ALGEBRA ZA INFORMATIČARE(2010/11),
Prvi deo, 21. april 2011.

1. Da li je moguće dopuniti Kejlijevu tablicu

| $\star$ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | | | |
| b | | a | |
| c | | | b |

tako da $(\{a,b,c\},\star)$ bude grupa? Obrazložiti.

2. Ako je $(P,+,\cdot)$ prsten, dokazati da je $Z(P)=\{r\in P:(\forall x\in P)rx=xr\}$ (tzv. centar prstena) njegov potprsten.

**Rešenja.**

1. Pretpostavimo da se data Kejlijeva tablica može dopuniti tako da dobijemo grupu. Svaka grupa ima neutralni element. Kako je $b\star b=a$ i $c\star c=b$ sledi da $b$ i $c$ nisu neutralni elementi, dakle, sledi da je $a$ neutralni element, pa imamo

| $\star$ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | a | |
| c | c | | b |

.

Na vezbama smo pokazali da je svaka grupa kvazigrupa i da vaze zakoni kancelacije, odakle sledi da su u Kejlijevoj tablici u svakoj vrsti i svakoj koloni različiti elementi. Medjutim, kako god izabrali vrednost izraza $b\star c$ dobijamo da će se u drugoj vrsti ili trećoj koloni ponavljati elementi.

Na primer, jednačina $b\star x=c$ ima jedinstveno rešenje, a na osnovu gore dopunjene tablice dobijamo da mora biti $x=c$, ali tada važi da je $a\star c=b\star c=c$ pa na osnovu kancelacije je $a=b$, kontardikcija. Dakle, $(\{a,b,c\},\star)$ ne može biti grupa.

2. Na predavanju je pokazano da je dovoljno pokazati da $0\in Z(P)$ i $(\forall a,b\in Z(P))a-b,ab\in Z(P)$.

Kako je $0x=0=x0$ sledi da $0\in Z(P)$. Neka $a,b\in Z(P)$, pa za svako $x\in P$ važi $ax=xa$ i $bx=xb$. Tada važi $(a-b)x=ax-bx=xa-xb=x(a-b)$, pa $a-b\in Z(P)$, i $abx=axb=xab$, pa $ab\in Z(P)$.