ALGEBRA I(2007/08), KOLOKVIJUM
I-NOVEMBAR, 25. novembar 2007.

GRUPA I

Obavezni:

1. Da li je tautologija: $(p \Leftrightarrow r) \wedge (r \Leftrightarrow q) \Rightarrow p \vee (r \Rightarrow q)$
2. Pronaći KKF i KDF za $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$.
3. Pronaći jedan primere interpretacije i valuacije za koju će formula: $(\forall x)(R_1^2(x, a_1) \wedge (R_2^2(y, f_1^2(a_2, x)))$ biti a) tačna; b) netačna.

Poželjni:

4. Da li postoji formula $A(p, q, r)$, takva da je formula $(A \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r)$ tautologija? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji A.)
5. Dokazati matematičkom indukcijom da za iskaznu formulu $p \Rightarrow q$ ne postoji tautološki ekvivalentna formula $F(p, q)$ u kojoj su jedini iskazni veznici $\wedge$.
6. Pokazati da je valjana formula: $(\forall x)(\exists y)R(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \Rightarrow R(y, x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)) \Rightarrow (\forall x)R(x, x)$.

ALGEBRA I(2007/08), KOLOKVIJUM
I-NOVEMBAR, 25. novembar 2007.

GRUPA II

Obavezni:

1. Da li je tautologija: $(p \Leftrightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r) \vee q$
2. Pronaći KKF i KDF za $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow r$.
3. Pronaći jedan primere interpretacije i valuacije za koju će formula: $(\exists x)(R_1^2(x, a_1) \vee (R_2^2(y, f_1^2(a_2, x)))$ biti a) tačna; b) netačna.

Poželjni:

4. Da li postoji formula $A(p, q, r)$, takva da je formula $(r \Rightarrow A) \Rightarrow (p \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (\neg r \vee q))$ tautologija? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji A.)
5. Dokazati matematičkom indukcijom da za iskaznu formulu $p \vee q$ ne postoji tautološki ekvivalentna formula $F(p, q)$ u kojoj su jedini iskazni veznici $\wedge$.
6. Pokazati da formula nije valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)) \Rightarrow (\forall x)R(x, x)$.

ALGEBRA I(2007/08), KOLOKVIJUM II-DECEMBAR, 23. decembar 2007.

GRUPA I Prezime i ime:________________________
br.ind.:_______

Obavezni:

1 Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus ((A \cap C) \cup (B \cap C))$.

2 Data je relacija $\rho = \{(1, 1), (1, 4), (4, 3), (3, 1), (2, 2)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

3 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ $f_2 = \{(a, 3), (b, 4)\}$.

b) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3), (d, 4), (e, 5)\}$.

c) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $f_3 = \{(a, 1), (b, 1)\}$. Okreni list! Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

4 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 6), (4, 3), (5, 1), (6, 6)\}$ i $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (5, 6), (6, 4)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g(\{1, 2, 4\})$ i $f^{-1}(\{1, 2, 4\})$.

Poželjni:

5 Dati su skupovi A i B, koji su podskupovi univerzalnog skupa U. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $A \triangle X = B \setminus X$.

6 Neka su ρ i σ relacije ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $\rho \circ \sigma$ relacija ekvivalencije akko je $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

7 Dokazati: Iz $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, $A_3 \sim B_3$ sledi $(A_1 \times A_2) \times A_3 \sim B_1 \times (B_2 \times B_3)$.

ALGEBRA I(2007/08), KOLOKVIJUM II-DECEMBAR, 23. decembar 2007.

GRUPA II Prezime i ime:________________________
br.ind.:_______

Obavezni:

1 Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus B) \cup (C \setminus A)$.

2 Data je relacija $\rho = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

3 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 5), (d, 4), (e, 5), (a, 2)\}$.

b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_2 = \{(c, 1), (a, 4), (b, 3)\}$.

c) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $f_3 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$. Okreni list! Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

4 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $f = \{(1, 4), (2, 1), (3, 6), (4, 1), (5, 4), (6, 3)\}$ i $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 1), (5, 6), (6, 4)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g(\{1, 2, 3\})$ i $f^{-1}(\{1, 2, 6\})$.

Poželjni:

5 Dati su skupovi A i B, koji su podskupovi univerzalnog skupa U. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $X \setminus A = B \triangle X$.

6 Neka su ρ i σ relacije ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $\sigma \circ \rho$ relacija ekvivalencije akko je $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

7 Dokazati: Iz $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, $A_3 \sim B_3$ sledi $(A_1 \times A_2) \times A_3 \sim B_3 \times (B_1 \times B_2)$.

ALGEBRA I(2007/08), KOLOKVIJUM III, 17. januar 2008.

GRUPA I Prezime i ime:______________________ br.ind.:_______

Obavezni:

1. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

$x - y + 2z + t = -1,$

$2x - y + 2z - t = 0,$

$3x - 2y - 3z + 2t = 6,$

$3x + 2y + 2z - 3t = 1.$

2. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

3. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 10 & 10 \end{bmatrix}$

Poželjni:

4. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 9 & 2 \end{vmatrix}.$

5. U zavisnosti od parametra a diskutovati i rešiti sistem:

$x + (a+2)y - z = 0,$

$(a+2)x + y - z = 1,$

$x + y - (a+2)z = a+3.$

6. Rešiti matričnu jednačinu:

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 10 & 12 \\ 4 & 9 & 21 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

ALGEBRA I(2007/08), KOLOKVIJUM III, 17. januar 2008.

GRUPA II Prezime i ime:______________________ br.ind.:_______

Obavezni:

1. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

$x - y + 2z + t = 1,$

$2x - y + 2z - t = 0,$

$2x - 2y - 3z + 3t = -5,$

$3x + 2y + 2z - 3t = -1.$

2. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 12 \\ 4 & 9 & 19 \end{bmatrix}$

Poželjni:

4. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \end{vmatrix}.$

5. U zavisnosti od parametra a diskutovati i rešiti sistem:

$x - y - az = 1,$

$ax + 3y + 3z = -1,$

$ax + y + az = 1 - a.$

6. Rešiti matričnu jednačinu:

$$X \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 3 & 10 & 12 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

ALGEBRA I(2006/07), POPRAVNI KOLOKVIJUM-FEBRUAR, 11. februar 2008.

I deo:

1. Da li je tautologija: $(r \Rightarrow p) \vee (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow q \wedge (r \Rightarrow p)$
2. Pronaći KKF i KDF za $r \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.
3. Pronaći interpretaciju i valuaciju za koju je formula: $(\forall x)(\neg R(x, f(y)) \vee R(f(x), y))$
a) tačna,
b) netačna.

II deo:

4. Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
5. Data je relacija $\rho = \{(1,2), (2,3), (3,1), (2,2), (4,4)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

   a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

   b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

   c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

   d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6. Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

   a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $f_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$.

   b) $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_2 = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3)\}$.

   c) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f_3 = \{(a, 1), (b, 4), (c, 2), (d, 4)\}$.

   Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7. Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $f = \{(1,4), (2,4), (3,3), (4,2), (5,3), (6,6)\}$ i $g = \{(1,2), (2,3), (3,6), (4,5), (5,1), (6,2)\}$.

   a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

   b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

   c) Odrediti $g(\{1, 2, 3\})$ i $f^{-1}(\{4, 5, 6\})$.

III deo:

8. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

   $x + y - z - t = 0,$

   $2x + 3y - 3z + 2t = 4,$

   $3x - 3y - 3z + 2t = -1,$

   $2x - y + z + 3t = 5.$

9. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

10. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ALGEBRA II(2007/08), KOLOKVIJUM I-MAJ, GRUPA A

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	a	c	a
b	c	d	a	b
c	b	a	b	d
d	d	b	c	a

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\setminus\{2008\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 3x - 6y - 12$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.
3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.
4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?
5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?

Poželjni:

α. Dokazati da je unija dve podgrupe podgrupa ako i samo ako je jedna sadržana u drugoj.

β. Dokazati da konačno polje reda 27 ima karakteristiku 3.

γ. Neka je V skup uredjenih parova realnih brojeva: $V = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R\}$. Dokazati da V nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x, y) + (z, t) = (x + t, y + z)$ i $k(x, y) = (kx, ky)$.

ALGEBRA II(2007/08), KOLOKVIJUM I-MAJ, GRUPA B

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	a	a	c
c	b	d	d	c
d	d	b	c	a

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\setminus\{2008\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 9x - 3y - 9$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.
3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.
4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?
5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?

Poželjni:

α. Dokazati da je N normalna podgrupa grupe G ako i samo ako za svako $x \in G$ i svako $n \in N$ važi $x^{-1}nx \in N$.

β. Dokazati da konačno polje reda 32 ima karakteristiku 2.

γ. Neka je V skup uredjenih parova realnih brojeva: $V = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R\}$. Dokazati da V nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$ i $k(x, y) = (ky, 0)$.

ALGEBRA II - drugi kolokvijum, 08. jun 2008.

-GRUPA A- Algebra 2 (08. jun 2008.)

Obavezni:

6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2008^{201} sa 13
7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $33x - 54y = 9$.
8. Ako je $z = 18 - 6\sqrt{3}i$, odrediti z^{202}.
9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ i $x^2 - x + 1$.

Poželjni:

1. Dokazati da je u algebarskoj strukturi $(N, +, \cdot)$, za sve x, y, z ispunjeno $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
2. Dokazati da je dvanaestocifren broj $\overline{abcdefghijkl}$ deljiv sa 13 ako i samo ako je $\overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi} - \overline{jkl}$ deljiv sa 13.
3. Odrediti sve polinome trećeg stepena, nad poljem realnih brojeva, koji su deljivi sa $x - 6$, a pri deljenju sa $x - 2$, $x - 3$ i $x - 4$ daju jednake ostatke.

-GRUPA B-

Obavezni:

6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2008^{2007} sa 7
7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $34x - 24y = 12$.
8. Ako je $z = -6\sqrt{3} + 18i$, odrediti z^{181}.
9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ i $x^2 - x + 1$.

Poželjni:

1. Dokazati da je u algebarskoj strukturi $(N, +, \cdot)$, za sve x, y, z ispunjeno $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.
2. Dokazati da je dvanaestocifreni broj $\overline{abcdefghijkl}$ deljiv sa 11 ako i samo ako je $\overline{abc} - \overline{def} + \overline{ghi} - \overline{jkl}$ deljiv sa 11.
3. Odrediti sve polinome trećeg stepena, nad poljem realnih brojeva, koji su deljivi sa $x - 7$, a pri deljenju sa $x - 3$, $x - 4$ i $x - 5$ daju jednake ostatke.

ALGEBRA II - dodatni kolokvijum, 23. jun 2008.

G_1	a	b	c	d
a	a	b	c	a
b	b	d	a	c
c	b	a	d	c
d	d	b	c	a

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbb{Z} \backslash \{2008\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 10x - 5y - 3$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.
3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.
4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?
5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?
6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 7003^{7003} sa 7
7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $30x - 34y = 12$.
8. Ako je $z = 12 + 4\sqrt{3}i$, odrediti z^{212}.
9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 - 2x^2 + 1$ i $x^2 - x - 1$.