) = \sigma^2 h(t)
\end{aligned}$$

Bezuslovni očekivani prinos je

$$\mathbf{E}(R_{0,\tau}) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(R_{0,\tau}|\tau)] = \int_{t=a}^{b} \mu t g(t) dt = \mu \mathbf{E}(\tau),$$

a varijansa je

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(R_{0,\tau}) &= \mathbf{E}[\mathbf{V}(R_{0,\tau}|\tau)] + \mathbf{V}[\mathbf{E}(R_{0,\tau}|\tau)] \\
&= \int_a^b \sigma^2 h(t) g(t) dt + \int_a^b (\mu t - \mu \mathbf{E}(\tau))^2 g(t) dt \\
&= \sigma^2 \int_a^b h(t) g(t) dt + \mu^2 \int_a^b (t - \mathbf{E}(\tau))^2 g(t) dt \\
&= \sigma^2 \mathbf{E}(h(\tau)) + \mu^2 \mathbf{V}(\tau).
\end{aligned}$$

Tada je Langranžova funkcija

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{E}(h(\tau)) w^T \cdot V \cdot w + \frac{\mathbf{V}(\tau)}{2}(w^T \cdot \mu)^2 + \lambda_1(\overline{E} - \mathbf{E}(\tau) w^T \cdot \mu) + \lambda_2 \mathbf{E}(h(\tau))(1 - w^T \cdot \mathbf{1}).$$

Uslov prvog reda je

$$\mathbf{E}(h(\tau)) \cdot V \cdot w^* + \mathbf{V}(\tau)(w^{*T} \cdot \mu) \cdot \mu - \lambda_1 \mathbf{E}(\tau) \mu - \lambda_2 \mathbf{E}(h(\tau)) \cdot \mathbf{1} = 0,$$
$$\mathbf{E}(\tau) w^{*T} \cdot \mu = \overline{E},$$
$$w^{*T} \cdot \mathbf{1} = 1.$$

Zamenjujući prvo ograničenje dobija se

$$\mathbf{E}(h(\tau)) \cdot V \cdot w^* + \mathbf{V}(\tau)\frac{\overline{E}}{\mathbf{E}(\tau)} \cdot \mu - \lambda_1 \mathbf{E}(\tau)\mu - \lambda_2 \mathbf{E}(h(\tau)) \cdot \mathbf{1} = 0.$$

Što možemo drugačije zapisati

$$V \cdot w^* - \mu(\lambda_1 b - a) - \lambda_2 \mathbf{1} = 0,$$

gde su a i b definisani sa

$$\begin{aligned} a &\equiv \frac{\mathbf{V}(\tau)\overline{E}}{\mathbf{E}(\tau)\mathbf{E}(h(\tau))}, \\ b &\equiv \frac{\mathbf{E}(\tau)}{\mathbf{E}(h(\tau))}. \end{aligned}$$

Pa rešenje ima sledeci oblik

$$w^* = (b\lambda_1 - a)V^{-1} \cdot \mu + \lambda_2 V^{-1} \cdot \mathbf{1}.$$

Da bi izrazili λ_1 i λ_2 koristimo ograničenja

$$\begin{aligned} \mu^T \cdot w^* &= (b\lambda_1 - a)\mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mu + \lambda_2 \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1} = \frac{\overline{E}}{\mathbf{E}(\tau)} \equiv E^*, \\ \mathbf{1}^T \cdot w^* &= (b\lambda_1 - a)\mathbf{1}^T \cdot V^{-1} \cdot \mu + \lambda_2 \mathbf{1}^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1} = 1. \end{aligned}$$

Definisaćemo sledeće skalare

$$\begin{aligned} A &\equiv \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mu, \\ B &\equiv \mu^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1}, \\ C &\equiv \mathbf{1}^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1}, \end{aligned}$$

pa se dobija

$$\begin{aligned} E^* &= A(b\lambda_1 - a) + B\lambda_2 \\ 1 &= B(b\lambda_1 - a) + C\lambda_2, \end{aligned}$$

ili ekvivaletno

$$\begin{aligned} aA + E^* &= Ab\lambda_1 + B\lambda_2 \\ aB + 1 &= Bb\lambda_1 + C\lambda_2. \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema jednačina je sledeće:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{C(aA+E^*)-B(aB+1)}{AbC-B^2b} = \frac{CaA+CE^*-aB^2-B}{AbC-B^2b} = \frac{CE^*-B}{(AC-B^2)b}+\frac{a}{b}, \\
\lambda_2 &= \frac{Ab(aB+1)-Bb(aA+E^*)}{(AC-B^2)b} = \frac{A-BE^*}{AC-B^2}.
\end{aligned}$$

Pa je rešenje problema

$$\begin{aligned}
w^* &= [b(\frac{CE^*-B}{(AC-B^2)b}+\frac{a}{b})-a]\frac{CE^*-B}{AC-B^2}V^{-1}\cdot\mu+\frac{A-BE^*}{AC-B^2}V^{-1}\cdot\mathbf{1} \\
&= \frac{CE^*-B}{AC-B^2}V^{-1}\cdot\mu+\frac{A-BE^*}{AC-B^2}V^{-1}\cdot\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

□

Primetimo da iako matrica K zavisi od $\frac{\mathbf{V}(\tau)}{\mathbf{E}(\tau)}$, rešenje problema ne zavisi od $\frac{\mathbf{V}(\tau)}{\mathbf{E}(\tau)}$, pa time ni od raspodele vremena izlaska. Prema tome, kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa, odgovarajući optimalni težinski koeficijenti portfolija su nezavisni od raspodele vremena izlaska.

Sada oslabljujemo pretpostavku da je vreme izlaska nezavisno od prinosa, i posmatramo primer zavisnog slučaja.

4.4 Problem kada vreme izlaska zavisi od prinosa

U prethodnom poglavlju videli smo da kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa, skup dopustivih portfolija je isti kao i u slučaju fiksnog vremena izlaska. Ali ako vreme izlaska zavisi od performanse portfolija, tvrđenje 3 nije više zadovoljeno. Da bi pokazali da u opštem slučaju skup efikasnih portfolija nije isti za investitore sa fiksnim i neizvesnim vremenom, posmatraćemo sledeći primer.

Pretpostavimo da je vreme izlaska diskretna slučajna promeljiva. Investitor izlazi sa tržišta u periodu 1 sa verovatnoćom q ili u periodu 2 sa verovatnoćom $1-q$.

$$\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Izlazi se ranije (u periodu 1) ako i samo ako prinos portfolija padne ispod date vrednosti ε, inače izlazi se u periodu 2. Pretpostavićemo da su prinosi uslovno po vremenu nezavisni i da imaju normalnu raspodelu. Tada je verovatnoća ranijeg izlaska

$$q = F(\frac{\varepsilon-\mu_p}{\sigma_p}).$$

gde je $F(\cdot)$ funkcija standardne normalne raspodele.

Tvrđenje 5. *Ako su zadovoljene gore pomenute pretpostavke problem optimizacije portfolija kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija je sledeći:*

$$\min_w \boldsymbol{V}(R^p_{0,\tau}) = \min_w (q(1-q)\mu_p^2 + (2-q)\sigma_p^2 + 2\mu_p\sigma_p\sqrt{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}}}),$$

pri ograničenjima

$$\boldsymbol{E}(R^p_{0,\tau}) = \mu_p(2-q) = \overline{E},$$

$$w^T \cdot \boldsymbol{1} = 1.$$

Dokaz:

Označićemo sa $R_1(R_2)$ prinos portfolija posle jednog meseca (dva meseca). Pretpostavićemo da prinosi prate slučajan hod $R_1 \sim N(\mu_p, \sigma_p)$ i $R_2 \sim N(2\mu_p, \sqrt{2}\sigma_p)$. Iz teoreme 3 imamo

$$\mathbf{E}(R^p_{0,\tau}) = q \times \mathbf{E}(R_1|R_1 < \varepsilon) + (1-q) \times \mathbf{E}(R_2|R_1 > \varepsilon)$$

Pošto je $R_2 = R_1 + R$, a R ima istu raspodelu kao i R_1, i nezavisno je od R_1, sledi

$$\mathbf{E}(R_2|R_1 > \varepsilon) = \mathbf{E}(R_1|R_1 > \varepsilon) + \mathbf{E}(R|R_1 > \varepsilon)$$

i

$$\mathbf{E}(R|R_1 > \varepsilon) = \mu_p.$$

Sa druge strane znamo

$$q \times \mathbf{E}(R_1|R_1 < \varepsilon) + (1-q) \times \mathbf{E}(R_1|R_1 > \varepsilon) = \mathbf{E}(R_1) = \mu_p.$$

Pa se dobija

$$\mathbf{E}(R^p_{0,\tau}) = \mu_p + (1-q)\mu_p = \mu_p(2-q).$$

Sada ćemo izračunati varijansu portfolija. Prvo imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[(R^p_{0,\tau})^2] &= q \times \mathbf{E}(R_1^2|R_1 < \varepsilon) + (1-q) \times \mathbf{E}(R_2^2|R_1 > \varepsilon) \\
&= q \times \mathbf{E}(R_1^2|R_1 < \varepsilon) + (1-q) \times \mathbf{E}(R_1^2 + R^2 + 2R_1R|R_1 > \varepsilon) \\
&= \mathbf{E}(R_1^2) + (1-q)\mathbf{E}(R^2) + 2(1-q)\mathbf{E}(R_1|R_1 > \varepsilon)\mu_p \\
&= (\mu_p^2 + \sigma_p^2)(2-q) + 2(1-q)\mathbf{E}(R_1|R_1 > \varepsilon)\mu_p.
\end{aligned}$$

Pošto je

$$(1-q)\mathbf{E}(R_1|R_1 > \varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma_p^2}} \int_\varepsilon^\infty xe^{-\frac{(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}} dx$$

Koristeći smenu $u = \frac{(x-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}$ dobija se

$$
\begin{aligned}
(1-q)\mathbf{E}(R_1|R_1>\varepsilon) &= \mu_p F(\frac{\mu_p-\varepsilon}{\sigma_p}) + \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{\frac{(\varepsilon-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}}^{\infty} e^{-u}du \\
&= \mu_p(1-q) + \sigma_p^2\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma_p^2}}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}}.
\end{aligned}
$$

Pa je

$$
\mathbf{E}[(R_{0,\tau}^p)^2] = (\mu_p^2+\sigma_p^2)(2-q) + 2\mu_p^2(1-q) + 2\mu_p\sigma_p\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}}.
$$

Konačno, dobijamo varijansu portfolija

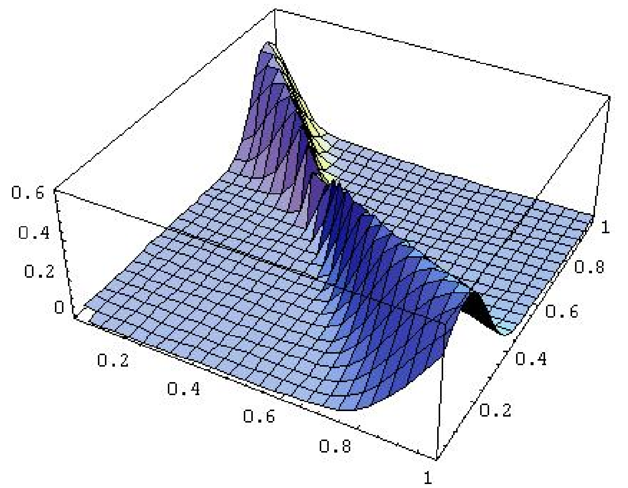
$$
\mathbf{V}(R_{0,\tau}^p) = \mathbf{E}[(R_{0,\tau}^p)^2] - [\mathbf{E}(R_{0,\tau}^p)]^2 = q(1-q)\mu_p^2 + (2-q)\sigma_p^2 + 2\mu_p\sigma_p\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}}.
$$

□

Očekivano vreme izlaska je $\mathbf{E}(\tau) = 2-q$, a varijansa $\mathbf{V}(\tau) = q(1-q)$. Kada uporedimo sa slučajem nezavisnog vremena izlaska (jednačine (11) i (12)), vidimo da varijansa ima dodatni sabirak

$$
2\mu_p\sigma_p\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_p)^2}{2\sigma_p^2}}.
$$

U ovom slučaju funkcija cilja, tj. varijansa portfolija, nije kvadratna funkcija i nije linearna funkcija težinskih koeficijenata portfolija. Pa se problem ne može rešiti ekplicitno. Takođe, funkcija cilja nije konveksna. To vidimo slici (5), na kojoj je prikazana varijansa portfolija za dve aktive. Pa se ne mogu koristiti globalne metode za rešavanje. U glavi 5 biće prikazana metoda za rešavanje datog problema.



Slika 5: Nekonveksna funkcija

5 Investiranje u strano tržište

Do sada smo razmatrali slučaj kada se ulaže u aktive samo sa domaćeg tržišta. Sada ćemo razmatrati problem optimizacije portfolija u slučaju kada se investira u strano tržište. Posmatraćemo slučaj sa stanovišta američkog investitora, koji investira u srpsko tržište.

Prinos aktiva sa srpskog tržište je dat sa $R_{0,\tau}^{RSDi}, i = 1, ..., n$. Prinos izražen u dolarima aktive sa srpskog tržišta je

$$\begin{aligned} R_{0,\tau}^{\$i} &= (1 + R_{0,\tau}^{RSDi})(1 + e_{0,\tau}) - 1 \\ &= R_{0,\tau}^{\$i} = R_{0,\tau}^{RSDi} + e_{0,\tau} + R_{0,\tau}^{RSDi} e_{0,\tau}, \end{aligned}$$

gde je $e_{0,\tau}$ je stopa rasta dinara u odnosu na dolar. Pošto je proizvod $R_{0,\tau}^{RSDi} e_{0,\tau}$ zanemarljivo mali, $R_{0,\tau}^{\$i}$ možemo aproksimirati sa

$$R_{0,\tau}^{\$i} \approx R_{0,\tau}^{RSDi} + e_{0,\tau}.$$

Tada je očekivanje prinosa u dolarima

$$\mathbf{E}(R_{0,\tau}^{\$i}) = \mathbf{E}(R_{0,\tau}^{RSDi}) + \mathbf{E}(e_{0,\tau}), \tag{19}$$

i kovarijansa je data sa

$$cov(R_{0,\tau}^{\$i}, R_{0,\tau}^{\$j}) = cov(R_{0,\tau}^{RSDi}, R_{0,\tau}^{RSDj}) + \mathbf{V}(e_{0,\tau}) + cov(R_{0,\tau}^{RSDi}, e_{0,\tau}) + cov(R_{0,\tau}^{RSDj}, e_{0,\tau}), \tag{20}$$

Odredićemo očekivanje i varijansu prinosa portfolija p izraženog u dolarima

$$R_{0,\tau}^{p} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_{0,\tau}^{\$ i}$$

Očekivanje portfolija je dato sledećim izrazom

$$\mathbf{E}(R_{0,\tau}^{p}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{E}(R_{0,\tau}^{\$ i})$$

Pa iz (19) imamo

$$\mathbf{E}(R_{0,\tau}^{p}) = \sum_{i=1}^{n} w_i (\mathbf{E}(R_{0,\tau}^{RSDi}) + \mathbf{E}(e_{0,\tau}))$$

Varijansa portfolija je

$$\mathbf{V}(R_{0,\tau}^{p}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j cov(R_{0,\tau}^{\$ i}, R_{0,\tau}^{\$ j})$$

pa zamenom jednačine (20) dobija se

$$\mathbf{V}(R_{0,\tau}^{p}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j (cov(R_{0,\tau}^{RSDi}, R_{0,\tau}^{RSDj}) + \mathbf{V}(e_{0,\tau}) + cov(R_{0,\tau}^{RSDi}, e_{0,\tau}) + cov(R_{0,\tau}^{RSDj}, e_{0,\tau})) \tag{21}$$

Sada imamo dva izvora rizika, rizik prinosa u dinarima i rizik kursa. Posmatraćemo dva slučaja. Prvi slučaj je kada je vreme izlaska nezavisno od performanse portfolija u Srbiji izražen u dolarima, tj. vreme izlaska je nezavisno od prinosa u dinarima i od promena kursa. Drugi slučaj je kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija u Srbiji izražen u dolarima.

5.1 Markowitz-ov model kada je vreme izlaska nezavisno od performanse portfolija u Srbiji izražen u dolarima

Pretpostavimo da prinosi prate slučajan hod sa očekivanjem μ_i^{RSD} i standardnim odstupanjem σ_i^{RSD}, dok kurs prati slučajan hod sa očekivanjem μ_e i standardnim odstupanjem σ_e. Sa $\rho_{RSDi,RSDj}$ označavamo koeficijent korelacije prinosa i-te i j-te aktive sa srpskog tržišta, a sa $\rho_{RSDi,e}$ označavamo koeficijent korelacije prinosa i-te aktive sa srpskog tržišta i kursa. Tada imamo sledeće jednačine

$$cov(R_{0,\tau}^{RSDi}, R_{0,\tau}^{RSDj}) = \sigma_i^{RSD} \sigma_j^{RSD} \rho_{RSDi,RSDj} \mathbf{E}(\tau) + \mu_i^{RSD} \mu_j^{RSD} \mathbf{V}(\tau),$$

$$\mathbf{V}(e_{0,\tau}) = \sigma_e^2 \mathbf{E}(\tau) + \mu_e^2 \mathbf{V}(\tau),$$

$$cov(R_{0,\tau}^{RSDi}, e_{0,\tau}) = \sigma_i^{RSD} \sigma_e \rho_{RSDi,e} \mathbf{E}(\tau) + \mu_i^{RSD} \mu_e \mathbf{V}(\tau).$$

Zamenom u varijansu portfolija dobija se

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(R_{0,\tau}^p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j ((\sigma_i^{RSD} \sigma_j^{RSD} \rho_{RSDi,RSDj} + \sigma_e^2 + \sigma_i^{RSD} \sigma_e \rho_{RSDi,e} + \sigma_j^{RSD} \sigma_e \rho_{RSDj,e}) \mathbf{E}(\tau) \\ &+ (\mu_i^{RSD} \mu_j^{RSD} + \mu_e^2 + \mu_i^{RSD} \mu_e + \mu_j^{RSD} \mu_e) \mathbf{V}(\tau)). \end{aligned}$$

Tada je problem izbora portofolija sledeći

$$\min_w w^T \cdot M \cdot w, \tag{22}$$

pri ograničenjima

$$w^T \cdot \mu^* = E^*, \tag{23}$$

$$w^T \cdot \mathbf{1} = 1, \tag{24}$$

gde je

$$\begin{aligned} M &= V^* + \mu^{*T} \mu^* \frac{\mathbf{V}(\tau)}{\mathbf{E}(\tau)}, \\ V_{i,j}^* &= \sigma_i^{RSD} \sigma_j^{RSD} \rho_{RSDi,RSDj} + \sigma_e^2 + \sigma_i^{RSD} \sigma_e \rho_{RSDi,e} + \sigma_j^{RSD} \sigma_e \rho_{RSDj,e}, \quad i,j = 1,...,n \end{aligned}$$

vektor prinosa μ^* je

$$\mu_i^* = \mu_i^{RSD} + \mu_e, \quad i = 1, ...n,$$

i E^* je definisano kao i pre

$$E^* \equiv \frac{\overline{E}}{\mathbf{E}(\tau)}.$$

Vidimo da u slučaju kada je vreme izlaska nezavisno od prinosa u dolarima, problem izbora portfolija se može prestaviti kao standardna kvadratna optimizacija portfolija. Sada ćemo eksplicitno rešiti problem.

Tvrđenje 6. *Ako vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija u Srbiji izražen u dolarima i ako prinosi u dinarima i kurs prate slučajan hod, rešenje problema (16) do (18) je dato sa*

$$w^* = \frac{CE^* - B}{AC - B^2} V^{*-1} \cdot \mu^* + \frac{A - BE^*}{AC - B^2} V^{*-1} \cdot \boldsymbol{1}$$

gde su A, B i C

$$A \equiv \mu^{*T} \cdot V^{*-1} \cdot \mu^*$$
$$B \equiv \mu^{*T} \cdot V^{*-1} \cdot \boldsymbol{1}$$
$$C \equiv \boldsymbol{1}^T \cdot V^{*-1} \cdot \boldsymbol{1}$$

Dokaz: Langranžova funkcija koja odgovara problemu je data sa

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\tau) w^T \cdot V^* \cdot w + \frac{\mathbf{V}(\tau)}{2}(w^T \cdot \mu^*)^2 + \lambda_1(\overline{E} - \mathbf{E}(\tau) w^T \cdot \mu^*) + \lambda_2 \mathbf{E}(\tau)(1 - w^T \cdot \mathbf{1})$$

Dalje se dokazuje analogno dokazu tvrđenja 4.

□

Primećujemo da kada vreme izlaska nezavisi od performanse portfolija u Srbiji izražen u dolarima, odgovarajući optimalni težinski koeficijenti portfolija su nezavisni od raspodele vremena izlaska. Vidimo da je oblik rešenja isti obliku rešenja standardnog Markowitz-ovog modela, tvrđenje 1, kao i rešenju generalizovanog Markowitz-ovog modela sa nezavisnim vremenom izlaska, tvrđenje 4.

Sada ćemo posmatrati slučaj kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija u Srbiji izražen u dolarima.

5.2 Vreme izlaska zavisno od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima

Oslabljujemo pretpostavku da je vreme izlaska nezavisno od prinosa u dolarima, i posmatramo primer zavisanog slučaja. Tada vreme izlaska zavisi od prinosa u dinarima i od promena kursa. Investitor moze izaći ili u periodu 1 ili u periodu 2. Izlazi se ranije (u periodu 1) ako i samo ako prinos portfolija u dolarima padne ispod praga ε, inače izlazi se u periodu 2. Znači, ranije izlazak se dešava u slučaju da prinos portfolija u dinarima padne puno i/ili zato što vrednost dinara u odnosu na dolar puno oslabi. Pretpostavićemo da su prinosi u dinarima uslovno po vremenu nezavisni i da imaju normalnu raspodelu sa očekivanjem μ_i^{RSD} i varijansom ${\sigma_i^{RSD}}^2$, da kurs uslovno po vremenu ima normalnu raspodelu sa očekivanjem μ_e i varijansom σ_e^2 i da su prinosi u dinarima i kurs nezavisni. Tada i prinos izražen u dolarima $R_{0,\tau}^{\$i} = R_{0,\tau}^{RSDi} + e_{0,\tau}$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem $\mu_i^{RSD} + \mu_e$ i varijansom ${\sigma_i^{RSD}}^2 + \sigma_e^2$. Pa verovatnoća ranijeg izlaska je

$$q = F(\frac{\varepsilon - \mu_p^{RSD} - \mu_e}{\sqrt{{\sigma_p^{RSD}}^2 + \sigma_{ep}^2}}),$$

gde je
$\mu_p^{RSD} = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i^{RSD}$, ${\sigma_p^{RSD}}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i^{RSD} \sigma_j^{RSD} \rho_{RSDi,RSDj}$ i $\sigma_{ep}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_e^2$.

Tvrđenje 7. *Ako su zadovoljenje prethodno pomenute pretpostavke i ako vreme izlaska zavisi od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima problem izbora portfolija je*

$$\min_w (q(1-q)(\mu_p^{RSD}+\mu_e)^2+(2-q)({\sigma_p^{RSD}}^2+\sigma_{ep}^2)+2(\mu_p^{RSD}+\mu_e)\sqrt{{\sigma_p^{RSD}}^2 + \sigma_{ep}^2}\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon-\mu_p^{RSD}-\mu_e)^2}{2({\sigma_p^{RSD}}^2+\sigma_{ep}^2)}}),$$

$$\boldsymbol{E}(R_p) = (\mu_p^{RSD} + \mu_e)\boldsymbol{E}(\tau) = \overline{E},$$
$$w^T \cdot \boldsymbol{1} = 1.$$

Dokaz:

Označićemo sa $R_1^{\$}(R_2^{\$})$ prinos portfolija izražen u dolarima posle jednog meseca (dva meseca). Pretpostavićemo da prinosi prate slučajan hod $R_1^{\$} \sim N(\mu_p^{RSD} + \mu_e, \sqrt{{\sigma_p^{RSD}}^2 + \sigma_{ep}^2})$ i $R_2^{\$} \sim N(2(\mu_p^{RSD} + \mu_e), \sqrt{2({\sigma_p^{RSD}}^2 + \sigma_{ep}^2)})$. Dalje se dokazuje analogno dokazu tvrđenja 5.

$\square$

Primetimo da problem ima isti oblik kao i problem tvrđenja 5 samo sa promenjenim parametrima. Funkcija cilja je takođe nelinearna funkcija težinskih koeficijenata portfolija i nije konveksna. Pa se ne mogu koristiti globalne metode za rešavanje. Sada ćemo predstaviti metodu za rešavanje problema ove vrste.

6 Sekvencijalno kvadratno programiranje

Problem optimizacije portfolija kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija tvrđenje 5, i kada se investira u strano tržište tvrđenje 7, su problemi minimizacije sa nelinearnim ograničenjima. Generalno, problem je:

$$\min f(x)$$

pri ograničenjima

$$h(x) = 0$$

gde $f, h \in C^1, \quad f : R^n \to R, \quad h : R^n \to R^m \quad i \quad m < n$, a funkcije f i h ne moraju biti linearne.

Osnovna ideja za rešavanje problema sa nelinearnim ograničenjima je da se ne radi sa nelinearnim ograničenjima. Jedna od metoda za rešavanje ovog problema je sekvencijalno kvadratno programiranje. Ideja metode je da se sekvencijalno rešava niz kvadratnih problema. Kvadratni problem je minimizacija kvadratne funkcije uz linearna ograničenja.

Metoda sekvencijalnog kvadratnog programiranjeima ima opštu strukturu datu sledećim algoritmom:

1. Za dato x^k i λ^k rešiti sledeći problem kvadratnog programiranja

   $$\min q(d_k) := \frac{1}{2} d_k^T H_k d_k + \nabla f(x^k)^T d_k,$$

   pri ograničenjima

   $$h(x^k) + \nabla h(x^k) d_k = 0,$$

   gde je $H_k \approx \nabla_{xx} L(x^k, \lambda^k)$.

2. Odrediti sledeću iteraciju

   $$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k,$$

   pri čemu se α_k bira tako da odgovarajuća "funkcija cilja" dovoljno opada.

3. Odrediti H_{k+1} koristeći pozitivno definitnu Kvazi- Njutnovu aproksimaciju hesijana Langranžove funkcije $\nabla_{xx} L(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$.

U svakoj iteracija pozitivna definitna aproksimacija hesijana Langranžove funkcije, H, se računa pomoću Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) metode.

$$H_{k+1} = H_k + \frac{g_k g_k^T}{g_k^T s_k} - \frac{H_k^T g_k^T g_k H_k}{g_k^T H_k s_k},$$

gde je

$$
\begin{aligned}
s_k &= x_{k+1} - x_k, \\
g_k &= (\nabla f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla h_i(x_{k+1})) - (\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla h_i(x_k)).
\end{aligned}
$$

Hoćemo da je hesijan Lagranžove funkcije pozitivno definitan u svakoj iteraciji iako on može biti jednak nuli u rešenju, videti teoremu 6. Pozitivna definitnost se odražava tako što obezbeđujemo da je $g_k^T s_k$ pozitivno u svakoj iteraciji i da je početno H pozitivno definitna matrica. Kada $g_k^T s_k$ nije pozitivno, g_k se modifikuje elemenat po elemenat tako da bude $g_k^T s_k > 0$. U prvoj modifikaciji, najmanji negativan elemenat od $g_k^T s_k$ se polovi dok god ne bude veći ili jednak maloj negativnoj toleranciji. Ako posle ove procedure $g_k^T s_k$ još uvek nije pozitivno, g_k se modifikuje tako što mu se doda vektor v pomnožen konstantnim skalarom w

$$g_k = g_k + v \cdot w,$$

gde je

$$
\begin{cases}
v_i = \nabla h_i(x_{k+1}) \cdot h_i(x_{k+1}) - \nabla h_i(x_k) \cdot h_i(x_k), & \text{ako je } (g_k)_i \cdot w < 0 \;\; i \;\; (g_k)_i \cdot (s_k)_i < 0; \\
v_i = 0, & \text{inače,} \qquad \text{i=1,...,m}
\end{cases}
$$

Povećavamo w dok god $g_k^T s_k$ ne postane pozitivno.

U koraku 2. "funkcija cilja" cilja se bira na različite načine. Jedan od izbora je sledeći

$$\psi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} r_i h_i(x).$$

Kazneni parametar je

$$r_i = \frac{\| \nabla f(x) \|}{\| \nabla g_i(x) \|},$$

gde je $\| \cdot \|$ Euklidska norma.

Rešenje datog algoritma je lokalni minimum problema, a pošto je funkcija cilja nije konveksna, videti sliku (5), ne možemo tvrditi da je rešenje i globalni minimum.

7 Numeričko rešavanje

Testiraćemo metoda za numeričko rešavanje, sekvencijalno kvadratno programiranje, na primeru investiranja u 10 aktiva. Odredićemo optimalni portfolio za sve pomenute slučajeve. Rešenja dobijamo pomoću programskog paketa MATLAB.

Neka je vektor očekivanih prinosa aktiva

$$\mu = \begin{bmatrix} 1.1167 & 1.2833 & 1.2500 & 1.2333 & 1.4000 & 1.2833 & 1.3333 & 1.2333 & 1.2667 & 1.2333 \end{bmatrix}^T,$$

a kovarijansna matrica

$$V = \begin{bmatrix} 0.200 & -0.028 & -0.024 & -0.004 & -0.058 & -0.008 & -0.004 & -0.036 & -0.018 & -0.008 \\ -0.028 & 0.181 & 0.017 & -0.003 & 0.028 & 0.005 & 0.004 & 0.022 & 0.009 & -0.003 \\ -0.024 & 0.017 & 0.225 & -0.005 & 0.025 & 0.011 & 0.005 & 0.027 & 0.008 & -0.018 \\ -0.004 & -0.003 & -0.005 & 0.222 & 0.013 & -0.029 & -0.014 & -0.008 & -0.006 & 0.016 \\ -0.058 & 0.028 & 0.025 & 0.013 & 0.300 & 0.008 & 0 & 0.040 & 0.022 & 0.010 \\ -0.008 & 0.005 & 0.011 & -0.029 & 0.008 & 0.200 & 0.031 & 0.029 & 0.0161 & -0.029 \\ -0.004 & 0.004 & 0.005 & -0.014 & 0 & 0.031 & 0.300 & 0.009 & -0.004 & -0.011 \\ -0.036 & 0.022 & 0.027 & -0.008 & 0.040 & 0.029 & 0.009 & 0.400 & 0.023 & -0.018 \\ -0.018 & 0.009 & 0.008 & -0.006 & 0.022 & 0.016 & -0.004 & 0.023 & 0.500 & 0.004 \\ -0.007 & -0.003 & -0.018 & 0.016 & 0.01 & -0.029 & -0.011 & -0.018 & 0.004 & 0.200 \end{bmatrix}$$

Investitor želi da ostvari prinos od 1.5.

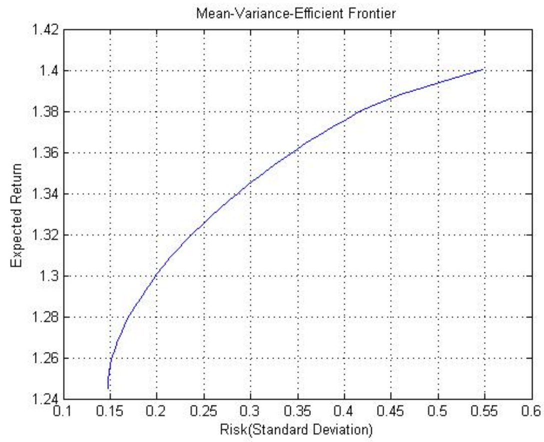
7.1 Standardni Markowitz-ov model

Ako pretpostavimo da investitor sa sigurnošću zna kada izlazi sa tržišta, koristimo standardni Markowitz-ov model, (3) do (5), gde je $\overline{E} = 1.5$. Rešavanjem dobijamo težinske koeficijente portfolija

$$w = \begin{bmatrix} -0.6177 & 0.2330 & -0.0411 & 0.0316 & 0.7157 & 0.2889 & 0.4815 & -0.1594 & 0.0537 & 0.0137 \end{bmatrix}^T$$

Pozitivni težinski koeficijenti označavaju udeo kapitala uložen u odgovarajuću aktivu, a negativni da je potrebno pozajmiti novac koji bi uložili u odgovarajuću aktivu. Varijansa portfolija je 0.4039. Znači da bi investitor ostvario prinos od 1.5 on je izložen je riziku od 0.4039.

Na slici 6 vidimo skup efikasnih portfolija prikazan u $\mu - \sigma$ ravni.



Slika 6: Skup efikasnih portfolija Markowitz-ovog modela

7.2 Generalizovani Markowitz-ov model kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa

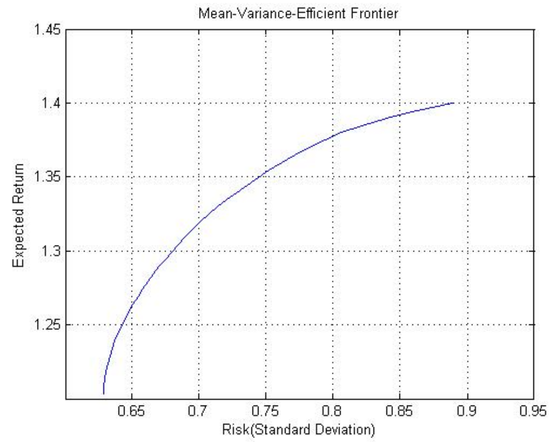
Pretpostavimo sada da je vreme izlaska neizvesno i da vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija, problem 13 do 15, gde je $E^* = 1.5$. Neka se raniji izlazak dešava sa verovatnoćom 0.5.

$$\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Tada je $\mathbf{E}(\tau) = 1.5$ i $\mathbf{V}(\tau) = 0.25$, pa dobijamo rešenje

$$w = \begin{bmatrix} -0.6177 & 0.2330 & -0.0411 & 0.0316 & 0.7157 & 0.2889 & 0.4815 & -0.1594 & 0.0537 & 0.0137 \end{bmatrix}^T$$

Vidimo de je rešenje indetično rešenju standardnog Markozitz-ovog problema. U ovom slučaju da bi investitor ostvario prinos od 1.5 on je izložen je riziku od 0.7789. Primećujemo da je rizik veći nego rizik koji dobijamo rešavanjem standardnog Markozitz-ovog modela, jer neizvesno vreme izlaska povećava rizik. Skup efikasnih portfolija je prikazan na slici 7.



Slika 7: Skup efikasnih portfolija generalizovanog Markowitz-ovog modela kada je vreme izlaska nezavisno od performanse portfolija

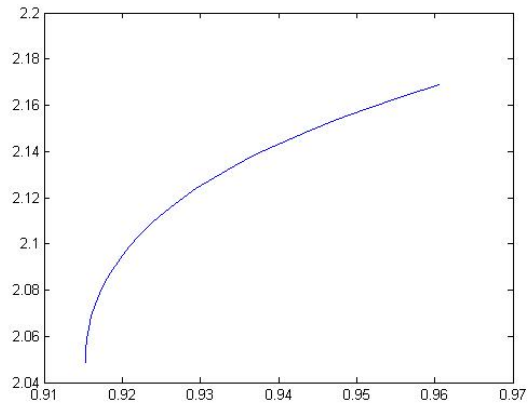
7.3 Generalizovani Markowitz-ov model kada je vreme izlaska zavisno od prinosa

Sada ćemo posmatrati slučaj kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija. Investitor izlazi sa tržišta ranije ako prinos portfolija padne ispod $\varepsilon = 1.2$. Rešavanjem problema datog u tvrđenju 5, gde je $\overline{E} = 1.5$, dobija se

$$w = \begin{bmatrix} 0.7021 & 0.0478 & 0.1901 & 0.1688 & -0.3544 & 0.0147 & -0.1981 & 0.1807 & 0.0276 & 0.2208 \end{bmatrix}^T$$

Rizik je 1.6421, pa primećujemo da je rizik veći nego rizik koji imamo kada vreme izlaska ne zavisi od prinosa. Ako uzmemo da je $\varepsilon = 1.6$, tada imamo rizik 0.7038. Pa vidimo da sa povećavanjem praga izlaska smanjujemo rizik.

Iako funkcija cilja nije konveksna, imamo konvergenciju ka rešenju. Provereni su i dovoljni uslovi drugog reda. Dobijeni minimum je lokalni, a pošto funkcija cilja nije konveksna ne može se tvrditi da je rešenje i globalni minimum. Međutim, uzimajući različite početne tačke u algoritmu sekvencijalnog kvadratnog programiranja, dobija se isto rešenje. Tako da se može zaključiti da je rešenje globalni minimum. Na slici 8 je prikazan skup efikasnih portfolija.



Slika 8: Skup efikasnih portfolija generalizovanog Markowitz-ovog modela kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija

7.4 Vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima

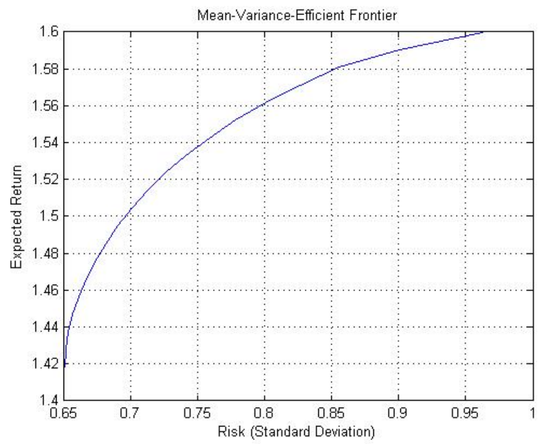
Pretpostavimo da investitor iz Amerike ulaže u 10 aktiva sa srpskog tržišta. Rešavamo problem (22) do (24), gde je $E^* = 1.5$. Očekivanje i varijansa vremena izlaska su isti kao i pre $\mathbf{E}(\tau) = 1.5$ i $\mathbf{V}(\tau) = 0.25$. Neka je gore dat vektor očekivanih prinosa μ, vektor očekivanih prinosa aktiva sa srpskog tržišta $\mu = \mu^{RSD}$, dok je V je kovarijansna matrica prinosa sa srpskog tržišta. Stopa rasta dinara u odnosu na dolar $e_{0,\tau}$ prati slučajan hod sa očekivanjem $\mu_e = 0.2$ i varijansom $\sigma_e^2 = 0.05$. Neka je M^* kovarijansna matrica prinosa aktiva sa srpskog tržišta i stope rasta dinara u odnosu na dolar $M^*_{ij} = \sigma_i^{RSD}\sigma_e\rho_{RSDi,e} + \sigma_j^{RSD}\sigma_e\rho_{RSDj,e},\ i,j = 1,...,n$.

$$M^* = \begin{bmatrix} 0.100 & -0.014 & -0.012 & -0.002 & -0.029 & -0.004 & -0.002 & -0.018 & -0.009 & -0.004 \\ -0.014 & 0.090 & 0.008 & -0.001 & 0.014 & 0.002 & 0.002 & 0.011 & 0.005 & -0.001 \\ -0.012 & 0.008 & 0.112 & -0.002 & 0.012 & 0.005 & 0.002 & 0.014 & 0.004 & -0.009 \\ -0.002 & -0.001 & -0.002 & 0.111 & 0.006 & -0.015 & -0.007 & -0.004 & -0.003 & 0.008 \\ -0.029 & 0.014 & 0.012 & 0.006 & 0.150 & 0.004 & 0 & 0.020 & 0.011 & 0.005 \\ -0.004 & 0.002 & 0.005 & -0.015 & 0.004 & 0.100 & 0.015 & 0.014 & 0.008 & -0.015 \\ -0.002 & 0.002 & 0.002 & -0.007 & 0 & 0.015 & 0.150 & 0.005 & -0.002 & -0.006 \\ -0.018 & 0.011 & 0.013 & -0.004 & 0.020 & 0.014 & 0.005 & 0.200 & 0.011 & -0.009 \\ -0.009 & 0.005 & 0.004 & -0.003 & 0.011 & 0.008 & -0.002 & 0.011 & 0.250 & 0.002 \\ -0.004 & -0.001 & -0.009 & 0.008 & 0.005 & -0.015 & -0.006 & -0.009 & 0.002 & 0.100 \end{bmatrix}$$

Rešenje problema je

$$w = \begin{bmatrix} 0.0106 & 0.1447 & 0.0690 & 0.0967 & 0.2066 & 0.1584 & 0.1581 & 0.0022 & 0.0413 & 0.1124 \end{bmatrix}^T.$$

Rizik je 0.4844. Na slici 9 vidimo skup efikasnih portfolija.



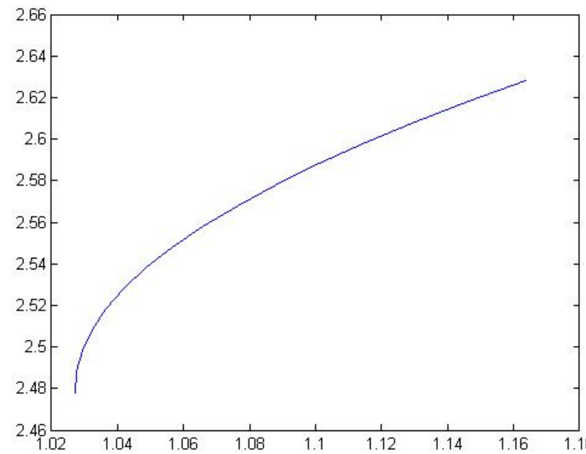
Slika 9: Skup efikasnih kada je vreme izlaska nezavisno od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima

7.5 Vreme izlaska zavisno od performanse portfolija izraženog u dolarima

Sada ćemo pretpostaviti da vreme izlaska zavisi od performanse portfolija izraženog u dolarima. Rešavamo problem tvrđenja 7, gde je $\overline{E} = 1.5$. Investitor izlazi sa tržišta ranije ako prinos portfolija izraženog u dolarima padne ispod $\varepsilon = 1.2$. Očekivanje i varijansa vremena izlaska, prinosa u dinarima kao i stope raste dinara u odnosu na dolar su isti kao i u slučaju kada vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima. Tada se dobija

$$w = \begin{bmatrix} 1.4454 & -0.0565 & 0.3194 & 0.2467 & -0.9567 & -0.1406 & -0.5807 & 0.3724 & 0.0130 & 0.3377 \end{bmatrix}^T$$

Rizik kojem je investitor izložen je 4.3492. Primećujemo da je rizik kojem je investitor izložen dosta veći nego rizik kada vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima. Rešenje je globalni minimum, jer se za različite tačke dobija isto rešenje. Skup efikasnih portfolija je prikazan na slici 10



Slika 10: Skup efikasnih portfolija Markowitz-ov model kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija u Srbiji izražen u dolarima

Provereni su dovoljni uslovi drugog reda za sve rešene slučajeve, pa možemo sa sigurnošću tvrditi da su dobijena rešenja minimumi problema. Testiran je i slučaj kada ulažemo u više od 10 aktiva.

8 Zaključak

Motivacija za izbor ove teme je u radu [1]. U pomenutom radu autori su generalizovali standardni Markowitz-ov model koji je zasnovan na pretpostavci da investitor sa sigurnošću zna kada ce izaći sa tržišta, na slučaj kada je vreme izlaska neizvesno. U ovom slučaju investitor je izlažen riziku prinosa aktiva i riziku vremena izlaska. U radu autori su posmatrali dva slučaja kada vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija, kao i slučaj kada zavisi.

U prvom slučaju formulisali su problem optimizacije portfolia i pokazali da je to kvadratni problem čije je rešenje istog oblika kao i rešenje problema standardnog Markowitz-ovog modela sa prilagođenim vrednostima parametara. Dok su u slučaju kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija samo formulisali problem. Funkcija cilja problema minimizacije je nelinearna funkcija težinskih koeficijenata portfolija, pa se problem ne može rešiti eksplicitno. Glavna ideja master teze je bila da se pronađe odgovarajuća numerička metoda za rešavanje pomenutog problema.

U master tezi je pokazano da funkcija cilja prethodno pomenutog nelinearnog problema nije konveksna funkcija, pa nije moguće primeniti globalne metode rešavanja. Opisan problem se može rešiti jednom od numeričkih metodom za rešavanje problema nelinearne optimizacije sa ograničenjima, sekvencijalnim kvadratnim programiranjem, što je testirano u radu.

Druga ideja je bila da se generalizuju rezultati iz [1] na slučaj investiranja u strano tržište. Posmatran je slučaj sa stanovišta američkog investitora koji ulaže u srpsko tržište. U ovom slučaju pored rizika prinosa u dinarima i rizika vremena izlaska imamo i rizik promene kursa. Takođe, kao i u slučaju ulaganja samo u domaće tržište, posmatrano je dva slučaja, kada vreme izlaska ne zavisi od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima, kao i slučaj kada zavisi. U slučaju kada je vreme izlaska nezavisno, pokazano je da rešenje problema ima isti oblik kao i rešenje problema standardnog Markowitz-ovog modela sa prilagođenim vrednostima parametara. U drugom slučaju kada vreme izlaska zavisi od performanse portfolija u Srbiji izraženog u dolarima funkcija cilja ima sličan oblik funkciji cilja problema ulaganja samo na domaće tržište kada vreme izlaska zavisi od prinosa. Funkcija cilja je takođe nelinearna funkcija težinskih koeficijenata portfolija i nije konveksna. Pa se problem se rešava takođe sekvencijalnim kvadratnim programiranjem.

Videli smo na primeru investiranja u 10 aktiva, da koristeći sekvencijalno kvadratno programiranje imamo konvergenciju ka rešenju problema, u svim pomenutim slučajevima.

Literatura

[1] Martellini, L., Urošević, B.: *Static Mean-Variance Analysis with Uncertain Time Horizon.* Management Science. **52** (2006), 955–964.

[2] Nocedal, J., Wright, Stephen J.: *Numerical Optimization.* Springer. (1999)

[3] Luenberger, David G.: *Investment Science.* Oxford University Press, USA. (1997), 385–390.

[4] Eun, Cheol S., Resnick, Bruce G.: *Exchange Rate Uncertainty, Forward Contracts and International Portfolio Selection.* The Journal of Finance. **43** (1988), 197–215.

Kratka biografija

Sonja Rauški je rođena u Zrenjaninu 28. oktobra 1986. godine. Završila je osnovnu školu "Petar Petrović Njegoš" u Zrenjaninu kao vukovac, a potom i Zrenjaninsku gimnaziju, prirodno-matematički smer, takođe kao vukovac. Odmah po završetku gimnazije, 2005. godine, upisuje studije na Prirodno- matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Završava osnovne studije oktobra 2009. godine sa prosečnom ocenom 9.73. Iste godine na istom fakultetu upisuje master studije primenjene matematike, modul finansijska matematika. Zaključno sa oktobarskim ispitnim rokom 2010. godine, uspešno polaže sve predviđene ispite master studija sa prosečnom ocenom 9.93.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj (RBR):	
Identifikacioni broj (IBR):	
Tip dokumentacije (TD):	monografska dokumentacija
Tip zapisa (TZ):	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (VR):	master rad
Autor (AU):	Sonja Rauški
Mentor (ME):	prof. dr Nataša Krejić
Naslov rada (NR):	Optmimizacija portfolija kada je vreme izlaska neizvesno
Jezik publikacije (JP):	srpski (latinica)
Jezik izvoda (JI):	s/en
Zemlja publikovanja (ZP):	Republika Srbija
Uže geografsko područje (UGP):	Vojvodina
Godina (GO):	2011
Izdavač (IZ):	autorski reprint
Mesto i adresa (MA):	Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
Fizički opis rada (FOR):	(8/42/1/0/10/0/0) (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
Naučna oblast (NO):	matematika
Naučna disciplina (ND):	finansijska matematika, numerička optimizacija

Predmetne odrednice, ključne reči (PO, UDK):	Izbor portfolija, neizvesni vremenski horizont, analiza očekivanja- varijanse, neizvesnost kursa, nelinearna optimizacija
Čuva se (ČS):	
Važna napomena (VN):	
Izvod (IZ):	U ovom radu je razmatrana minimizacijom očekivanja-varijanse kada je vreme izlaska neizvesno i prezentovana je komplikacija teoretskih rezultata. Izveden je model za portfolio u stranoj valuti i odgovarajući numerički metod za rešavanje ovih problema uzimajući u obzir da ovi problemi nisu konveksni, pa nije moguće koristiti globalne metode za rešavanje. Odgovarajući numerički metod je testiran u programskom jeziku MATLAB.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća (DP):	januar 2011
Datum odbrane (DO):	februar 2011
Članovi komisije (KO):	
Predsednik:	
Član:	
Mentor:	

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number (SNO):	
Identification number (INO):	
Document type (DT):	monograph type
Type of record (TR):	printed text
Contents code (CC):	master's thesis
Author (AU):	Sonja Rauški
Mentor (ME):	prof. dr Nataša Krejić
Title (TI):	Portfolio optimization when time of exit is uncertain
Language of text (LT):	Serbian (Latin)
Language of abstract (LA):	s/en
Country of publication (CP):	Republic of Serbia
Locality of publication (LP):	Vojvodina
Publication year (PY):	2011
Publisher (PU):	author's reprint
Publication place (PP):	Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
Physical description (PD):	(8/42/1/0/10/0/0) (chapters/pages/lit./tables/pictures/graphs/add.lists)
Scientific field (SF):	mathematics
Scientific discipline (SD)	financial mathematics, numerical optmization

Subject, key words (SKW): portfolio selection, uncertain time horizon, mean-variance analysis, exchange rate uncertainty, nonlinear optmization

Holding data (HD):

Note (N):

Abstract (AB): In this work, we have dealt with the mean- variance minimization with uncertain time exit and presented the complication of theoretical results. We derived a model of portfolio in foreign currency and an appropriate numerical method able to solve such problems given that these kind of problems are not convex and global solvers are not available. Appropriate numerical method was tested using programming language MATLAB.

Accepted on Scientific board on (AS): January 2011

Defended (DE): February 2011

Thesis Defend board (DB):

President:

Member:

Mentor: