ALGEBRA I(2009/10), KOLOKVIJUM
I-NOVEMBAR, 20. novembar 2009.

GRUPA I

Obavezni:

1. Da li je tautologija: $p \wedge (\neg q \Rightarrow r) \Rightarrow q \vee (p \Leftrightarrow \neg r)$.
2. Pronaći KKF i KDF za $r \wedge (\neg p \Rightarrow q)$.
3. Pronaći jedan primere interpretacije i valuacije za koju će formula: $(\forall x)(R_1^2(y, a_1) \wedge (R_2^2(a_2, f_1^2(y, x)))$ biti a) tačna; b) netačna.

Poželjni:

4. Da li postoji formula $F(p, q, r)$ tako da je formula $((r \Rightarrow \neg q \wedge p) \Rightarrow F) \Rightarrow (F \wedge (p \Rightarrow q) \wedge r)$ tautologija? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji F.)
5. Dokazati da za iskaznu formulu $\neg p \wedge \neg q$ ne postoji tautološki ekvivalentna formula $F(p, q)$ u kojoj je jedini iskazni veznik $\Rightarrow$.
6. Pokazati da nije valjana formula:
$(\exists x)(\forall y)R(x, y) \wedge (\exists x)(\forall y)R(y, x) \Rightarrow (\forall x)R(x, x)$.

ALGEBRA I(2009/10), KOLOKVIJUM
I-NOVEMBAR, 20. novembar 2009.

GRUPA II

Obavezni:

1. Da li je tautologija: $p \wedge (\neg q \Leftrightarrow r) \Rightarrow q \vee (p \Rightarrow \neg r)$.
2. Pronaći KKF i KDF za $p \vee (\neg r \Rightarrow q)$.
3. Pronaći jedan primere interpretacije i valuacije za koju će formula: $(\exists x)(R_1^2(y, a_1) \wedge (R_2^2(a_2, f_1^2(y, x)))$ biti a) tačna; b) netačna.

Poželjni:

4. Da li postoji formula $F(p, q, r)$ tako da je formula $((r \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Leftrightarrow F)) \vee ((F \vee \neg p \Rightarrow q) \wedge r)$ tautologija? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji F.)
5. Dokazati da za iskaznu formulu $p \wedge \neg q$ ne postoji tautološki ekvivalentna formula $F(p, q)$ u kojoj je jedini iskazni veznik $\Rightarrow$.
6. Pokazati da nije valjana formula:
$(\forall x)R(x, x) \Rightarrow ((\exists x)(\forall y)R(x, y) \vee (\exists x)(\forall y)R(y, x))$.

ALGEBRA I(2009/10), KOLOKVIJUM II-DECEMBAR, 27. decembar 2009.

GRUPA I

Obavezni:

4 Dokazati da za skupove $A, B \subseteq U$ važi $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

5 Data je relacija $\rho = \{(3,1), (2,2), (4,3), (1,1)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3\}$,
$f_1 = \{(d,2), (b,3), (c,1), (a,2), (e,2)\}$,

b) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3\}$,
$f_2 = \{(c,1), (a,1), (d,3)\}$.

c) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ $f_3 = \{(b,4), (a,1), (c,2)\}$.
Okreni list!

Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,5), (2,1), (3,1), (4,5), (5,2), (6,3)\}$ i $g = \{(1,4), (2,6), (3,4), (4,4), (5,3), (6,1)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g(\{1,4,5\})$ i $f^{-1}(\{1,4,5\})$.

Poželjni:

α Dati su skupovi A i B, koji su podskupovi univerzalnog skupa U. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $A \setminus X = B$.

β Neka je ρ relacija na skupu A, σ relacija na skupu B, a τ na skupu $A \times B$ definisana sa:

$$(x,y)\tau(u,v) \text{ akko } (x,u) \in \rho \wedge (y,v) \in \sigma.$$

Dokazati: ako su ρ i σ relacije ekvivalencije, i τ je relacija ekvivalencije.

γ Neka je $f : A \to B$ i $g : B \times C \to D$ bijekcije, dokazati da je i funkcija $h : A \times C \to D$ data sa $h((a,c)) = g((f(a), c))$ takodje bijekcija.

ALGEBRA I(2009/10), KOLOKVIJUM II-DECEMBAR, 27. decembar 2009.

GRUPA II

Obavezni:

4 Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \setminus (C \setminus B) = (A \setminus C) \cup (A \cap B)$.

5 Data je relacija $\rho = \{(1,1), (1,3), (4,4), (3,2), (2,1), (3,1)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$,
$f_1 = \{(a,1), (b,3), (c,5), (d,4)\}$.

b) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$,
$f_2 = \{(c,1), (a,2), (b,1)\}$.

c) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2\}$,
$f_3 = \{(a,1), (b,1), (c,2), (a,2)\}$.
Okreni list!

Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,4), (2,3), (3,5), (4,6), (5,4), (6,3)\}$ i $g = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,1), (5,4), (6,4)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g(\{4,5,6\})$ i $f^{-1}(\{4,5,6\})$.

Poželjni:

α Dati su skupovi A i B, koji su podskupovi univerzalnog skupa U. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $X \setminus A = B$.

β Neka je ρ relacija na skupu A, σ relacija na skupu B, a τ na skupu $A \times B$ definisana sa:

$$(x,y)\tau(u,v) \text{ akko } (x,u) \in \rho \wedge (y,v) \in \sigma.$$

Dokazati: ako su ρ i σ relacije poretka, i τ je relacija poretka.

γ Neka je $f : A \times C \to D$ i $g : B \to C$ bijekcije, dokazati da je i funkcija $h : A \times B \to D$ data sa $h((a,b)) = f((a, g(b)))$ takodje bijekcija.

ALGEBRA I(2009/10), KOLOKVIJUM III, 20. januar 2009. GRUPA **Leva**

Obavezni:

8. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

$$\begin{array}{rrrrrr} -x & -2y & +2z & +t = & 1, \\ 2x & +3y & -z & -3t = & -3, \\ 3x & +y & +z & -4t = & 0, \\ -2x & -y & -3z & +2t = & 3. \end{array}$$

9. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

10. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

Poželjni:

α. Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -2 & -3 & \dots & -n \end{vmatrix}.$$

β. Diskutovati (i rešiti sistem) u zavisnosti od parametra a:

$$\begin{array}{rrrr} ax & -3y & -z = & 1, \\ -x & +ay & +(a+1)z = & a, \\ (a-1)x & -y & +2z = & a+1. \end{array}$$

γ. Rešiti matričnu jednačinu: $X \cdot A + 2C = B - X$ ako je $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

ALGEBRA I(2009/10), KOLOKVIJUM III, 20. januar 2010. GRUPA **Desna**

Obavezni:

8. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & +y & +z & -2t = & -2, \\ 2x & +3y & -z & -3t = & -3, \\ 3x & +y & +z & -4t = & 0, \\ -2x & -y & -3z & +2t = & 3. \end{array}$$

9. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

10. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

Poželjni:

α. Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

β. Diskutovati (i rešiti sistem) u zavisnosti od parametra a:

$$\begin{array}{rrrr} -(a+1)x & +y & +az = & a-1, \\ -x & +2y & -2z = & a+1, \\ 2x & +(a-1)y & -2az = & 2. \end{array}$$

γ. Rešiti matričnu jednačinu: $A \cdot X - B = 3X + C$ ako je $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

ALGEBRA I(2009/10), POPRAVNI
KOLOKVIJUM-FEBRUAR, 24. januar 2010.

I deo:

1 Da li je tautologija: $(((\neg p \Rightarrow q) \wedge r) \Leftrightarrow p) \vee (\neg r \Rightarrow q)$.

2 Pronaći KKF i KDF za formulu $q \Leftrightarrow \neg p \vee r$.

3 Pronaći interpretaciju i valuaciju za koju je formula: $(\exists x)(R_1^2(x, f_1^2(a_1, y)) \Rightarrow R_2^2(y, a_2))$
a) tačna,
b) netačna.

II deo:

4 Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

5 Data je relacija
$\rho = \{(3,2),(1,1),(3,4),(1,3),(3,3),(2,1)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $f_2 = \{(a,1),(b,2),(a,3),(b,4)\}$.

b) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f_1 = \{(a,1),(b,3),(c,3)\}$.

c) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $f_3 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,5),(e,4)\}$.

Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,1)\}$ i $g = \{(1,2),(2,3),(3,3),(4,3),(5,1),(6,5)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g(\{1,2,3\})$ i $f^{-1}(\{4,5,6\})$.

III deo:

8 Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:
$$\begin{array}{rrrrl} x & -2y & +z & -t = & 3, \\ -3x & +y & -z & +4t = & 1, \\ 2x & +3y & +2z & -t = & 0, \\ -x & -y & -3z & +3t = & -2. \end{array}$$

9 Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

10 Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

PRVI DEO

1α Da li postoji formula $F(p,q,r)$ tako da je formula $(r \Rightarrow (\neg q \wedge p \Rightarrow F)) \Rightarrow (F \wedge (p \Rightarrow q \wedge r))$ tautologija? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji F.)

1β Odrediti formulu tautološki ekvivalentnu sa $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ u kojoj su jedini veznici $\neg$ i $\wedge$.

1γ Pokazati da je sledeća formula valjana:
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow P(x,y)) \wedge (\forall x)(\forall y)(P(x,x) \Rightarrow P(x,y)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y) \vee (\forall x)\neg R(x,x)$.

DRUGI DEO

2α Neka su A, B, C podskupovi skupa U. Dokazati da je $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ ako i samo ako $C \subseteq A$.

2β Neka su ρ i σ relacija na skupu A takve da je $\sigma \subseteq \rho$, ρ je tranzitivna i σ je refleksivna. Dokazati da je tada $\sigma \circ \rho \circ \sigma = \rho$.

2γ Neka su $f : A \to B$ i $h : C \to D$ bijekcije i $g : B \to C$ funkcija takva da je $f \circ g \circ h : A \to D$ bijekcija, onda je g bijekcija.

TREĆI DEO

3α. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

3β. Diskutovati (i rešiti sistem) u zavisnosti od parametra a:
$$\begin{array}{rrrl} ax & +y & -3z = & a-1, \\ -2x & +2y & +az = & 1, \\ -x & +3y & -(a+1)z = & a. \end{array}$$

3γ. Rešiti matričnu jednačinu: $(A-2I)\cdot X = A + 3I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$.

ALGEBRA II(2009/10), KOLOKVIJUM I-MAJ, GRUPA A

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	c	d	b	b
c	b	b	b	d
d	d	b	c	b

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\backslash\{2010\},*)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x*y=4x-8y-10$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.
3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.
4. Ispitati da li struktura $(R,\star)$, gde je R skup realnih brojeva, a operacija $\star$ definisana sa: $x\star y=2y+2x+2$,
   (a) je polugrupa,
   (b) sadrži neutralni element,
   (c) ima osobinu da svaki element ima inverzni,
   (d) je grupa?
5. Odrediti sve vrednosti realnog parametra k tako da vektori $(3,k,k)$, $(k,k,2)$ i $(k,1,-k)$ budu linearno nezavisni.

Poželjni:

α. Aka je $f:G\to G$ endomorfizam grupe G i N podgrupa grupe G, dokazati da je $f^{-1}(N)$ podgrupa grupe G.

β. Neka je G konačna grupa i elemenat $a\in G$ reda 2. Dokazati da su elementi ab i $a^{-1}b$ imaju isti red.

γ. Dato je polje realnih brojeva $(R,+,\cdot)$. Da li je i $(R,\oplus,*)$ takodje polje, gde su operacije $\oplus$ i $*$ definisane sa:

$x\oplus y=x+y-1$;

$x*y=3+\frac{(x-1)(y-1)}{3}$.

ALGEBRA II(2009/10), KOLOKVIJUM I-MAJ, GRUPA B

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	c	c
b	c	c	b	c
c	b	a	a	c
d	d	d	d	d

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\backslash\{2010\},*)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x*y=6x-2y-10$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.
3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.
4. Ispitati da li struktura $(R,\star)$, gde je R skup realnih brojeva, a operacija $\star$ definisana sa: $x\star y=3x+2y+1$
   (a) je polugrupa,
   (b) sadrži neutralni element,
   (c) ima osobinu da svaki element ima inverzni,
   (d) je grupa?
5. Odrediti sve vrednosti realnog parametra k tako da vektori $(k,k,6)$, $(9,k,k)$ i $(k,3,-k)$ budu linearno nezavisni.

Poželjni:

α. Aka je $f:G\to G$ endomorfizam grupe G i N podgrupa grupe G, dokazati da je $f(N)$ podgrupa grupe G.

β. Neka je G konačna grupa i elemenat $b\in G$ reda 2. Dokazati da su elementi ab i ab^{-1} imaju isti red.

γ. Dato je polje realnih brojeva $(R,+,\cdot)$. Da li je i $(R,\oplus,*)$ takodje polje, gde su operacije $\oplus$ i $*$ definisane sa:

$x\oplus y=x+y-3$;

$x*y=3+\frac{(x-3)(y-3)}{2}$

ALGEBRA II - drugi kolokvijum, 25. maj 2010.
-PRVA grupa

Obavezni:

6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2010^{2010} sa 9
7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $25x - 12y = 3$.
8. Ako je $z = 6\sqrt{3} - 18i$, odrediti z^{555}.
9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 + x^3 + 2x - 4$ i $x^3 + x^2 + 2x + 2$.

Poželjni:

1. Odrediti sva rešenja sistema kongruencija $x \equiv 2(mod 5)$; $x \equiv 3(mod 7)$; $x \equiv 1(mod 9)$.
2. Za koje vrednosti k iz skupa celih brojeva se razlomak $\frac{14k-3}{8k+1}$ može skratiti.
3. Odrediti sve nule polinoma $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$ ako se zna da ima dve dvostruke nule i da su one racionalne.

ALGEBRA II - drugi kolokvijum, 25. maj 2010.
-DRUGA grupa

Obavezni:

6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2012^{2010} sa 11
7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $38x - 44y = 8$.
8. Ako je $z = -18 + 6\sqrt{3}i$, odrediti z^{999}.
9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ i $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

Poželjni:

1. Odrediti sva rešenja sistema kongruencija $x \equiv 1(mod 3)$; $x \equiv 4(mod 11)$; $x \equiv 3(mod 5)$.
2. Za koje vrednosti k iz skupa celih brojeva se razlomak $\frac{17k-3}{9k+1}$ može skratiti.
3. Odrediti sve nule polinoma $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$ ako se zna da ima jednu racionalnu dvostruku nulu.

ALGEBRA II - drugi kolokvijum, 25. maj 2010.
-TREĆA grupa

Obavezni:

6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2009^{555} sa 13
7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $14x - 25y = 3$.
8. Ako je $z = 6\sqrt{3} - 18i$, odrediti z^{888}.
9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ i $x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Poželjni:

1. Odrediti sva rešenja sistema kongruencija $x \equiv 1(mod 7)$; $x \equiv 2(mod 8)$; $x \equiv 3(mod 9)$.
2. Za koje vrednosti k iz skupa celih brojeva se razlomak $\frac{11k-3}{10k+4}$ može skratiti.
3. Odrediti sve nule polinoma $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 9$ ako se zna da ima jednu racionalnu dvostruku nulu.

ALGEBRA II - drugi kolokvijum, 25. maj 2010.
-ČETVRTA grupa

Obavezni:

6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2015^{2008} sa 7
7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $58x - 44y = 12$.
8. Ako je $z = -18 + 6\sqrt{3}i$, odrediti z^{350}.
9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ i $x^3 + x^2 + 2x + 2$.

Poželjni:

1. Odrediti sva rešenja sistema kongruencija $x \equiv 7(mod 8)$; $x \equiv 1(mod 9)$; $2 \equiv 1(mod 5)$.
2. Za koje vrednosti k iz skupa celih brojeva se razlomak $\frac{19k-1}{10k+7}$ može skratiti.
3. Odrediti sve nule polinoma $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 8$ ako se zna da ima jednu racionalnu dvostruku nulu.

ALGEBRA II - dodatni kolokvijum, 18. jun 2010.

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	b	a
b	b	b	b	b
c	b	b	b	c
d	a	b	c	d

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\backslash\{2011\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 6x - 2y - 4$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.
3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.
4. Ispitati da li struktura $(R, \star)$, gde je R skup realnih brojeva, a operacija $\star$ definisana sa: $x \star y = 3x + 3y + 1$
   (a) je polugrupa,
   (b) sadrži neutralni element,
   (c) ima osobinu da svaki element ima inverzni,
   (d) je grupa?
5. Odrediti sve vrednosti realnog parametra k tako da vektori $(k, k, 2)$, $(3, k, k)$ i $(3, k, -3)$ budu linearno nezavisni.
6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2010^{2010} sa 7
7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $22x - 38y = 24$.
8. Ako je $z = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}i$, odrediti z^{1212}.
9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ i $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$.

ALGEBRA II - dodatni kolokvijum, 18. jun 2010.

Poželjni:

Prvi deo

i. Dokazati da je direktan proizvod dve grupe grupa.

ii. Dokazati da su sve podgrupe beskonačne cikličke grupe (osim jednoelementne podgrupe) i same beskonačne.

iii. Dato je polje realnih brojeva $(R, +, \cdot)$. Da li je i $(R, \oplus, *)$ takodje polje, gde su operacije $\oplus$ i $*$ definisane sa:

$x \oplus y = x + y - 3$;

$x * y = 3 - \frac{(x-3)(y-3)}{3}$

ALGEBRA II - dodatni kolokvijum, 18. jun 2010.

Poželjni:

Drugi deo

iv. Dokazati da je $5^{5n+1} + 2 \cdot 3^{5n+1}$ deljiv sa 11, za svaki prirodan broj n.

v. Odrediti sva rešenja sistema kongruencija $x \equiv 6(mod 7)$; $x \equiv 1(mod 6)$; $x \equiv 1(mod 5)$.

vi. Deljenjem polinoma $P(x)$ polinomom $S(x)$ dobija se količnik $Q(x) = x^2 + 4$ i ostatak $x^3 + 2x^2$. Odrediti ostatak koji se dobija kada se polinom $P(x)$ podeli polinomom $Q(x)$.

ALGEBRA II(2009/10), POPRAVNI KOLOKVIJUM
AVGUST
PRVI DEO

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	a	a	b
b	a	a	a	b
c	a	a	a	b
d	c	c	c	c

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\backslash\{9999\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 3x - 6y - 9$.

2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Ispitati da li struktura $(R, \star)$, gde je R skup realnih brojeva, a operacija $\star$ definisana sa: $x \star y = 6y + 6x + 4$,

   (a) je polugrupa,

   (b) sadrži neutralni element,

   (c) ima osobinu da svaki element ima inverzni,

   (d) je grupa?

5. Odrediti sve vrednosti realnog parametra k tako da vektori (k, k, k), $(1, 1, 2)$ i $(2, 2, 3)$ budu linearno nezavisni.

Poželjni:

α. Data je grupa G. Da li je presek njena dva podgrupoida koji su oba komutativne polugrupe sa jedinicom takodje komutativna polugrupa sa jedinicom? Obrazloziti (dokazati ili naci kontraprimer).

β. Data je grupa sa dva elementa $G = \{e, a\}$. Posmatramo grupu $H = G \times G \times G$. Da li su sve podgrupe grupe H normalne? Da li postoji podgrupa grupe H koja je izomorfna sa G?

γ. Opisati sve ideale prstena $(Z, +, \cdot)$.

ALGEBRA II(2009/10), POPRAVNI KOLOKVIJUM
AVGUST
DRUGI DEO

Obavezni:

6. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2222^{5555} sa 7

7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $88x - 34y = 11$.

8. Ako je $z = 6\sqrt{3} - 18i$, odrediti z^{1111}.

9. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6$ i $x^3 - x^2 + 2x - 2$.

Poželjni:

1. Slažemo knjige u kutije. Ako ih složimo po 7, ostaje 3 knjige; ako ih složimo po 5 ostaje 1 knjiga, a ako ih slažemo po 8 ostaju dve knjige. Naci sve mogućnosti broja knjiga koji zadovoljava tražene uslove.

2. Za koje vrednosti k iz skupa celih brojeva se razlomak $\frac{17k-1}{8k+7}$ može skratiti.

3. Odrediti sve nule polinoma $x^4 + 3x^3 + x^2 + 4$ ako se zna da ima jednu racionalnu dvostruku nulu.

ALGEBRA I(2009/10), POPRAVNI KOLOKVIJUM AVGUST

I deo:

1 Da li je tautologija: $((p \wedge r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \vee (\neg r \Rightarrow q)$.

2 Pronaći KKF i KDF za formulu $\neg p \Leftrightarrow q \vee r$.

3 Pronaći interpretaciju i valuaciju za koju je formula: $(\exists x)(R_1^2(x, f_1^2(a_1, x)) \Rightarrow R_2^2(y, a_2))$
a) tačna,
b) netačna.

II deo:

4 Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

5 Data je relacija
$\rho = \{(3,2),(1,1),(3,4),(4,1),(3,3),(1,3)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $f_2 = \{(a,1),(a,3),(b,4)\}$.

b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f_1 = \{(a,1),(c,2),(b,3),(c,3)\}$.

c) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $f_3 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,5),(e,4)\}$.

Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,1)\}$ i $g = \{(1,2),(2,3),(3,3),(4,3),(5,1),(6,5)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g(\{1,2,3\})$ i $f^{-1}(\{4,5,6\})$.

III deo:

8 Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:
$$\begin{array}{rrrrl} x & -2y & +z & -t = & 3, \\ -3x & +y & -z & +4t = & 1, \\ 2x & +3y & +2z & -t = & 0, \\ -x & -y & -3z & +3t = & -2. \end{array}$$

9 Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

10 Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

PRVI DEO

1α Da li postoji formula $F(p,q,r)$ tako da je formula $(r \Rightarrow (\neg q \wedge p \Rightarrow F)) \Rightarrow (F \wedge (p \Rightarrow q \wedge p))$ tautologija? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji F.)

1β Dokazati da sledeća formula nije valjana: $(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R(x,y)$.

1γ Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow R(y,z)) \Rightarrow (\forall x)R(x,x)$.

DRUGI DEO

2α Neka su A, B, C i D neprazni skupovi, i neka je $C \subseteq A$, $B \subseteq D$ i $A \times B \cup C \times D = B \times C$. Dokazati da je $A = B = C = D$.

2β Dokazati da za proizvoljne relacije ρ, σ i θ na A važi: (1) $\rho \subseteq \sigma$ ako i samo ako $\overline{\sigma} \subseteq \overline{\rho}$; (2) $\overline{(\rho \circ \sigma) \cap (\theta \circ \sigma)} \subseteq \overline{(\rho \cap \theta) \circ \sigma}$.

2γ Data je funkcija $f : A \to B$. Dokazati da je funkcija f sirjekcija ako i samo ako za svaki skup $Y \subseteq B$ važi $Y = f(f^{-1}(Y))$.

TREĆI DEO

3α. Izračunati determinantu
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n+2 & n+1 \end{vmatrix}.$$

3β. Diskutovati (i rešiti sistem) u zavisnosti od parametra a:
$$\begin{array}{rrrl} ax & +y & -3z = & a-1, \\ -2x & +2y & +az = & 1, \\ -x & +3y & -(a+1)z = & a. \end{array}$$

3γ. Odrediti koeficijente a, b i c, tako da polinom $p(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + 1$ bude deljiv sa $(x-1)^2(x+1)$.