Matematička logika i algebra,
Algebra I, 12. januar 2004.
dr Andreja Tepavčević

1. Dokazati da za svaku iskaznu formulu postoji ekvivalentna, sa osobinom da su jedini logički veznici koji se u njoj javljaju su $\Rightarrow$ i $\neg$.

2. Da li je sledeća formula valjana: $[(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))] \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(x,y)$.

3. Neka je $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ i $A_3 \sim B_3$. Dokazati da je $(A_1 \times A_2) \times A_3 \sim B_1 \times (B_2 \times B_3)$.

4. Neka je $(G, *)$ grupoid i ρ relacija ekvivalencije na skupu G. Dokazati da je ρ kongruencija ako i samo ako za svake dve klase $[x]_\rho, [y]_\rho \in G/\rho$ postoji klasa $[z]_\rho \in G/\rho$ takva da je $[x]_\rho * [y]_\rho \subseteq [z]_\rho$.

5. Dokazati da je broj $50^n + 20^n$ deljiv sa 7 ako i samo ako je n neparan broj.

6. Odrediti sve polinome četvrtog stepena, nad poljem realnih brojeva, koji su deljivi sa $x-5$, a pri deljenju sa $x-2, x-3$ i $x-4$ daju jednake ostatke.

7. Izračunati vrednost determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & x & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & x & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & x & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}.$$

ALGEBRA I, april 2004.
dr Andreja Tepavčević

1. Dokazati da ne postoji formula $F(p,q,r)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $((p \Leftrightarrow r) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (F \Rightarrow (p \vee q))$.

2. Ako su A i B podskupovi skupa U, dokazati da važi sledeća jednakost: $\overline{A \triangle B} = \overline{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$.

3. Ako je H podgrupa grupe $(G, \cdot)$ i $x \in G$, dokazati da je xHx^{-1} podgrupa grupe G izomorfna sa H.

4. Ako ideal I prstena R sadrži jedinicu, dokazati da je tada $I = R$. Odavde izvesti da telo nema netrivijalnih ideala (različitih od samog tela i $\{0\}$).

5. Utvrditi kojom cifrom se zavrsava broj $7^{1001} + 3^{1002}$.

6. Odrediti polinom $f(x)$ trećeg stepena, za koji važi da $(x-1)^2$ deli $f(x)+1$, a $(x+1)^2$ deli $f(x)-1$.

7. Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X = B$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 4 \\ 9 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

ALGEBRA I, 01. jul 2004,
kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Da li postoji formula $A(p,q,r)$, takva da je formula $A \Rightarrow p$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee q$, a $A \Leftrightarrow q$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee r$?
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $(\forall x)R(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x,y) \Rightarrow R(x,z) \wedge R(y,z))$.

II DEO

3. Neka su A, B i C neprazni skupovi, takvi da važi $(A \times B) \cup (B \times C) = C \times A$ i $A \times B \subseteq B \times C$. Dokazati da je $A = B = C$.
4. Dokazati da iz $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ i $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, sledi $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

III DEO

5. Dokazati da je inverzna funkcija izomorfizma grupoida takođe izomorfizam.
6. Neka je V skup uređenih parova realnih brojeva: $V = \{(x,y) \mid x \in R,\ y \in R\}$. Dokazati da V nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x,y) + (z,t) = (x+t, y+z)$ i $k(x,y) = (kx, ky)$.

IV DEO

7. Uvrditi kojom cifrom se završava broj $33^{2004} + 77^{2004}$.
8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

ALGEBRA I, 16. septembar 2004,
kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Dokazati da ne postoji formulu $F(p,q,r)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $(F \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.
2. Dokazati da sledeća formula nije valjana:

$$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow (\exists x)\neg R(x,x).$$

II DEO

3. Dokazati da su jedine relacije na skupu A koje su istovremeno i simetrične i antisimetrične dijagonalna relacija i svi njeni podskupovi.
4. Neka je $f : A \rightarrow B$ funkcija i $X, Z \subseteq B$ i $Y \subseteq A$. Dokazati $f^{-1}(X \cap f(Y \cup f^{-1}(Z))) \supseteq f^{-1}(X) \cap (Y \cup f^{-1}(Z))$.

III DEO

5. Ako je H podgrupa grupe $(G, \cdot)$ i $x \in G$, dokazati da je xHx^{-1} podgrupa grupe G izomorfna sa H.
6. Neka je V skup uređenih parova realnih brojeva: $V = \{(x,y) \mid x \in R,\ y \in R\}$. Dokazati da V nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x,y) + (z,t) = (x+z, y+t)$ i $k(x,y) = (k^2x, k^2y)$.

IV DEO

7. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $16x + 6y = 4$.
8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & n \\ 1 & 1 & 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 & 1 & 1 \\ n & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

ALGEBRA I, 30. septembar 2004,
kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Da li je iskazna formula $r \Rightarrow p$ semantička posledica formula $((\neg p \Rightarrow q) \vee r) \Rightarrow p$ i $\neg q \Rightarrow r$.
2. Da li je sledeća formula valjana: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x,y)$.

II DEO

3. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $A \setminus X = B$.
4. Ako su $R_1 \cup R_2$ i $R_1 \cap R_2$ refleksivne i antisimetrične relacije, dokazati da su i R_1 i R_2 refleksivne i antisimetrične relacije.

III DEO

5. Dokazati da je komutativni grupoid $(G,*)$ u kome važi zakon $x*(y*z) = y*(z*x)$ polugrupa.
6. Neka se prsten celih brojeva homomorfizmom f preslikava u sebe. Dokazati da iz $f(1) \neq 0$ sledi $f(1) = 1$ i $f(0) = 0$.

IV DEO

7. Polinom $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ ima dvostruke nule. Odrediti nule tog polinoma i parametre a i b.
8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

ALGEBRA I, 30. septembar 2004,
kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Da li je iskazna formula $((p \wedge q) \Rightarrow r) \vee ((p \vee r) \Rightarrow q)$ semantička posledica formula $((\neg p \Rightarrow q) \vee r) \Rightarrow p$ i $\neg q \Rightarrow r$.
2. Dokazati da sledeća formula nije valjana:

$$(\forall x)R(x,x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y,z) \Rightarrow R(y,x,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y,z) \Rightarrow R(x,z,y))$$

II DEO

3. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $A \setminus X = B$.
4. Ako su $R_1 \cup R_2$ i $R_1 \cap R_2$ refleksivne i antisimetrične relacije, dokazati da su i R_1 i R_2 refleksivne i antisimetrične relacije.

III DEO

5. Dokazati da je komutativni grupoid $(G,*)$ u kome važi zakon $x*(y*z) = y*(z*x)$ polugrupa.
6. Neka je h homomorfno preslikavanje prstena $(T, \oplus, \otimes)$ u prsten celih brojeva $(Z, +, \cdot)$, pri čemu za elemente $a, b \in T$ važi $h(a) = 3$ i $h(b) = -7$. Dokazati da je preslikavanje h sirjekcija.

IV DEO

7. Polinom $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ ima dvostruke nule. Odrediti nule tog polinoma i parametre a i b.

8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

ALGEBRA I, 13. oktobar 2004,

kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Odrediti formulu $F(p,q,r)$ iskaznog računa, takvu da sledeća formula bude tautologija: $(F \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee q)) \Rightarrow (r \wedge F)$.
2. Dokazati da je sledeća formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow x = y)$.

II DEO

3. Neka su relacije R i S na skupu X tranzitivne relacije. Dokazati ako je $R \circ S \subseteq S \circ R$, tada važi $S \circ R \circ (S \cup R) \circ R \circ S \subseteq S \circ R$.
4. Dokazati : $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

III DEO

5. Ispitati da li je struktura $(R, *)$grupa, ako je R skup realnih brojeva, a operacija $*$ definisana sa : $x * y := xy + 2(x + y + 1)$.
6. Neka se prsten celih brojeva homomorfizmom f preslikava u sebe. Dokazati da iz $f(1) \neq 0$ sledi $f(1) = 1$ i $f(0) = 0$.

IV DEO

7. Utvrditi kojom cifrom se zavrsava broj $3^{2004} + 7^{2004}$.
8. Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X = B$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 4 \\ 9 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$