Matematička logika i algebra,
Algebra I, 18. jun 2003.
dr Andreja Tepavčević

1. Dokazati da ne postoji formulu $F(p,q,r)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $(F \vee r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

2. Neka su ρ i θ relacije ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $\rho \circ \theta$ relacija ekvivalencije na istom skupu ako i samo ako je $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$.

3. Ako je H podgrupa grupe G i N normalna podgrupa grupe G. Dokazati da je HN podgrupa grupe G.

4. Neka je L potprsten prstena R. Ako L ima jedinični element, a R nemajedinični element, tada R ima delitelje nule.

5. Utvrditi kojom cifrom se zavrsava broj $7^{1001} + 3^{1002}$.

6. Neka je $n \in N$. Odrediti koeficijente a i b tako da polinom $ax^{2n+1} + bx + 1$ bude deljiv polinomom $(x+1)^2$.

7. Izračunati vrednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

PISMENI ISPIT IZ MATEMATIČKE LOGIKE I ALGEBRE / ALGEBRE I kod prof. Branimira Šešelje, jun 2003

1. Dokazati:
$$\vdash (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \Rightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee s).$$

2. Dokazati da sledeća formula nije valjana:
$$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow (\exists x)\neg R(x,x).$$

3. Dokazati da za binarne relacije ρ, σ, τ na nekom skupu A važi $\overline{\rho \circ (\sigma \cup \tau)} = \overline{(\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau)}$.

4. Dokazati: podgrupa H grupe G je normalna akko za sve $a, b \in G$ iz $ab \in H$ sledi $ba \in H$.

5. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $12x + 10y = 4$.

6. Odrediti polinom $f(x)$ trećeg stepena, za koji važi da $(x-1)^2$ deli $f(x)+1$, a $(x+1)^2$ deli $f(x)-1$.

7. Izračunati vrednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

ALGEBRA I, 08. jul 2003.
dr Andreja Tepavčević

1. Dokazati da ne postoji formula $F(p, q, r, s, t)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $(F \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r \vee s \vee t)) \Rightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge s) \vee \neg t)$.

2. Dokazati da je sledeća formula valjana: $[(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \Rightarrow R(y, x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y)] \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \Rightarrow x = y)$.

3. Ako su A i B podskupovi skupa U, dokazati da važi sledeća jednakost: $\overline{A \triangle B} = \overline{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$.

4. Neka je G drupa, i a elemenat reda 2. Dokazati da za $b \in G$ ako važi $ba = ab^2$, tada je $b^3 = e$.

5. Rešiti linearnu Diofantovu jednačinu: $8x + 22y = 4$.

6. Neka su a i b različiti pozitivni brojevi i $p(x)$ polinom četvrtog stepena nad poljem realnih brojeva. Ako je $p(a) = p(-a)$ i $p(b) = p(-b)$, dokazati da je $p(x) = p(-x)$ za svaki realni broj x.

7. Diskutovati sistem jednačina u zaisnosti od realnih parametara a i b, i rešiti sistem u slučajevima kada ima rešenja:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & + & 3z & = & 1, \\ -2x & + & 3y & + & az & = & b, \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 2. \end{array}$$

ALGEBRA I, 09. septembar 2003.
dr Andreja Tepavčević

1. Da li je sledeca formula tautologija: $((p \vee q) \Leftrightarrow (t \wedge r \wedge s)) \Rightarrow ((t \wedge q \wedge s) \Rightarrow (\neg p \vee r))$

2. Dokazati da sledeća formula nije valjana: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((R(x, y) \wedge R(y, z)) \wedge (\forall x)(\exists y)\neg R(y, x) \wedge (\forall x)(\exists y)R(x, y)] \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(y, x)$.

3. Neka je $f : A \times A \to A$, i neka su za sve $x, y, z \in A$ važi: $f(x, y) = f(y, x)$, $f(x, x) = x$ i $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$. Tada je relacija ρ na skupu A definisana sa $(x, y) \leftrightarrow f(x, y) = x$, relacija poretka.

4. Dokazati da u konačnoj multiplikativnoj grupi G elementi a i $b^{-1}ab$ imaju isti red.

5. Pronaći sve proste brojeve p takve da je $p^2 + 8$ takođe prost broj.

6. Dat je polinom sa realnim koeficijentima koji nema realnih nula, a zbir njegovih koeficijenata je veći od 0. Odrediti znak slobodnog člana.

7. Rešiti matričnu jednačinu $X \cdot (A - 3I) = B$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

.

ALGEBRA I, 27. septembar 2003.
dr Andreja Tepavčević

1. Dokazati da formula $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$ nije semantička posledica formula $\neg(p \Leftrightarrow (q \vee r))$, $q \Leftrightarrow (r \wedge s)$, $s \Rightarrow p$.

2. Neka su ρ i θ relacije ekvivalencije na skupu A, i $a, b \in A, a \neq b$. Ako je $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$, $[a]_\rho = \{a\}$, $[a]_\theta = \{a, b\}$, tada važi $[b]_\rho = \{b\}$.

3. Dat je grupoid $G = (\{1, 2, 3, 4\}, *)$ gde je operacija $*$ definisana sa $x * y = max\{x, y\}$. Odrediti sve podgrupoide i sve kongruencije ovog grupoida. Da li je G grupa?

4. Neka su $(R, +, \cdot)$ i $(T, +, \cdot)$ dva prstena, $h : R \to T$ homomorfizam prstena koji je sirjekcija, i neka su I i J ideali prstena R. Ako $r \in T$, $i \in I$, $j \in J$, tada važi $r \cdot h(i + j) \in h(I + J)$. Dokazati.

5. Ako je $z = 1 - i$, odrediti z^{20}.

6. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $f(x)$ sa $(x + 1)(x^2 + 1)$ ako je ostatak pri deljenju tog polnoma sa $x + 1$ i $x^2 + 1$, redom, jednak 4 i $2x + 3$.

7. Izračunati vrednost determinante, ako je determinanta reda n:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 2 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & 2 \end{vmatrix}.$$

ALGEBRA I, 20. oktobar 2003.
dr Andreja Tepavčević

1. Da li je sledeća iskazna formula tautologija

$$((r \vee s \vee t) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s))$$

2. Dokazati da je sledeća formula valjana:

$$[(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \Rightarrow R(y, x)) \wedge (\exists x)(\forall y)R(x, y) \wedge$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))] \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x, y)$$

3. Ako su A, B i C podskupovi skupa U, dokayati da važi $\overline{A \setminus B} = \overline{A \triangle (A \cap B)}$.

4. Neka je $f : G \to H$ epimorfizam grupoida G na grupoid H. Dokazati, ako postoji neutralni element u grupoidu G, tada postoji i neutralni element u grupoidu H.

5. Rešiti sledeće Diofantove jednačine:
a) $6x + 51y = 5$
b) $41x + 3y = 2$.

6. Neka je $n \in N$. Odrediti koeficijente a i b tako da polinom $ax^{3n+1} + 2bx + 1$ bude deljiv polinomom $(x - 1)^2$.

7. Diskutovati sistem jednačina u odnosu na realni parametar a i rešiti sistem u slučaju kada ima rrešenje¿

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 4y & + & z & + & t & = & 1 \\ -2x & - & y & - & z & + & at & = & 2 \\ x & - & y & + & z & - & 2t & = & 3 \\ & - & 2y & - & z & - & t & = & 4 \end{array}.$$