ALGERBA I(2004/05) KOLOKVIJUM-NOVEMBAR

GRUPA A

1. Dokazati matematičkom indukcijom da je broj $3^{6n+3} + 2^{6n+3}$ deljiv sa 7.

2. Odrediti iskaznu formulu $F(p,q,r)$ takvu da formula $(F \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$ bude tautologija.

3. Pronaći iskaznu formulu tautološki ekvivalentnu sa iskaznom formulom $(\neg p \vee r) \wedge q$, sa osobinom da su jedini logički veznici koji se u njoj javljaju znaci $\neg$ i $\Rightarrow$.

GRUPA B

1. Dokazati matematičkom indukcijom da je broj $3^{4n+2} + 9^{4n+2}$ deljiv sa 5.

2. Odrediti iskaznu formulu $F(p,q,r)$ takvu da formula $(F \Leftrightarrow (q \vee r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$ bude tautologija.

3. Pronaći iskaznu formulu tautološki ekvivalentnu sa iskaznom formulom $(\neg r \wedge q) \Rightarrow p$, sa osobinom da su jedini logički veznici koji se u njoj javljaju znaci $\neg$ i $\vee$.

ALGERBA I(2004/05) KOLOKVIJUM-DECEMBAR, 03. decembar 2004.

GRUPA A

1. Dokazati da sledeća formula nije valjana: $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(x,y)$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)R(x,x)$.

GRUPA B

1. Dokazati da sledeća formula nije valjana: $(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R(x,y)$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x,y)$.

GRUPA C

1. Dokazati da sledeća formula nije valjana: $(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x,y)$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow R(y,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(y,x)$.

GRUPA D

1. Dokazati da sledeća formula nije valjana: $(\forall x)R(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow R(y,z)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R(x,y)$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\exists x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \Rightarrow R(x,z) \wedge R(z,y)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x,y)$.

GRUPA E

1. Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow R(y,z)) \Rightarrow ((\forall x)(\forall y)R(x,y)$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\forall x)R(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow R(y,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$.

GRUPA F

1. Dokazati da sledeća formula nije valjana: $(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R(x,y)$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow R(y,z)) \Rightarrow (\forall x)R(x,x)$.

ALGERBA I(2004/05) KOLOKVIJUM III-JANUAR, 14.01.2005.

GRUPA A,

1. Neka su A, B, C i D, i neka je $C \subseteq A$, $B \subseteq D$ i $A \times B \cup C \times D = B \times C$. Dokazati da je $A = B = C = D$.

2. Dokazati da za proizvoljne relacije ρ, σ i θ na A važi: (1) $\rho \subseteq \sigma$ ako i samo ako $\overline{\sigma} \subseteq \overline{\rho}$; (2) $\overline{(\rho \circ \sigma) \cap (\theta \circ \sigma)} \subseteq \overline{(\rho \cap \theta) \circ \sigma}$.

3. Data je funkcija $f : A \to B$. Dokazati da je funkcija f sirjekcija ako i samo ako za svaki skup $Y \subseteq B$ važi $Y = f(f^{-1}(Y))$.

GRUPA B

1. Neka su A, B, C i D, i neka je $B \subseteq D$, $A \subseteq C$ i $A \times B \cup C \times D = B \times A$. Dokazati da je $A = B = C = D$.

2. Dokazati da za proizvoljne relacije ρ, σ i θ na A važi: (1) $\rho \subseteq \sigma$ ako i samo ako $\overline{\sigma} \subseteq \overline{\rho}$; (2) $\overline{(\rho \circ \theta) \cap (\rho \circ \sigma)} \subseteq \overline{\rho \circ (\theta \cap \sigma)}$.

3. Data je funkcija $f : A \to B$. Dokazati da je funkcija f injekcija ako i samo ako za svaki skup $X \subseteq A$ važi $f(A \setminus X) \subseteq B \setminus f(X)$.

GRUPA C

1. Neka su A, B, C i D, i neka je $A \subseteq C$, $D \subseteq B$ i $A \times B \cup C \times D = D \times A$. Dokazati da je $A = B = C = D$.

2. Dokazati da za proizvoljne relacije ρ, σ i θ na A važi: (1) $\rho \subseteq \sigma$ ako i samo ako $\overline{\sigma} \subseteq \overline{\rho}$; (2) $\overline{(\rho \cup \theta) \circ \sigma} \subseteq \overline{(\rho \circ \sigma) \cup (\theta \circ \sigma)}$.

3. Data je funkcija $f : A \to B$. Dokazati da je funkcija f sirjekcija ako i samo ako za svaki skup $X \subseteq A$ važi $B \setminus f(X) \subseteq f(A \setminus X)$.

ALGERBA I(2004/05) KOLOKVIJUM-APRIL, 23. april 2005.

1. Navesti primere grupoida reda 3 koji:
   a) sadrži levi neutralni elemenat;
   b) nije asocijativan;
   c) je komutativan;
   d) sadrzi tačno dve desne nule;
   e) sadrži tačno dve leve nule i jedan desni neutralni elemenat.

2. Neka je grupa G reda p, gde je p prost broj. Neka je f preslikavanje datog grupoida u samog sebe definisan na sledeći način: $f(a) = a^n$. Dokazati da je G ciklička grupa i da je f automorfizam.

3. Neka je R prsten i I ideal u R. Za $a \in R$, $i \in I$, dokazati da je $(a + i)(a + i) - a^2 \in I$.

4. Pokazati da podskup $W = \{(x, y, z) \mid x + y^2 + z^3 > 4\}$ ne odredjuje potprostor realnog prostora R^3.

ALGERBA I(2004/05) KOLOKVIJUM-MAJ, 01. jun 2005.

1. Odrediti ostatak pri deljenju broja 555^{999} sa 11.

2. Odrediti koeficijente a, b i c, tako da polinom $p(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + 1$ bude deljiv sa $(x-1)^2(x+1)$.

3. Izračunati determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & \mathrm{n} & \mathrm{n} \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & \mathrm{n+2} & \mathrm{n+1} \end{vmatrix}$.