ALGEBRA I (2006/07)

ALGEBRA I(2006/07), KOLOKVIJUM I-NOVEMBAR, 19. novembar 2006.

GRUPA I

Obavezni:

1. Da li je tautologija: $(p \Leftrightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow p \vee (r \Rightarrow z)$
2. Pronaći KKF i KDF za $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow z$.
3. Pokazati da je formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)R(x,y,z) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)R(y,z,x)$

Poželjni:

4. Da li postoji formula $A(p,q,r)$, takva da je formula $A \Rightarrow p$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee q$, a $A \Leftrightarrow q$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee r$?
5. Da li je: $$r \Leftrightarrow p \wedge q,\ (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow q \models r \vee p \Rightarrow (q \Rightarrow r \wedge p).$$
6. Pokazati da formula nije valjana: $(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\exists y)\neg R(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

GRUPA II

Obavezni:

1. Da li je tautologija: $(p \Leftrightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \vee q$
2. Pronaći KKF i KDF za $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$.
3. Pokazati da je formula valjana: $(\exists x)(\exists y)(\exists z)R(x,y,z) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)(\exists z)R(y,z,x)$

Poželjni:

4. Da li postoji formula $A(p,q,r)$, takva da je formula $A \Rightarrow q$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee q$, a $A \Leftrightarrow p$ tautološki ekvivalentna sa $q \vee r$?
5. Da li je: $$r \Leftrightarrow p \wedge q,\ r \Leftrightarrow p,\ q \models r \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r \wedge p).$$
6. Pokazati da formula nije valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)\neg R(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

ALGEBRA I(2006/07), KOLOKVIJUM II-DECEMBAR, 23. decembar 2006.

GRUPA I

Obavezni:

1. Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

2. Data je relacija $\rho = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

   a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

   b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

   c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

   d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

3. Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

   a) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3), (d, 4), (e, 5), (c, 2)\}$.

   b) $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ $f_2 = \{(a, 3), (b, 4)\}$.

   c) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1\}$, $f_3 = \{(a, 1), (b, 1)\}$.

   Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

4. Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (5, 4), (6, 6)\}$ i $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 1), (5, 6), (6, 4)\}$.

   a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

   b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

   c) Odrediti $g(\{1, 2, 3\})$ i $f^{-1}(\{1, 2, 6\})$.

Poželjni:

5. Neka su A, B i C neprazni skupovi, takvi da važi $(A \times B) \cup (B \times C) = C \times A$ i $A \times B \subseteq B \times C$. Dokazati da je $A = B = C$.

6. Ako su R_1 i R_2 relacije poretka, dokazati da je $R_1 \cap R_2^{-1}$ relacija poretka.

7. Data je funkcija $f : A \to B$. Ako je $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$, dokazati da je $f^{-1}(Y) \cup X \subseteq f^{-1}(Y \cup f(X))$.

ALGEBRA I(2006/07), KOLOKVIJUM II-DECEMBAR, 23. decembar 2006.

GRUPA II

Obavezni:

1. Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

2. Data je relacija $\rho = \{(1,3), (3,4), (4,1), (2,2)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

   a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

   b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

   c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

   d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

3. Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

   a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1\}$, $f_1 = \{(a, 1), (c, 1)\}$.

   b) $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_2 = \{(a, 3), (b, 2)\}$.

   c) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f_3 = \{(a, 1), (b, 4), (c, 2), (d, 4), (e, 5), (d, 2)\}$.

   Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

4. Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 2), (5, 4), (6, 6)\}$ i $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6), (4, 5), (5, 1), (6, 4)\}$.

   a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

   b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

   c) Odrediti $g(\{1, 2, 3\})$ i $f^{-1}(\{1, 2, 6\})$.

Poželjni:

5. Neka su A, B i C neprazni skupovi, takvi da važi $(C \times B) \cup (B \times A) = A \times C$ i $B \times C \subseteq A \times B$. Dokazati da je $A = B = C$.

6. Ako su R_1 i R_2 relacije poretka, dokazati da je $(R_1 \cap R_2)^{-1}$ relacija poretka.

7. Data je funkcija $f : A \to B$. Ako je $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$, dokazati da je $f(f^{-1}(Y) \cup X) \subseteq Y \cup f(X)$.

ALGEBRA I(2006/07), KOLOKVIJUM III-JANUAR, 18. januar 2007.

GRUPA I

Obavezni:

1. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

$x+y-z-t=2,$

$3x+4y-2z+2t=7,$

$2x-3y-3z+2t=-1,$

$2x-y+z+3t=1.$

2. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

3. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Poželjni:

4. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & \dots & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix}.$

5. U zavisnosti od parametra a diskutovati i rešiti sistem:

$4x+8y+(a+3)z=-2,$

$(a+2)x+6y+3z=1,$

$x+2ay+az=-1.$

6. Rešiti matričnu jednačinu:

$$\left(\begin{bmatrix} 7 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 10 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

.

ALGEBRA I(2006/07), KOLOKVIJUM III-JANUAR, 18. januar 2007.

GRUPA II

Obavezni:

1. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

   $x + y - z + t = 0,$

   $2x + 3y - 2z + 2t = -1,$

   $3x + 2y - 3z - t = 1,$

   $3x - 2y + 2z - 3t = 5.$

2. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

3. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Poželjni:

4. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$

5. U zavisnosti od parametra a diskutovati i rešiti sistem:

   $x + (a+2)y - z = 0,$

   $(a+2)x + y - z = 1,$

   $x + y - (a+2)z = m + 3.$

6. Rešiti matričnu jednačinu:

$$\left(\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

.

ALGEBRA I(2006/07), POPRAVNI KOLOKVIJUM-FEBRUAR, 12. februar 2007.

I deo:

1. Da li je tautologija: $(r \Rightarrow p) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow q \vee (r \Rightarrow p)$

2. Pronaći KKF i KDF za $r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

3. Pokazati da je formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)R(x,y,z) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)R(y,z,x)$

<u>II deo:</u>

4. Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

5. Data je relacija $\rho = \{(1,2),(2,4),(4,1),(2,2),(3,3)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

   a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

   b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

   c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

   d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6. Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

   a) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2\}$, $f_1 = \{(a,1),(c,2)\}$.

   b) $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f_2 = \{(a,2),(b,2)\}$.

   c) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $f_3 = \{(a,1),(b,4),(c,2),(d,4),(e,5),(b,2),(d,2)\}$.

   Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7. Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,4),(2,4),(3,3),(4,2),(5,4),(6,6)\}$ i $g = \{(1,2),(2,3),(3,6),(4,5),(5,1),(6,4)\}$.

   a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

   b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

   c) Odrediti $g(\{1,2,3\})$ i $f^{-1}(\{1,4,6\})$.

<u>III deo:</u>

8. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

   $x + y - z - t = 3,$

   $2x + 3y - 3z + 2t = 8,$

   $3x - 3y - 3z + 2t = -3,$

   $2x - y + z + 3t = 0.$

9. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

10. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ALGEBRA II(2006/07), KOLOKVIJUM I-MAJ, 12. maj 2007.

GRUPA A

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	c	c	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	b
d	d	b	c	a

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbb{Z}\backslash\{2007\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 3x - 6y - 9$.

2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?

Poželjni:

6. Neka je G konačna grupa. Dokazati da elementi ab i $a^{-1}b^{-1}$ imaju isti red. (5 *poena*)

7. a) Neka je f homomorfizam prstena R u njega samog. Dokazati da je podskup $S = \{x \in R | f(f(x)) = x\}$ potprsten u R. (2 *poena*)
   b) Neka je L potprsten prstena R. Ako L ima jedinični element, a R nema jediniči element tada R ima delitelje nule. Dokazati. (3 *poena*)

8. Neka je V skup uredjenih parova realnih brojeva: $V = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R\}$. Dokazati da V nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x, y) + (z, t) = (y + t, x + z)$ i $k(x, y) = (kx, ky)$.

GRUPA B

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	a	a	c
c	b	a	d	c
d	d	b	c	d

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbb{Z}\backslash\{2007\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 9x - 3y - 6$.

2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?

Poželjni:

6. Neka je G konačna grupa. Dokazati da elementi $a^{-1}b$ i ab^{-1} imaju isti red. (5 *poena*)

7. a) Neka je f homomorfizam prstena R u njega samog. Dokazati da je podskup $S = \{x \in R | f(f(x)) = f(x)\}$ potprsten u R. (2 *poena*)
b) Neka je L potprsten prstena R. Ako L ima jedinični element, a R nema jediniči element tada R ima delitelje nule. Dokazati. (3 *poena*)

8. Neka je V skup uredjenih parova realnih brojeva: $V = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R\}$. Dokazati da V nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$ i $k(x, y) = (ky, kx)$.

ALGEBRA II - drugi kolokvijum, 06. jun 2007.

-GRUPA A-

Obavezni:

1. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2007^{201} sa 7

2. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $33x - 51y = 12$.

3. Ako je $z = 3\sqrt{3} + 9i$, odrediti z^{201}.

4. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ i $x^2 - x - 2$.

Poželjni:

5. Dokazati da je $3^{3n+2} - (2^{3n+2})^4$ deljivo sa 13, za svaki prirodan broj n.

6. Dokazati da skup $A = \{x | x \in \mathbb{Q},\ x > 0,\ x^2 < 3\}$ nema najveći element u $\mathbb{Q}$.

7. Odrediti koeficijente a i b, tako da polinom $p(x) = ax^n + bx^{n+1} + (-2)^n$ bude deljiv sa $(x + 2)^2$ (gde je $n \in \mathbb{N}$).

-GRUPA B-

Obavezni:

1. Odrediti ostatak pri deljenju broja 201^{2007} sa 7

2. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $34x - 30y = 12$.

3. Ako je $z = 9 + 3\sqrt{3}i$, odrediti z^{180}.

4. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ i $x^2 + x - 2$.

Poželjni:

5. Dokazati da je $3^{5n+2} - (2^{5n+3})^2$ deljivo sa 11, za svaki prirodan broj n.

6. Dokazati da skup $A = \{x | x \in \mathbb{Q},\ x > 0,\ x^2 > 3\}$ nema najmanji element u $\mathbb{Q}$.

7. Odrediti koeficijente a i b, tako da polinom $p(x) = ax^n - bx^{n-1} + 2^{n-2}$ bude deljiv sa $(x-2)^2$ (gde je $n \in \mathbb{N}$).

ALGEBRA II - popavni kolokvijum, 28. jun 2007.

G_1	a	b	c	d
a	a	b	b	a
b	b	d	a	c
c	b	a	d	c
d	d	b	c	d

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbb{Z} \setminus \{2007\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 10x - 5y - 3$.

2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?

6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 7002^{7002} sa 7

7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $26x - 34y = 12$.

8. Ako je $z = 4\sqrt{3} + 12i$, odrediti z^{210}.

9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 - 2x^2 + 1$ i $x^2 - x - 2$.