TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2010/11), POPRAVNI KOLOKVIJUM - **Deo I**, 2. februar 2011.

Grupa P.Djapić

1. Da li postoji iskazna formula F takva da važi $(F \Rightarrow (p \vee \neg q)) \sim (F \vee (q \vee \neg r))$? Ako postoji takva iskazna formula dati jedan primer.

2. Da li je valjana formula: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge \neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)(R(x,y) \wedge \neg R(x,z))$.

Rešenja.

1. *Prvo rešenje:* Formula $p \vee \neg q$ je netačna za valuaciju $v(p) = \perp$, $v(q) = \top$ i proizvoljno $v(r)$, pa ako uzmemo da je formula F netačna samo za te dve valuacije slediće da su formule $F \Rightarrow (p \vee \neg q)$ i $F \vee (q \vee \neg r)$ tautologije, odakle sledi da su te dve formule tautološki ekvivalentne. Za iskaznu formulu F možemo uzeti $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$.

   Drugo rešenje: Neka je
   $A \equiv p \vee \neg q$,
   $B \equiv F \Rightarrow (p \vee \neg q)$,
   $C \equiv (q \vee \neg r)$,
   $D \equiv F \vee (q \vee \neg r)$,
   $E \equiv B \Leftrightarrow D$. Tada je:

p	q	r	A	B	C	D	E	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\perp}$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\perp}$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	F	F	$\underline{\top}$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\perp}$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\neg F$	$\top$	$\top$	$\neg F$	$\underline{\perp}$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\neg F$	$\top$	$\top$	$\neg F$	$\underline{\perp}$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	F	F	$\underline{\top}$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\perp}$

   Da bi formula E bila tautologija za izbor formule F postoji 2^4 do na ekvivalenciju mogućnosti. Jedno rešenje za formulu F u KDF obliku bi bilo $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ čija funkcija odgovara koloni F u tabeli sa podvučenim simbolima. Ovako izabrana formula je jedno rešenje za F.

2.
   - $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$ je tačna u interpretaciji u kojoj relacija $\overline{R}$ ima osobinu da postoji elemenat a koji je u relaciji sa svim elementima domena (u tablici relacije $\overline{R}$ postoji vrsta u kojoj sva polja imaju vrednost $\top$);
   - $(\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge \neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$ je tačna u interpretaciji u kojoj relacija $\overline{R}$ ima osobinu da postoje različiti elementi a i b iz domena takvi da $(a,b),(b,a) \notin \overline{R}$ (u tablici relacije $\overline{R}$ postoje dva polja van dijagonale koja su simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu i imaju vrednost $\perp$).
   - $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(R(x,y) \wedge \neg R(x,z))$ je tačna u interpretaciji u kojoj relacija $\overline{R}$ ima osobinu da za svaki elemenat a iz domena postoje elementi b i c iz domena takvi da $(a,b) \in \overline{R}$ i $(a,c) \notin \overline{R}$ (u tablici relacije $\overline{R}$ u svakoj vrsti postoji polje sa vrednosti $\top$ i polje sa $\perp$);

   Tada je $(\{a,b,c\}, \overline{R})$ traženi kontra model gde je $\overline{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$

   $\left(\begin{array}{c|ccc} \overline{R} & \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \hline \text{a} & \top & \top & \top \\ \text{b} & \top & \top & \perp \\ \text{c} & \top & \perp & \top \end{array} \right)$, zato što je prva formula tačna jer prva vrta svuda ima vrednost $\top$, druga formula je tačna jer postoje dva $\perp$ koja su postavljena simetrično u odnosu na glavnu dijagonalu, i treća formula nije tačna jer u prvoj vrsti ne postoji $\perp$.

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2010/11), POPRAVNI KOLOKVIJUM - **Deo II**, 2. februar 2011.

Grupa P.Djapić

1. Neka je ρ relacija na skupu A takva da je $\rho = (\rho \circ \rho^{-1}) \cup \triangle_A$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

2. Funkcije $g : R \to R^+$ i $h : R^+ \to R^+$ (R^+ je skup pozitivnih realnih brojeva) date su sa $g(x) = e^{-x}$ i $h(x) = \frac{1}{x}$. Da li je $h \circ g : R \to R^+$ bijekcija?

Rešenja.

1. Pokažimo da je ρ relacija ekvivalencije.

   R: Kako je $\triangle \subseteq (\rho \circ \rho^{-1}) \cup \triangle = \rho$ sledi da je ρ refleksivna relacija.

   S: $\rho^{-1} = ((\rho \circ \rho^{-1}) \cup \triangle)^{-1} = (\rho \circ \rho^{-1})^{-1} \cup \triangle^{-1} = ((\rho^{-1})^{-1} \circ \rho^{-1}) \cup \triangle = (\rho \circ \rho^{-1}) \cup \triangle = \rho$, odakle sledi da je ρ simetrična relacija.

   T: Iz simetričnosti relacije ρ ($\rho = \rho^{-1}$) sledi da je $\rho \circ \rho = \rho \circ \rho^{-1} \subseteq (\rho \circ \rho^{-1}) \cup \triangle = \rho$, odakle sledi da je ρ tranzitivna relacija.

2. Pogledati kako smo na vežbama pokazali da su funkcije f i g bijekcije, a kako znamo da je kompozicija funkcija koje su bijekcije ponovo bijekcija sledi da je $h \circ g$ bijekcija.