MATEMATIČKA LOGIKA I
ALGEBRA, ALGEBRA I
27.septembar 2001.

1. Dokazati da u iskaznom računu važi
$$(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D),\ (B \Rightarrow E) \wedge (D \Rightarrow F),\ \neg(E \wedge F),\ C\ \vdash\ \neg A.$$

2. Neka su X i Y dva disjunktna skupa , a R binarna relacija na $A = X \cup Y$ definisana sa: aRb akko $(a = b \vee (a \in X \wedge b \in Y))$.
a) Dokazati da je R parcijalno uređenje na A.
b) Da li R mora biti parcijalno uređenje ako X i Y nisu disjunktni?

3. Neka je G grupa i $G_0 \subseteq G \times G$, dat sa $G_0 = \{(g, g) \mid g \in G\}$. Dokazati da je G_0 normalna podgrupa od $G \times G$ akko je G Abelova grupa.

4. Ako ideal I prstena R sadrži jedinicu, dokazati da je tada $I = R$. Odavde izvesti da telo nema netrivijalnih ideala (različitih od samog tela i $\{0\}$).

5. Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X = B$, gde su
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 4 \\ 9 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

MATEMATIČKA LOGIKA I
ALGEBRA, ALGEBRA I
05. januar 2002.

1. Dokazati da za iskaznu formulu $p \wedge q$ ne postoji tautološki ekvivalentna formul $F(p, q)$ u kojoj je jedini veznik $\Rightarrow$.

2. Dokazati da su jedine relacije na skupu A koje su istovremeno i simetrične i antisimetrične dijagonalna relacija i svi njeni podskupovi.

3. Ako je H podgrupa grupe $(G, \cdot)$ i $x \in G$, dokazati da je xHx^{-1} podgrupa grupe G izomorfna sa H.

4. Dokazati da je $2^{2n+3} + 2 \cdot 3^{2n}$ deljivo sa 10, za svaki prirodni broj n.

5. Odrediti a i b tako da polinom $p(x) = ax^6 + bx^3 + 1$ bude deljiv sa $(x - 1)^2$. Odrediti nule tog polinoma za dobijene vrednosti a i b.

ALGEBRA I
F-smer, 06. januar 2002.

1. Dokazati da ne postoji formula $F(p, q, r)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $((p \Leftrightarrow r) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (F \Rightarrow (p \vee q))$.

2. Neka su ρ, θ i δ relacije na skupu A. Dokazati da važi: $(\rho \circ \theta) \cup \delta \subseteq \rho \circ (\theta \cup (\rho^{-1} \circ \delta))$.

3. Neka je G konačna grupa. Dokazati da su elementi a i $b^{-1}ab$ istog reda.

4. Ako je n neparan broj, tada je $1^n + 2^n + ... + 21^n$ deljivo sa 11. Dokazati.

5. Odrediti polinom $p(x)$ trećeg stepena, za koji važi da $(x - 1)^2$ deli $p(x) + 1$, a $(x + 1)^2$ deli $p(x)$.