ALGEBRA I, 10. februar 2005,
kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Odrediti formulu $F(p,q,r)$ iskaznog racuna, takvu da sledeća formula bude tautoogija: $(F \Leftrightarrow p \vee r) \Rightarrow (p \wedge (r \Leftrightarrow q))$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow (\exists z)(R(x,z) \Leftrightarrow R(z,y))) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R(x,y)$.

II DEO

3. Ako je R_1 refleksivna relacija, R_2 refleksivna i tranzitivna i $R_1 \subseteq R_2$ tada važi $R_1 \circ R_2 \circ R_1 \circ R_2 = R_2$.
4. Dokazati da iz $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$ sledi $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.

III DEO

5. Ispitati da li je struktura $(Z,*)$ grupa, ako je Z skup celih brojeva, a operacija $*$ definisana sa: $x * y = x \cdot y + x + y$.
6. Dokazati da je prsten $(P,+,\cdot)$, u kome za sve $x \in P$ važi $x \cdot x = x$, komutativnost.

IV DEO

7. Naći ostatak pri deljenju broja 2005^{2005} sa 11.
8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

ALGEBRA I, 10. februar 2005,
kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Dokazati da ne postoji formula $F(p,q,r)$ iskaznog racuna, takva da je sledeća formula tautoogija: $(F \Rightarrow p \wedge r) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow F)$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(x,y)$.

II DEO

3. Dati su skupovi A i B, koji su podskupovi univerzalnog skupa U. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $A \setminus X = B$.
4. Neka su dati neprazni skupovi A, B i C, pri čemu je $A = \{2004\}$ i $B = \{2005\}$. Dokazati da je $A \times C \sim C \times B$.

III DEO

5. Ako grupa G sadrži tačno jedan elemenat a reda dva, onda je za svako $x \in G$, $ax = xa$.
6. Neka je $(R,+,\cdot)$ komutativan prsten i I njegov ideal. Dokazati da za sve $a,b \in R$ i $i \in I$ važi $(a+i)^2 + (b+i)^2 - a^2 - b^2 \in I$.

IV DEO

7. Odrediti polinom $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + b$ ako je on kvadrat drugog polinoma.
8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

ALGEBRA I, 8. april 2005,
kod prof. Branimira Šešelje

1. Dokazati da ne postoji formula $F(p,q,r)$ iskaznog racuna, takva da je sledeća formula tautoogija: $(F \Rightarrow p \wedge r) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow F)$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(x,y)$.
3. Neka su dati neprazni skupovi A, B i C, pri čemu je $A = \{2004\}$ i $B = \{2005\}$. Dokazati da je $A \times C \sim C \times B$.
4. Neka je $(R,+,\cdot)$ komutativan prsten i I njegov ideal. Dokazati da za sve $a,b \in R$ i $i \in I$ važi $(a+i)^2 + (b+i)^2 - a^2 - b^2 \in I$.
5. Odrediti polinom $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + b$ ako je on kvadrat drugog polinoma.

ALGEBRA I, 30. jun 2005,
kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Da li postoji formula $F(p,q,r)$ iskaznog racuna, takva da je sledeća formula tautologija: $((F \Rightarrow p) \wedge r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Rightarrow F))$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $[(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))] \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(x,y)$.

II DEO

3. Ako su R_1 i R_2 relacije poretka, dokazati da je $R_1 \cap R_2^{-1}$ relacija poretka.
4. Neka su dati neprazni skupovi A, B i C, pri čemu je $A = \{a\}$ i $B = \{b\}$. Dokazati da je $A \times C \sim C \times B$.

III DEO

5. Neka je $(G,*)$ grupoid i ρ kongruencija datog grupoida. Dokazati da za svake dve klase $[x]_\rho, [y]_\rho \in G/\rho$ postoji klasa $[z]_\rho \in G/\rho$ takva da je $[x]_\rho * [y]_\rho \subseteq [z]_\rho$.
6. Pokazati da $W = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$ ne određuje potprostor realnog prostora R^3.

IV DEO

7. Rešiti Diofantovu jednačinu $28x - 20y = 4$.
8. Rešiti sledeću matričnu jednačinu $(A - I) \cdot X = A + I$, gde je $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 11 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

ALGEBRA I, 29. septembar 2005,
kod prof. Andreje Tepavčević

I DEO

1. Da li postoji formula $F(p,q,r)$ iskaznog racuna, takva da je sledeća formula tautologija: $((F \Rightarrow p) \vee r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow F))$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $[(\exists x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x,y) \Rightarrow R(y,z) \wedge R(x,z))] \Rightarrow (\forall x)(\exists y)R(x,y)$.

II DEO

3. Neka su A,B i C podskupovi skupa U. Dokazati da iz $A \cup C = B \cup C$ i $A \cap C = B \cap C$, sledi $A = B$.
4. Neka su A i B skupovi i $f : \mathcal{P}(A \cup B) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ funkcija definisana sa $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Dokazati da je f injektivno preslikavanje.

III DEO

5. Neka je G konačna grupa, i $a,b \in G$. Dokazati da elementi ab i ba imaju isti red.

6. Pokazati da $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\}$ ne određuje potprostor realnog prostora R^3.

IV DEO

7. Kojom cifrom se zavrsava broj $1997^{1997} + 2003^{2003}$?

8. Rešiti sledeću matričnu jednačinu $(A + I) \cdot X = 2A + I$, gde je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

ALGEBRA I, 08. oktobar 2005,

kod prof. dr Andreje Tepavčević

I DEO

1. Da li postoji formula $A(p, q, r)$, takva da je formula $A \Rightarrow p$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee q$, a $A \Leftrightarrow q$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee r$?

2. Proveriti da li je sledeća formula valjana:

$$(\exists x)(\forall y)R(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \Rightarrow R(y, z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(y, x).$$

II DEO

3. Dokazati da su jedine relacije na skupu A koje su istovremeno i simetrične i antisimetrične dijagonalna relacija i svi njeni podskupovi.

4. Dokazati da iz $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ i $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, sledi $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

III DEO

5. Ako je H podgrupa grupe $(G, \cdot)$ i $x \in G$, dokazati da je xHx^{-1} podgrupa grupe G izomorfna sa H.

6. Ako ideal I prstena R sadrži jedinicu, dokazati da je tada $I = R$. Odavde izvesti da telo nema netrivijalnih ideala (različitih od samog tela i $\{0\}$).

IV DEO

7. Rešiti Diofantovu jednačinu: $21x - 55y = 2$.

8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.