ALGEBRA I(20010/11), KOLOKVIJUM
I-NOVEMBAR, 24. novembar 2010.

GRUPA I

Obavezni:

1. Da li je tautologija: $p \wedge (\neg q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

2. Pronaći KKF i KDF za $r \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

3. Pronaći jedan primer interpretacije i valuacije za koju će formula: $(\forall x)(R_1^2(a_2, f_1^2(y,x)) \Rightarrow R_2^2(y, a_1))$ biti a) tačna; b) netačna.

4 Dokazati da za skupove $A, B \subseteq U$ važi
$A \setminus B = (B \setminus (A \cup B)) \cup ((A \cup B) \setminus B)$.

Poželjni:

4. Da li postoji formula $F(p,q,r)$ takva da je formula $(r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow F$ semantička posledica formule $(F \Rightarrow q) \wedge r$? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji F.)

5. Pokazati da je valjana formula:
$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(R(x,y) \wedge \neg R(x,z)) \wedge$
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$
$\Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg R(y,x) \wedge R(z,x))$.

6. Dati su skupovi A i B koji su podskupovi univerzalnog skupa U. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $X \setminus A = B$.

ALGEBRA I(2010/11), KOLOKVIJUM
I-NOVEMBAR, 24. novembar 2010.

GRUPA II

Obavezni:

1. Da li je tautologija: $(p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r))$.

2. Pronaći KKF i KDF za $p \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q)$.

3. Pronaći jedan primer interpretacije i valuacije za koju će formula: $(\exists x)(R_1^2(y, a_1) \Rightarrow R_2^2(a_2, f_1^2(y,x)))$ biti a) tačna; b) netačna.

4 Dokazati da za skupove $A, B \subseteq U$ važi
$A \setminus B = (A \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus A)$.

Poželjni:

4. Da li postoji formula $F(p,q,r)$ takva da je formula $(F \Rightarrow q) \wedge p$ semantička posledica formule $(p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow F$? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji F.)

5. Pokazati da je valjana formula:
$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(R(x,y) \Leftrightarrow \neg R(x,z)) \wedge$
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$
$\Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg R(y,x) \Leftrightarrow R(z,x))$.

6. Dati su skupovi A i B koji su podskupovi univerzalnog skupa U. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $X \setminus B = X \cup A$.

ALGEBRA I(2010/11), KOLOKVIJUM II, 17. januar 2011.

GRUPA I

Obavezni:

5 Data je relacija $\rho = \{(2,1),(2,2),(4,3),(1,1)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3\}$,
$f_1 = \{(d,2),(b,1),(c,3),(a,2),(e,2)\}$,

b) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3\}$,
$f_2 = \{(b,3),(c,1),(a,1),(d,3)\}$.

c) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ $f_3 = \{(b,4),(a,1),(b,3),(c,2)\}$.
Okreni list! Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,5),(2,1),(3,2),(4,1),(5,2),(6,3)\}$ i $g = \{(1,4),(2,6),(3,2),(4,2),(5,3),(6,1)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g^{-1}(\{1,4,5\})$ i $f(\{1,4,5\})$.

8. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:
$$\begin{array}{rrrrl} -x & +3y & & +4t = & 2, \\ x & +y & +z & -2t = & 3, \\ x & -3y & +2z & +t = & 0, \\ 2x & +3y & -z & +3t = & 4. \end{array}$$

9. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

10. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Poželjni:

α Relacija ρ_n na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ definisana je (za fiksiran prirodan broj n) na sledeći način:

$$(x,y) \in \rho_n \text{ ako i samo ako } x + 2n < y.$$

Dokazati za $n, m \in \mathbb{N}$:

(a) ρ_n je tranzitivna relacija;

(b) $\rho_m \circ \rho_n \subseteq \rho_{m+n}$;

(c) $\rho_m \circ \rho_n \neq \rho_{m+n}$;

β Neka je $f : A \to B$ funkcija, $X \subseteq B$ i $Y \subseteq A$. Dokazati da je $f^{-1}(X \setminus f(Y)) \supseteq f^{-1}(X) \setminus Y$.

γ Izračunati vrednost determinante ako je reda n:
$$\begin{vmatrix} n+2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & n & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & n & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & n & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

ALGEBRA I(2010/11), KOLOKVIJUM II, 17. januar 2011.

GRUPA II

Obavezni:

5 Data je relacija $\rho = \{(3,1),(2,2),(4,2),(1,1)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3\}$,
$f_1 = \{(d,2),(b,3),(c,1),(a,2)\}$,

b) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3\}$,
$f_2 = \{(c,1),(a,1),(b,2),(d,3)\}$.

c) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ $f_3 = \{(b,3),(a,1),(c,2)\}$.
Okreni list! Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,2),(2,5),(3,1),(4,5),(5,2),(6,3)\}$ i $g = \{(1,3),(2,2),(3,4),(4,4),(5,3),(6,1)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g(\{1,4,5\})$ i $f^{-1}(\{1,4,5\})$.

8. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:
$$\begin{array}{rrrrl} x & +6y & -z & +7t = & 6, \\ x & +y & +z & -2t = & 3, \\ x & -3y & +2z & +t = & 0, \\ 2x & +3y & -z & +3t = & 4. \end{array}$$

9. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

10. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Poželjni:

α Relacija ρ_n na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ definisana je (za fiksiran prirodan broj n) na sledeći način:

$$(x,y) \in \rho_n \text{ ako i samo ako } x < y - 3n.$$

Dokazati za $n, m \in \mathbb{N}$:

(a) ρ_n je tranzitivna relacija;

(b) $\rho_m \circ \rho_n \subseteq \rho_{m+n}$;

(c) $\rho_m \circ \rho_n \neq \rho_{m+n}$;

β Neka je $f : A \to B$ funkcija, $X \subseteq B$ i $Y \subseteq A$. Dokazati da je $f(Y \cup f^{-1}(X)) \subseteq f(Y) \cup X$.

γ Izračunati vrednost determinante ako je reda n:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

ALGEBRA I(2010/11), POPRAVNI KOLOKVIJUM-FEBRUAR, 1. februar 2010.

I deo:

1 Da li je tautologija: $(((\neg p \Rightarrow q) \wedge r) \Leftrightarrow p) \vee (\neg r \Rightarrow q)$.

2 Pronaći KKF i KDF za formulu $q \Leftrightarrow \neg p \vee r$.

3 Pronaći interpretaciju i valuaciju za koju je formula: $(\exists x)(R_1^2(x, f_1^2(a_1, y)) \Rightarrow R_2^2(y, a_2))$
a) tačna,
b) netačna.

4 Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

II deo:

5 Data je relacija $\rho = \{(3,2), (1,1), (3,4), (1,3), (3,3), (2,1)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

a) $A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $f_2 = \{(a,1), (b,2), (a,3), (b,4)\}$.

b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f_1 = \{(a,1), (b,3), (c,3)\}$.

c) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $f_3 = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,5), (e,4)\}$.

Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,1)\}$ i $g = \{(1,2), (2,3), (3,3), (4,3), (5,1), (6,5)\}$.

a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

c) Odrediti $g(\{1,2,3\})$ i $f^{-1}(\{4,5,6\})$.

8 Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:
$$\begin{array}{rrrrl} x & -2y & +z & -t = & 3, \\ -3x & +y & -z & +4t = & 1, \\ 2x & +3y & +2z & -t = & 0, \\ -x & -y & -3z & +3t = & -2. \end{array}$$

9 Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

10 Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

PRVI DEO

1α Da li postoji formula $F(p, q, r)$ tako da je formula $(r \Rightarrow (\neg q \wedge p \Rightarrow F)) \Rightarrow (F \wedge (p \Rightarrow q \wedge r))$ tautologija? (Navesti primer ili dokazati da ne postoji F.)

1β Odrediti formulu tautološki ekvivalentnu sa $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ u kojoj su jedini veznici $\neg$ i $\wedge$.

1γ Pokazati da je sledeća formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow P(x,y)) \wedge (\forall x)(\forall y)(P(x,x) \Rightarrow P(x,y)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y) \vee (\forall x)\neg R(x,x)$.

DRUGI DEO

2α Neka su A, B, C podskupovi skupa U. Dokazati da je $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ ako i samo ako $C \subseteq A$.

2β Neka su ρ i σ relacija na skupu A takve da je $\sigma \subseteq \rho$, ρ je tranzitivna i σ je refleksivna. Dokazati da je tada $\sigma \circ \rho \circ \sigma = \rho$.

2γ Neka su $f : A \to B$ i $h : C \to D$ bijekcije i $g : B \to C$ funkcija takva da je $f \circ g \circ h : A \to D$ bijekcija, onda je g bijekcija.

TREĆI DEO

3α. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

3β. Diskutovati (i rešiti sistem) u zavisnosti od parametra a:
$$\begin{array}{rrrl} ax & +y & -3z = & a-1, \\ -2x & +2y & +az = & 1, \\ -x & +3y & -(a+1)z = & a. \end{array}$$

3γ. Rešiti matričnu jednačinu: $(A - 2I) \cdot X = A + 3I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$.

ALGEBRA I(2010/11), POPRAVNI KOLOKVIJUM, 6. septembar 2011.

I deo:

1 Da li je tautologija: $(((\neg p \Rightarrow q) \wedge p) \Leftrightarrow r) \vee (q \Rightarrow \neg r)$.

2 Pronaći KKF i KDF za formulu $q \vee \neg p \Leftrightarrow r$.

3 Pronaći interpretaciju i valuaciju za koju je formula: $(\forall x)(R_1^2(x, a_2) \Rightarrow R_2^2(y, f_1^2(a_1, y)))$
a) tačna,
b) netačna.

4 Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

II deo:

5 Data je relacija $\rho = \{(3,2),(1,1),(3,1),(1,3),(3,3),(2,1)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.
a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?
b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.
c) Odrediti klase ekvivalencije θ.
d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6 Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:
a) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $f_2 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(a,4)\}$.
b) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f_1 = \{(a,1),(b,3),(c,3)\}$.
c) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $f_3 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4),(e,4)\}$.
Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7 Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,3),(2,3),(3,4),(4,4),(5,6),(6,1)\}$ i $g = \{(1,1),(2,3),(3,3),(4,3),(5,1),(6,5)\}$.
a) Odrediti jezgra funkcija f i g.
b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.
c) Odrediti $g(\{1,2,3\})$ i $f^{-1}(\{4,5,6\})$.

8 Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:
$$\begin{array}{rrrrl} x & -2y & +z & -t = & 3, \\ -3x & +y & -z & +4t = & -8, \\ 2x & +3y & +2z & -t = & 5, \\ -x & -y & -3z & +3t = & -7. \end{array}$$

9 Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

10 Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

PRVI DEO

1. Da li postoji formula $A(p,q,r)$, takva da je formula $A \Rightarrow q$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee q$, a $A \Leftrightarrow p$ tautološki ekvivalentna sa $q \vee r$?
2. Pokazati da je valjana formula: $(\forall x)\neg R(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)\neg(R(x,y) \wedge R(y,x))$.
3. Dokazati da je $A \cap B = \emptyset$ ako i samo ako je $A \cup B = A \triangle B$.

DRUGI DEO

α Neka su ρ i θ relacije ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $\rho \circ \theta$ relacija ekvivalencije na istom skupu ako i samo ako je $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$.

β Data je funkcija $f : A \to B$ funkcija. Dokazati da je funkcija f sirjekcija ako i samo ako postoji funkcija $g : B \to A$, takva da je $g \circ f = I_B$.

γ Izračunati vrednost determinante ako je reda n:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & \dots & -3 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & \dots & -3 \\ 1 & -3 & -3 & 1 & \dots & -3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -3 & -3 & -3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

ALGEBRA II(2010/11), KOLOKVIJUM I, GRUPA A

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	d	b	b
c	c	d	a	b
d	b	d	d	d

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\backslash\{2011\},*)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x*y=4x-8y-1$.

2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Ispitati da li struktura $(R,\star)$, gde je R skup realnih brojeva, a operacija $\star$ definisana sa: $x\star y=2xy+3y+3x+3$,

   (a) je komutativna,

   (b) je polugrupa,

   (c) sadrži neutralni element,

   (d) ima osobinu da svaki element ima inverzni,

   (e) je grupa?

5. Da li se tablice operacija mogu dopuniti tako da struktura $\{a,b,c,d\},+,\cdot$ bude prsten.

+	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				

$\cdot$	a	b	c	d
a		b		
b			b	
c				b
d				

6. Odrediti sve vrednosti realnog parametra k tako da vektori $(k,1,k)$, $(2,2,2k)$ i $(-k,1,3)$ budu linearno nezavisni.

Poželjni:

α. Data je grupa sa 6 elemenata. Dokazati da je svaki podrupoid ove grupe podgrupa.

β. Dokazati da je relacija ekvivalencije ρ kongruencija na komutativnom grupoidu $(G,*)$ ako i samo ako za svako $x,y,z\in G$, iz $x\rho y$ sledi $z*x\rho z*y$.

γ. Dat je vektorski prostor $(R^3,+)$ nad poljem $(R,+,\cdot)$. Proveriti da li je $W=\{(x,y,z)\mid x\geq 0, y\leq 0 \text{ i } z=0\}$ potprostor ovog vektorskog prostora.

ALGEBRA II(2010/11), KOLOKVIJUM I, GRUPA P

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	a	d	b
c	c	d	a	b
d	d	c	c	d

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\backslash\{2011\},*)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x*y=3x-6y-12$.

2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Ispitati da li struktura $(R,\star)$, gde je R skup realnih brojeva, a operacija $\star$ definisana sa: $x\star y=3xy+4y+4x+4$,

   (a) je komutativna,

   (b) je polugrupa,

   (c) sadrži neutralni element,

   (d) ima osobinu da svaki element ima inverzni,

   (e) je grupa?

5. Da li se tablice operacija mogu dopuniti tako da struktura $\{a,b,c,d\},+,\cdot$ bude prsten.

+	a	b	c	d
a				
b		b		
c			b	
d				b

$\cdot$	a	b	c	d
a		c		
b			c	
c				c
d				

6. Odrediti sve vrednosti realnog parametra k tako da vektori $(2,1,2k)$, $(2,-k,2k)$ i $(1,k,-1)$ budu linearno nezavisni.

Poželjni:

α. Data je grupa sa 8 elemenata. Dokazati da je svaki podgrupoid ove grupe podgrupa.

β. Dokazati da je relacija ekvivalencije ρ kongruencija na komutativnom grupoidu $(G,*)$ ako i samo ako za svako $x,y,z\in G$, iz $x\rho y$ sledi $x*z\rho y*z$.

γ. Dat je vektorski prostor $(R^3,+)$ nad poljem $(R,+,\cdot)$. Proveriti da li je $W=\{(x,y,z)\mid x=0, y\leq 0 \text{ i } z\geq 0\}$ potprostor ovog vektorskog prostora.

ALGEBRA II - drugi kolokvijum, 3. jun 2011.
-PRVA grupa

Obavezni:

7. Odrediti ostatak pri deljenju broja 3004^{2002} sa 9
8. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $33x - 12y = 9$.
9. Ako je $z = 18 - 18i$, odrediti z^{777}.
10. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ i $x^3 + 2x^2 - 3$.

Poželjni:

1. Odrediti sve proste brojeve p takve da je $10p^2 + 17$ prost broj.
2. Dokazati da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{5} + 1$ iracionalan.
3. Da li postoje prirodni brojevi a, b takvi da je polinom $p(x) = 5x^a + 4x^b - 2x - 1$ deljiv polinomom $(x+1)^2$, i ako postoje pronaći sve takve.

ALGEBRA II - drugi kolokvijum, 3. jun 2011.
-DRUGA grupa

Obavezni:

7. Odrediti ostatak pri deljenju broja 3005^{2002} sa 11
8. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $-38x + 44y = 8$.
9. Ako je $z = -6 + 2\sqrt{3}i$, odrediti z^{999}.
10. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 12x + 5$ i $x^3 + 4x^2 + 6x + 3$.

Poželjni:

1. Odrediti sve proste brojeve p takve da je $13p^2 - 4$ prost broj.
2. Dokazati da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 7$ iracionalan.
3. Da li postoje prirodni brojevi a, b takvi da je polinom $p(x) = 6x^a + 3x^b - 3x$ deljiv polinomom $(x+1)^2$, i ako postoje pronaći sve takve.

ALGEBRA II(2010/11),POPRAVNI KOLOKVIJUM - JUN, PRVI DEO

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	a	c	c
b	a	a	c	c
c	d	d	b	b
d	d	d	b	b

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\backslash\{2010\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 3x - 6y - 12$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.
3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.
4. Ispitati da li struktura $(R, \star)$, gde je R skup realnih brojeva, a operacija $\star$ definisana sa: $x \star y = 3xy + 4y + 4x$,
   (a) je komutativna,
   (b) je polugrupa,
   (c) sadrži neutralni element,
   (d) ima osobinu da svaki element ima inverzni,
   (e) je grupa?
5. Da li se tablice operacija mogu dopuniti tako da struktura $\{a, b, c, d\}, +, \cdot$ bude prsten.

+	a	b	c	d
a	c			
b		c		
c			c	
d				

$\cdot$	a	b	c	d
a		c		c
b	c			c
c				
d				

6. Odrediti sve vrednosti realnog parametra k tako da vektori $(2, -1, 2k)$, $(2, -k-2, 2k)$ i $(1, k-1, -1)$ budu linearno nezavisni.

Poželjni:

α. Dati Kejlijevu tablicu nekomutativne grupe sa 6 elemenata, odrediti sve njene podgrupe i odrediti koje su normalne a koje nisu.

β. Dati primer bilo kog prstena sa 6 elemenata i odrediti sve njegove potprstene i ideale.

γ. Dat je vektorski prostor $(R^4, +)$ nad poljem $(R, +, \cdot)$. Proveriti da li je $W = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z = 0 \text{ i } t = 0\}$ potprostor ovog vektorskog prostora.

ALGEBRA II (2010/11), POPRAVNI KOLOKVIJUM - JUN, DRUGI DEO

Obavezni:

7. Odrediti ostatak pri deljenju broja 3005^{3005} sa 11
8. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $34x - 13y = 9$.
9. Ako je $z = -3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}i$, odrediti z^{111}.
10. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$ i $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

Poželjni:

1. Dokazati da $(Z \setminus \{0\}, *)$, gde je Z skup celih brojeva i operacija $*$ definisana sa $x * y = ax - by$, gde su a i b celi brojevi različiti od nule nije grupoid.
2. Odrediti razlomak koji odgovara periodičnom decimalnom broju 3.131313....
3. Dokazati da je $x^2 + 4$ nesvodljiv polinom nad poljem realnih brojeva.

ALGEBRA II(2010/11), POPRAVNI KOLOKVIJUM
OKTOBAR
PRVI DEO

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	c	b	d	a
b	c	b	d	a
c	c	b	d	a
d	c	b	d	a

1. Objasniti da li je $(\mathbf{Z}\backslash\{2011\},*)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x*y=3x-4y-12$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.
3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.
4. Ispitati da li struktura $(R,\star)$, gde je R skup realnih brojeva, a operacija $\star$ definisana sa: $x\star y=2xy+3y+3x$,
   (a) je komutativna,
   (b) je polugrupa,
   (c) sadrži neutralni element,
   (d) ima osobinu da svaki element ima inverzni,
   (e) je grupa?
5. Da li se tablice operacija mogu dopuniti tako da struktura $(\{a,b,c,d\},+,\cdot)$ bude prsten.

+	a	b	c	d
a	c			
b		a		
c			c	
d				

$\cdot$	a	b	c	d
a		b		
b			b	
c				b
d				

6. Odrediti sve vrednosti realnog parametra k tako da vektori $(2,-1,2k)$, $(2,-k-2,2k)$ i $(1,k-1,0)$ budu linearno nezavisni.

Poželjni, Prvi deo, Algebra 2:

α. Dat je grupoid $G=(\{a,b\},*)$ gde je operacija $*$ definisana sa: $a*a=b; a*b=a; b*a=a, b*b=b$. Odrediti grupoid $H=G\times G$ i sve podgrupoide i kongruencije grupoida H.

β. Dati primer grupe sa 10 elemenata.

γ. Odrediti sve ideale prstena ostataka pri deljenju sa 6: $(\{0,1,2,3,4,5\},+_6,\cdot_6)$.

ALGEBRA II(2010/11), POPRAVNI KOLOKVIJUM
OKTOBAR
DRUGI DEO

Obavezni:

7. Odrediti ostatak pri deljenju broja 5003^{3355} sa 11
8. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $43x-13y=7$.
9. Ako je $z=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}i$, odrediti z^{333}.
10. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^4-9x^2-4x+12$ i x^3+5x^2+2x-8.

Poželjni, Drugi deo, Algebra 2:

1. Dokazati da je broj $2^{2008}+2008^2$ deljiv sa 5.
2. Ako je $a\equiv b(mod\ m)$, dokazati da je i $a^3b+a+3\equiv b^3a+b+3(mod\ m)$.
3. Odrediti koeficijente a i b polinoma x^3+ax^2+bx+1 tako da $1+i$ bude njegova nula.