V predavanje

Geometrija ravnih krivih

Ravan je vektorski prostor $V^{2}$, u njoj je lokalni koordinatni (ortonormirani) sistem $\left\{0, \vec{i} , \vec{j}\right\}, $koordinate tačke su $x$ i $y$, odnosno, njen radijus-vektor je $\vec{r}=x\vec{i}$+y$\vec{j}$.

Prava:

Razni oblici jednačine prave

Zadati su tačka kroz koju prava prolazi radijus-vektorom $\vec{r}\_{0} $ i vektor pravca $\vec{m}.$ Za radijus-vektor proizvoljne tačke ove prave važi $\vec{r}\left(t\right)=\vec{r}\_{0}+t\vec{m}.$ Ovo je vektorski oblik jednačine prave. Kada pređemo na skalarnu varijantu ove jednačine, važiće $\vec{r}\_{0}=x\_{0}\vec{i}$+$y\_{0}\vec{j}, \vec{m}=a\vec{i}+b\vec{j}, $dobijemo:

$\vec{r}\left(t\right)=x\_{0}\vec{i}$+$y\_{0}\vec{j}+t\left(a\vec{i}+b\vec{j}\right)=\left(x\_{0}+at\right)\vec{i}+(y\_{0}+bt) \vec{j}$, ili $x\left(t\right)=x\_{0}+at, y\left(t\right)=y\_{0}+bt, $a to su parametarske jednačine prave. Ako iz njih eliminišemo parametar, dobijamo $\frac{x-x\_{0}}{a}=\frac{y-y\_{0}}{b}(=t)$, a to je jednačina preko kosinusa pravca ili kanonička jednačina prave.

Možemo, takođe, da izrazimo $y$ preko $x$ na sledeći način: $y=y\_{0}+\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}x\_{0}=\frac{b}{a}x+y\_{0}-\frac{b}{a}x\_{0},$ a to je opšti oblik jednačine prave.

Jednačina prave kroz dve tačke

$$\vec{r}\left(t\right)=\vec{OA}+t\vec{AB}=x\_{1}\vec{i}+y\_{1}\vec{j}+t\left[\left(x\_{2}-x\_{1}\right)\vec{i}+\left(y\_{2}-y\_{1}\right)\vec{j}\right]=$$

$$\left[t\left(x\_{2}-x\_{1}\right)+x\_{1}\right]\vec{i}+\left[t\left(y\_{2}-y\_{1}\right)+y\_{1}\right]\vec{j}$$

 ili $\frac{x-x\_{1}}{x\_{2}-x\_{1}}=\frac{y-y\_{1}}{y\_{2}-y\_{1}}$(=t),

što je kanonički oblik jednačine prave.

Prava može da bude zadata i pomoću svojih presečnih tačaka sa koordinatnim osama. Onda je to specijalni slučaj zadavanja prave kroz dve tačke, $M\_{2}\left(0, p\_{2}\right)$ i $M\_{1}\left(0, p\_{1}\right).$



Tada, korišćenjem prethodnog slučaja, dobijamo $x\left(t\right)=\left(1-t\right)p\_{1}, y\left(t\right)=tp\_{2}$ (vektor pravca ove prave je $\vec{M\_{1}M\_{2}}=\vec{OM\_{2}}-\vec{OM\_{1}}=p\_{2}\vec{j}-p\_{1}\vec{i}$, pa je, pošto prava prolazi kroz $M\_{2} , \vec{r}\left(t\right)=\left(1-t\right)p\_{1}\vec{i}+tp\_{2}\vec{j} ;$ $x\left(t\right)=\left(1-t\right)p\_{1};y\left(t\right)=tp\_{2}⇒t=\frac{y}{p}$ ; $x=\left(1-\frac{y}{p\_{2}}\right)p\_{1}⇒\frac{x}{p\_{1}}+\frac{y}{p\_{2}}=1,$ a ovo je segmentni oblik jednačine prave.

Takođe, jednačina prave može da se odredi i ako je zadata jedna tačka kroz koju prava prolazi i njena normala.

$\vec{n}=n\_{1}\vec{i}+n\_{2}\vec{j}$, $\vec{OP}$=$x\_{0}\vec{i}+y\_{0}\vec{j}$ (koordinate tačke $P$ koja pripada pravoj su $x\_{0} $i $y\_{0})$

$\left〈\vec{PX}, \vec{n}\right〉=0$, $\vec{PX}=\vec{OX}-\vec{OP}=\left(x-x\_{0}\right)\vec{i}+(y-y\_{0})\vec{j}$

$$\left(x-x\_{0}\right)n\_{1}+\left(y-y\_{0}\right)n\_{2}=0,$$

$$xn\_{1}+yn\_{2}=x\_{0}n\_{1}+y\_{0}n\_{2}=p⟺$$

$$\left〈\vec{r}\left(t\right),\vec{n}\right〉=p, p=\left〈\vec{OP}, \vec{n}\right〉.$$

Ovo je **normalni oblik jednačine prave.**

Sada ćemo izvesti razne formule za geometrijske probleme u ravni, koji se rešavaju korišćenjem prave. Uvek smo slobodni da biramo onaj oblik jednačine pravr u kome se posmatrani problem najjednostavnije rešava.

Odstojanje dveju tačaka

Neka su koordinate tačaka $M\_{1}\left(x\_{1},y\_{1}\right), M\_{2}\left(x\_{2},y\_{2}\right).$ Tada će za dužinu ove duži važiti

$$\left|\vec{M\_{1}M\_{2}}\right|=\left|\left(x\_{1}-x\_{2}\right)\vec{i }+\left(y\_{1}-y\_{2}\right)\vec{j}\right|=$$

$\sqrt{\left(x\_{1}-x\_{2}\right)^{2}+\left(y\_{1}-y\_{2}\right)^{2}}$.



Središte duži

Ako je $S$ središte ove duži, onda zbog osobina paralelograma važi:

$$\vec{OS}=\frac{1}{2}\left(\vec{OM\_{1}}+\vec{OM\_{2}}\right)=$$

$=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}\vec{i}+\frac{y\_{1}+y\_{2}}{2}\vec{j}$.

Odavde sledi da su koordinate središta duži

$$S\left(\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}, \frac{y\_{1}+y\_{2}}{2}\right).$$

Podela duži u datoj razmeri

Traži se tačka $M$ takva da je zadovoljeno $\frac{\left|\vec{M\_{1}M}\right|}{\left|\vec{M\_{2}M}\right|}=\frac{A}{B}.$ Ovo može biti unutrašnja ili spoljašnja podela, ali u svakom slučaju tačka koju tražimo pripada pravpj koja je određena tačkama $M\_{1}$ i $M\_{2}; $ znači, idemo iz parametarskog oblika jednačine prave kroz dve tačke: $x=\left(1-t\right)x\_{1}+tx\_{2}, y=\left(1-t\right)y\_{1}+ty\_{2} $, ili, što je isto, $\vec{OM}=\left[\left(1-t\right)x\_{1}+tx\_{2}\right]\vec{i} + \left[\left(1-t\right)y\_{1}+ty\_{2}\right]\vec{j} ;$ onda je $\vec{M\_{1}M}=\vec{OM}-\vec{OM\_{1}}=\left[\left(1-t\right)x\_{1}+tx\_{2}\right]\vec{i} + \left[\left(1-t\right)y\_{1}+ty\_{2}\right]\vec{j}-x\_{1}\vec{i}-y\_{1}\vec{j}=t\left(-x\_{1}+x\_{2}\right)\vec{i }+t\left(-y\_{1}+y\_{2}\right)\vec{j}.$

Dakle, važi $\vec{M\_{1}M}=t\vec{M\_{1}M\_{2}} $i, prema tome, $\vec{MM\_{2}}=\left(1-t\right)\vec{M\_{1}M\_{2}}.$ Pošto tražimo tačku koja vrši podelu **dužine**, važiće

$$\frac{\left|t\right|}{\left|1-t\right|}\frac{\left|\vec{M\_{1}M\_{2}}\right|}{\left|\vec{M\_{1}M\_{2}}\right| }=\frac{A}{B}.$$

1. Ako važi $0<t<1,$ onda se uzima da je $M$ unutrašnja tačka i važi

$$\frac{t}{1-t}=\frac{A}{B}⟹t=\frac{\frac{A}{B}}{1+\frac{A}{B}}.$$

 2. Ako je $t>1$ ili $t<0,$ onda je to spoljašnja tačka

 (a) $t>1⟹\frac{t}{t-1}=\frac{A}{B}⟹t=\frac{\frac{A}{B}}{\frac{A}{B}-1}.$

 (b) $t<0⟹\frac{-t}{1-t}=\frac{A}{B}⟹ t=\frac{\frac{A}{B}}{\frac{A}{B}-1}.$

Može se primetiti da je ovo potpuno isto.

Ugao između dveju pravih jeste zapravo ugao između njihovih vektora pravaca i može se odrediti pomoću vektorskog, parametarskog ili kanoničkog oblika jednačine prave. Koordinate vektora pravca dveju pravih čitaju se iy imenilaca u kanoničkom obliku njihovih jednačina.

Dve međusobno normalne prave imaju međusobno normalne vektore pravca. Normala na vektor $a\vec{i}+b\vec{j} $u ravni je jednoznačno određena svojim pravcem $b\vec{i}-a\vec{j} $ili, što je isto, njemu suprotnim pravcem $-a\vec{i}+b\vec{j}.$

**Presek dveju pravih** se nalazi iz opšteg oblika jednačine prave, rešavanjem sistema linearnih jednačina.

**Odstojanje tačke od prave**

Neka je prava data svojim parametarskim jednačinama

$$x=x\_{0}+at, y=y\_{0}+bt.$$

Neka je tačka $M $čije se odstojanje traži data koordinatama $M\left(a\_{1}, a\_{2}\right).$

Kroz tačku $M ,$ postavimo pravu koja je normalna na pravu $p.$ Parametarske jednačine ove prave su $x=a\_{1}+bt\_{1}, y=a\_{2}-at\_{1}.$ Vektor pravca ove druge prave se vidi iz koeficijenata koji stoje uz novi parametar $t\_{1}.$ Sada možemo da potražimo zajedničku tačku ovih dveju pravih, odnosno takve vrednosti $t$ i $t\_{1}$ da oba sistema budu zadovoljena:

$x\_{0}+at=a\_{1}+bt\_{1}$,

$y\_{0}+bt=a\_{2}-at\_{1},$
odakle sledi $t\_{1}=\frac{x\_{0}-a\_{1}+at}{b}=\frac{a\_{2}-y\_{0}-bt}{a}$. Odavde dobijamo jednačinu po t:

$ax\_{0}-aa\_{1}+a^{2}t$=$a\_{2}b-by\_{0}-b^{2}t. $Rešenje te jednačine je

$$t=\frac{a\_{2}b+aa\_{1}-ax\_{0}-by\_{0}}{a^{2}+b^{2}}.$$

Kada se ova vrednost parametra uvrsti u parametarsku jednačinu prave $p,$ dobijaju se koordinate tačke $M\_{1}.$ Zatim se još određuje odstojanje ovih dveju tačaka.

Ovo može biti jednostavnije ako se pređe na opšti ili kanonički oblik jednačine prave.

Koordinate tačke $M$ se dobijaju neposredno iz

$$y=\frac{b}{a}x+y\_{0}-\frac{b}{a}x\_{0}=-\frac{a}{b}x+a\_{2}+\frac{a}{b}a\_{1}$$

$$\frac{b^{2}+a^{2}}{ab}x=a\_{2}-y\_{0}+\frac{a^{2}a\_{1}+b^{2}x\_{0}}{ab}$$

$$\left(a^{2}+b^{2}\right)x=\frac{ab\left(a\_{2}-y\_{0}\right)+a^{2}a\_{2}+b^{2}x\_{0}}{a^{2}+b^{2}}.$$

Zatim se preko gornjih formula nađe $y$ i tako dalje.

Ako pređemo na normalni oblik jednačine prave, stvar može još da se pojednostavi.

Vektor $\vec{MM\_{1}} $ima pravac normale na pravu $p,$ pa onda važi

$$d\left(M, p\right)=\left〈\vec{MM\_{1}, } \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}\right〉=\frac{1}{\left|\vec{n}\right|}\left|\left〈(\vec{OM\_{1}}-\vec{OM}),\vec{n} \right〉\right|=\frac{1}{\left|\vec{n}\right|}\left|\left〈\vec{OM\_{1}},\vec{n}\right〉-\left〈\vec{OM},\vec{n}\right〉\right|.$$

Poznato je da važi $\vec{n}=-a\vec{i}+b\vec{j}, \left|\vec{n}\right|=\sqrt{a^{2}+b^{2}}, $ a tačka $M$ je element prave, pa zadovoljava jednačinu prave.