ALGERBA(2003/04) KOLOKVIJUM-OKTOBAR

A-GRUPA

1. Dokazati matematičkom indukcijom da je broj $3^{2n} - 2^{2n}$ deljiv sa 5.

2. Odrediti iskaznu formulu tautološki ekvivalentnu sa $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$, koja je u obliku kanonske disjunktivne forme.

3. Da li je $\quad p \vee q \vee r \models r \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow ((p \Rightarrow q(\Rightarrow q))$ ?

B-GRUPA

1. Dokazati matematičkom indukcijom da je broj $5^{2n} - 13^n$ deljiv sa 3.

2. Odrediti iskaznu formulu tautološki ekvivalentnu sa $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$, koja je u obliku kanonske konjunktivne forme.

3. Da li je $\quad \neg p \Leftrightarrow q,\, p \vee r \models p \Rightarrow q \vee r$ ?

ALGERBA(2003/04) KOLOKVIJUM-NOVEMBAR
(PREDIKATSKI RAČUN), 29.11.2003.

A-GRUPA

1. Dokazati po definiciji da je sledeća formula valjana:
$(\exists x)(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \Rightarrow (\exists x)(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana:
$(\forall x)\neg R(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)\neg(R(x,y) \wedge R(y,x))$.

3. Dokazati da sledeća formula nije valjana:
$(\exists x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)\neg R(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow R(x,y))$.

B-GRUPA

1. Dokazati po definiciji da je sledeća formula valjana:
$(\forall x)(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \Rightarrow (\forall x)(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana:
$(\exists x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \Rightarrow R(z,x)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x,y)$.

3. Dokazati da sledeća formula nije valjana:
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\exists x)(\forall y)R(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)(y \neq z \wedge R(x,y) \wedge R(x,z))$.

ALGERBA(2003/04) KOLOKVIJUM III-JANUAR, 29.12.2003.

GRUPA A

1. Dati su skupovi $A$ i $B$, koji su podskupovi univerzalnog skupa $U$. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $B \setminus X = A$.

2. Pronaći sve relacije poretka na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$.

3. Data je funkcija $f : A \to B$. Dokazati da je funkcija $f$ injekcija ako i samo ako za svaki skup $X \subseteq A$ važi $X = f^{-1}(f(X))$.

GRUPA B

1. Dati su skupovi $A$ i $B$, koji su podskupovi univerzalnog skupa $U$. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $X \setminus B = A$.

2. Pronaći sve relacije ekvivalencije na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$.

3. Data je funkcija $f : A \to B$. Dokazati da je funkcija $f$ sirjekcija ako i samo ako za svaki skup $Y \subseteq B$ važi $Y = f(f^{-1}(Y))$.

ALGERBA(2003/04) POPRAVNI KOLOKVIJUM-JANUAR, 13.januar 2004.

DEO I

1. Da li je iskazna formula $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow t) \Rightarrow ((r \vee \neg t) \Rightarrow q)$ tautologija?

2. Dokazati da za iskaznu formulu $p \wedge q$ ne postoji tautološki ekvivalentna formula $F(p, q)$ u kojoj je jedini veznik $\Rightarrow$.

DEO II

1. Pronaći model za sledeći skup formula: $(\forall x)R(x, x)$, $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x, y) \Rightarrow R(x, z) \wedge R(y, z))$, $(\exists x)(\exists y)\neg R(x, y)$, $(\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge R(x, y))$.

2. Dokazati da je formula valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(y, x) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x, y)$.

DREO III

1. Dokazati da je $A \cap B = \emptyset$ ako i samo ako je $A \cup B = A \triangle B$.

2. Neka je $f : A \to B$ injektivno preslokavanje. Dokazati da za sve podskupove $X$ i $Y$ iz $A$ važi: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

ALGERBA(2003/04) KOLOKVIJUM-MART, 24. mart 2004.

## GRUPA F

1. Neka je dat grupoid:

|   | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | c | b | a | d |
| b | c | d | a | d |
| c | a | b | c | d |
| d | c | b | a | d |

   a) Pronaći sve desne nule, leve nule, desne neutralne i leve neutralne elemente.
   b) Pronaći sve kongruencije i podgrupoide datog grupoida.
   c) Da li je dati grupoid kancelativan? Obrazložiti.

2. Neka je $S$ polugrupa takva da za sve $x, y \in S$ važi $xyx = x$. Dokazati da je $S$ idempotentna polugrupa.

3. Neka je $H = \{3x \mid x \in Z\}$. Dokazati da je $H$ normalna podgrupa grupe $Z$. Dokazati da je $Z/H$ komutativna grupa.

## GRUPA G

1. Neka je dat grupoid:

|   | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | d | d | d | a |
| b | b | c | b | b |
| c | c | c | c | c |
| d | a | a | a | d |

   a) Pronaći sve desne nule, leve nule, desne neutralne i leve neutralne elemente.
   b) Pronaći sve kongruencije i podgrupoide datog grupoida.
   c) Da li je dati grupoid kancelativan? Obrazložiti.

2. Neka je $S$ polugrupa takva da za sve $x, y \in S$ važi $xyx = x$ i $xx = x$. Dokazati da u $S$ za sve $x, y \in S$ važi: $xy = yx \Rightarrow x = y$.

3. Neka je $H = \{4x \mid x \in Z\}$. Dokazati da je $H$ normalna podgrupa grupe $Z$. Da li je $Z/H$ idempotentna grupa? Obrazložiti.

ALGERBA(2003/04) KOLOKVIJUM-APRIL, april 2004.

1. Neka su $(R, +, \cdot)$ i $(T, +, \cdot)$ dva prstena, $h : R \to T$ homomorfizam prstena koji je sirjekcija, i neka su $I$ i $J$ ideali prstena $R$. Ako $r \in T$, $i \in I$, $j \in J$, tada važi $r \cdot h(i+j) \in h(I+J)$. Dokazati.

2. Dokazati da je $P = (\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}, +, \cdot)$ integralni domen, gde su $+$ i $\cdot$ uobičajne operacije sabiranja i množenja.

3. Neka je $V$ skup uredjenih parova prirodnih brojeva: $V = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$. Dokazati da $V$ nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x, y) + (z, t) = (x, t)$ i $k(x, y) = (kx, ky)$.

ALGERBA(2003/04) KOLOKVIJUM-MAJ, 31. maj 2004.

GRUPA E

1. Odrediti prost broj $p$ ako se zna da je $5p^2 + 1$ prost.

2. Odrediti parametre $a$ i $b$ tako da polinom $x^3 - x^2 + ax + b$ bude deljiv sa $x^2 + ax - 1$.

3. Izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

GRUPA F

1. Odrediti prost broj $p$ ako se zna da je $2p^2 + 1$ prost.

2. Odrediti parametre $a$ i $b$ tako da polinom $x^3 - 2x^2 + ax + b$ bude deljiv sa $x^2 + ax - 2$.

3. Izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}$.