ALGEBRA I, 09. januar 2005,

kod prof. Andreje Tepavčević,

(plan i program iz 2002.godine)

I DEO

1. Da li postoji formula $F(p,q,r)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $((F \Rightarrow p) \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Leftrightarrow F))$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow x = y)$.

II DEO

3. Neka je $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ i $A_3 \sim B_3$. Dokazati da je $(A_1 \times A_2) \times A_3 \sim B_1 \times (B_2 \times B_3)$.
4. Ako su R_1 i R_2 relacije poretka, dokazati da je $(R_1^{-1} \cap R_2)^{-1}$ relacija poretka.

III DEO

5. Neka je $(G,*)$ grupoid i ρ kongruencija datog grupoida. Dokazati da za svake dve klase $[x]_\rho, [y]_\rho \in G/\rho$ postoji klasa $[z]_\rho \in G/\rho$ takva da je $[x]_\rho * [y]_\rho \subseteq [z]_\rho$.
6. Neka je V skup uredjenih parova prirodnih brojeva: $V = \{(x,y) \mid x, y \in R\}$. Dokazati da V nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x,y) + (z,t) = (x,t)$ i $k(x,y) = (kx, ky)$.

IV DEO

7. Odrediti sve polinome trećeg stepena, nad poljem realnih brojeva, koji su deljivi sa $x - 4$, a pri deljenju sa $x - 1$, $x - 2$ i $x - 3$ daju jednake ostatke.
8. Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X = B$, gde su $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 4 \\ 9 & -2 & 8 \end{bmatrix}$.

ALGEBRA I, 07. april 2006.,

kod prof. Andreje Tepavčević,

I DEO

1. Dokazati da za iskaznu formulu $p \wedge q$ ne postoji tautološki ekvivalentna formula $F(p,q)$ u kojoj je jedini veznik $\Rightarrow$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R(x,y)$.

II DEO

3. Ako su A i B podskupovi skupa U, dokazati da važi sledeća jednakost : $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$.
4. Ako su relacije R_1 i R_2 skupa A antisimetrične, dokazati da je i $R_1 \cup R_2$ antisimetrične relacije ako i samo ako je $(R_1 \cap R_2^{-1}) \subseteq \triangle$.

III DEO

5. Neka je $(G,*)$ konačna grupa, i $a, b \in G$. Dokazati da elementi a i $b^{-1}ab$ imaju isti red.
6. Neka su I i J ideali prstena R. Dokazati da je $I + J = \{i + j \mid i \in I,\ j \in J\}$ ideal prstena R i da važi $I \cup J \subseteq I + J$.

IV DEO

7. Odrediti sva rešenja sistema kongruencija: $x \equiv 1(mod\ 3)$; $x \equiv 2(mod\ 5)$; $x \equiv 3(mod\ 7)$.
8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

ALGEBRA I, 26. jun 2006.,
kod prof. Andreje Tepavčević,

I DEO

1. Da li je iskazna formula $r \Rightarrow p$ semantička posledica formula $((\neg p \Rightarrow q) \vee r) \Rightarrow p$ i $r \Rightarrow \neg q$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana:
$(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R(x,y)$.

II DEO

3. Odrediti skup $X \subseteq U$, koji zadovoljava skupovnu jednačinu $X \setminus A = B$.
4. Neka je $f : A \rightarrow B$ funkcija i $X \subseteq B$ i $Y \subseteq A$. Dokazati $f^{-1}(X \cup f(Y)) \supseteq f^{-1}(X) \cup Y$.

III DEO

5. Dokazati da je komutativni grupoid $(G, *)$ u kome važi zakon $x * (y * z) = y * (x * z)$ polugrupa.
6. Neka je V skup uređenih parova realnih brojeva: $V = \{(x,y) \mid x \in R,\ y \in R\}$. Dokazati da V nije realni vektorski prostor, ako se operacije sabiranja u grupi i množenja skalarom definišu na sledeći način: $(x,y) + (z,t) = (y+z, x+t)$ i $k(x,y) = (kx, ky)$.

IV DEO

7. Uvrditi kojom cifrom se završava broj $323^{2006} + 727^{2006}$.
8. Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X = B$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$