ALGEBRA I, 12. februar 2007., -plan 2002-
kod prof. Andreje Tepavčević,

I DEO

1. Da li postoji formula $A(p,q,r)$, takva da je formula $A \Rightarrow p$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee q$, a $A \Leftrightarrow q$ tautološki ekvivalentna sa $p \vee r$?
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $(\forall x)R(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x,y) \Rightarrow R(x,z) \wedge R(y,z))$.

II DEO

3. Ako su A i B podskupovi skupa U, dokazati da važi sledeća jednakost : $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$.
4. Dokazati da iz $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ i $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, sledi $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

III DEO

5. Neka je $(G,*)$ konačna grupa, i $a,b \in G$. Dokazati da elementi ba i ab imaju isti red.
6. Neka je f homomorfizam prstena R u njega samog. Dokazati da je podskup $S = \{x \in R \mid f^2(x) = x\}$ potprsten u R.

IV DEO

7. Odrediti sva rešenja sistema kongruencija: $x \equiv 1(mod\ 3)$; $x \equiv 2(mod\ 5)$; $x \equiv 3(mod\ 7)$.
8. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

ALGEBRA I, 14. april 2007., -plan 2002-
kod prof. Andreje Tepavčević,

I DEO

1. Da li postoji formula $F(p,q,r,s,t)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $(F \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r \vee s \vee t)) \Rightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge s) \vee \neg t)$.
2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $[(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y)] \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow x = y)$.

II DEO

3. Ako su A i B podskupovi skupa U, dokazati da važi sledeća jednakost: $\overline{A \triangle B} = \overline{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$.
4. Neka su ρ i θ relacije ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $\rho \circ \theta$ relacija ekvivalencije na istom skupu ako i samo ako je $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$.

III DEO

5. Neka je G drupa, i a elemenat reda 2. Dokazati da za $b \in G$ ako važi $ba = ab^2$, tada je $b^3 = e$.
6. Neka je f homomorfizam prstena R u njega samog. Dokazati da je podskup $S = \{x \in R \mid f^2(x) = x\}$ potprsten u R.

IV DEO

7. Rešiti linearnu Diofantovu jednačinu: $8x + 22y = 4$.
8. Diskutovati sistem jednačina u zaisnosti od realnih parametara a i b, i rešiti sistem u slučajevima kada ima rešenja:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & + & 3z & = & 1, \\ -2x & + & 3y & + & az & = & b, \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 2. \end{array}$$

ALGEBRE II, 14. april 2007., -plan 2005-
-prvi deo-

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	b	d
b	b	d	a	b
c	c	a	d	c
d	d	b	c	a

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbb{Z}\backslash\{2007\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 20x - 10y - 3$.

2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?

Poželjni:

6. Neka je $(G, *)$ konačna grupa, i $a, b \in G$. Dokazati da elementi ba i ab imaju isti red.

7. Neka je f homomorfizam prstena R u njega samog. Dokazati da je podskup $S = \{x \in R \mid f^2(x) = x\}$ potprsten u R.

-drugi deo-

Obavezni:

1. Odrediti ostatak pri deljenju broja 2007^{2007} sa 7

2. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $37x - 68y = 12$.

3. Ako je $z = 12 + 4\sqrt{3}i$, odrediti z^{180}.

4. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 - 2x^2 + 1$ i $x^2 - x - 2$.

Poželjni:

5. Odrediti sve polinome trećeg stepena, nad poljem realnih brojeva, koji su deljivi sa $x - 4$, a pri deljenju sa $x - 1$, $x - 2$ i $x - 3$ daju jednake ostatke.

ALGEBRA I, 25. jun 2007., -plan 2002-
kod prof. Andreje Tepavčević,

I DEO

1. Da li postoji formula $F(p, q, r, s, t)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $((F \wedge p) \Rightarrow (r \vee s \vee t \Rightarrow p \wedge q)) \Rightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge s) \vee \neg t)$.

2. Proveriti da li je sledeća formula valjana: $(\forall x)R(x, x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \Rightarrow R(y, z)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R(x, y)$.

II DEO 3. Ako su A i B podskupovi skupa U, dokazati da važi sledeća jednakost: $\overline{A \triangle B} = \overline{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$.

4. Ako su $R_1 \cup R_2$ i $R_1 \cap R_2$ refleksivne i antisimetrične relacije, dokazati da su i R_1 i R_2 refleksivne i antisimetrične relacije.

III DEO 5. Ako je H podgrupa grupe G i N normalna podgrupa grupe G. Dokazati da je HN podgrupa grupe G.

6. Ako ideal I prstena R sadrži jedinicu, dokazati da je tada $I = R$. Odavde izvesti da telo nema netrivijalnih ideala (različitih od samog tela i $\{0\}$).

IV DEO 7. Pronaći sve proste brojeve p takve da je $p^2 + 8$ takođe prost broj.

8. Rešiti matričnu jednačinu $X \cdot (A - 3I) = B$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

.

ALGEBRE I, 25. jun 2007.
-plan 2005-

I deo obaveznih:

1. Da li je tautologija: $(r \Rightarrow p) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow q \vee (r \Rightarrow p)$

2. Pronaći KKF i KDF za $r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

3. Pokazati da je formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)R(x, y, z) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)R(y, z, x)$

II deo obaveznih:

4. Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

5. Data je relacija $\rho = \{(1, 2), (2, 4), (4, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

   a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

   b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

   c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

   d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6. Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

   a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $f_1 = \{(a, 1), (c, 2)\}$.

   b) $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f_2 = \{(a, 2), (b, 2)\}$.

   c) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f_3 = \{(a, 1), (b, 4), (c, 2), (d, 4), (e, 5), (b, 2), (d, 2)\}$.

   Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7. Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,4),(2,4),(3,3),(4,2),(5,4),(6,6)\}$ i
$g = \{(1,2),(2,3),(3,6),(4,5),(5,1),(6,4)\}$.
a) Odrediti jezgra funkcija f i g.
b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.
c) Odrediti $g(\{1,2,3\})$ i $f^{-1}(\{1,4,6\})$.

III deo obaveznih:

8. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:
$x + y - z - t = 3,$
$2x + 3y - 3z + 2t = 8,$
$3x - 3y - 3z + 2t = -3,$
$2x - y + z + 3t = 0.$

9. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

10. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Poželjni:

i Da li postoji formula $F(p,q,r,s,t)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $(F \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r \vee s \vee t)) \Rightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge s) \vee \neg t)$.

ii Neka su ρ i θ relacije ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $\rho \circ \theta$ relacija ekvivalencije na istom skupu ako i samo ako je $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$.

iii Diskutovati sistem jednačina u zaisnosti od realnih parametara a i b, i rešiti sistem u slučajevima kada ima rešenja:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & + & 3z & = & 1, \\ -2x & + & 3y & + & az & = & b, \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 2. \end{array}$$

ALGEBRE II, 28. jun 2007., -plan 2005-
-prvi deo-

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	b	a
b	b	d	a	c
c	b	a	d	c
d	d	b	c	d

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbb{Z}\backslash\{2007\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 10x - 5y - 3$.

2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?

Poželjni:

6. Ako je H podgrupa grupe G i N normalna podgrupa grupe G. Dokazati da je HN podgrupa grupe G.

7. Ako ideal I prstena R sadrži jedinicu, dokazati da je tada $I = R$. Odavde izvesti da telo nema netrivijalnih ideala (različitih od samog tela i $\{0\}$).

-drugi deo-

Obavezni:

1. Odrediti ostatak pri deljenju broja 7002^{7002} sa 7

2. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $26x - 34y = 12$.

3. Ako je $z = 4\sqrt{3} + 12i$, odrediti z^{210}.

4. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 - 2x^2 + 1$ i $x^2 - x - 2$.

Poželjni:

5. Pronaći sve proste brojeve p takve da je $p^2 + 8$ takođe prost broj.

ALGEBRE I, 13. septembar 2007.
-plan 2005-

I deo obaveznih:

1. Da li je tautologija: $(r \Rightarrow p) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow q \vee (r \Leftrightarrow p)$

2. Pronaći KKF i KDF za $r \wedge (p \Leftrightarrow q)$.

3. Pokazati da je formula valjana: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)R(x, y, z) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)R(y, z, x)$

II deo obaveznih:

4. Dokazati da za skupove $A, B, C \subseteq E$ važi $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

5. Data je relacija $\rho = \{(3,2),(2,4),(4,3),(2,2),(3,3)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4\}$.

   a) Koje od osobina refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost ova relacija poseduje?

   b) Odrediti najmanju relaciju θ na istom skupu takvu da je $\rho \subseteq \theta$ i da je θ relacija ekvivalencije.

   c) Odrediti klase ekvivalencije θ.

   d) Da li postoji relacija poretka σ na skupu A koja sadrži ρ. Ako postoji, konstruisati tu relaciju, a ako ne postoji obrazložiti zašto ne postoji.

6. Date su sledeće korespondencije iz skupa A u skup B:

   a) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2\}$, $f_1 = \{(a,2),(c,2)\}$.

   b) $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f_2 = \{(a,3),(b,2)\}$.

   c) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $f_3 = \{(a,3),(b,4),(c,1),(d,2),(e,5),(c,2),(d,3)\}$.

   Koje od ovih korespondencija su funkcije? Koje od njih su injekcije, koje sirjekcije, a koje bijekcije?

7. Date su funkcije f i g na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $f = \{(1,4),(2,4),(3,3),(4,2),(5,4),(6,6)\}$ i
   $g = \{(1,2),(2,3),(3,6),(4,5),(5,1),(6,4)\}$.

   a) Odrediti jezgra funkcija f i g.

   b) Odrediti funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$.

   c) Odrediti $g(\{1,2,3\})$ i $f^{-1}(\{1,4,6\})$.

   III deo obaveznih:

8. Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovim metodom:

   $x + y - z - t = 3,$

   $2x + 3y - 3z + 2t = 8,$

   $3x - 3y - 3z + 2t = -3,$

   $2x - y + z + 3t = 0.$

9. Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

10. Odrediti inverznu matricu za sledeću matricu: $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Poželjni:

i Da li postoji formula $F(p,q,r,s,t)$ iskaznog računa, takva da je sledeća formula tautologija: $(F \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r \vee s \vee t)) \Rightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge s) \vee \neg t)$.

ii Neka su ρ i θ relacije ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $\rho \circ \theta$ relacija ekvivalencije na istom skupu ako i samo ako je $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$.

iii Diskutovati sistem jednačina u zaisnosti od realnih parametara a i b, i rešiti sistem u slučajevima kada ima rešenja:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & + & 3z & = & 1, \\ -2x & + & 3y & + & az & = & b, \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 2. \end{array}$$

ALGEBRA I, 13. septembar 2007., kod prof. Andreje Tepavčević, -plan 2002-

I DEO

1. Odrediti iskaznu formulu $F(p,q,r)$ takvu da formula $(F \Leftrightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$ bude tautologija.
2. Pokazati da formula nije valjana:$(\forall x)(\exists y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)) \Rightarrow (\forall x)R(x,x)$.

II DEO

3. Neka su A, B, i C neprazni skupovi, i neka je $C \subseteq A$ i $A \times B \cup C \times B = B \times C$. Dokazati da je $A \subseteq B = C$.
4. Ako su $R_1 \cup R_2$ i $R_1 \cap R_2$ refleksivne i antisimetrične relacije, dokazati da su i R_1 i R_2 refleksivne i antisimetrične relacije.

III DEO

5. Ako je H i N normalne podgrupe grupe G. Dokazati da je HN normalna podgrupa grupe G.
6. Ako ideal I prstena R sadrži jedinicu, dokazati da je tada $I = R$. Odavde izvesti da telo nema netrivijalnih ideala (različitih od samog tela i $\{0\}$).

IV DEO

7. Odrediti ostatak pri deljenju broja 555^{777} sa 11.
8. Izračunati determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.

ALGEBRE II, 29. septembar 2007. kod Andreje Tepavčević -plan2005- -prvi deo-

Obavezni:

G_1	a	b	c	d
a	b	a	b	d
b	b	d	a	b
c	c	a	d	c
d	d	b	c	a

G_2	0	1
0	0	1
1	1	0

1. Objasniti da li je $(\mathbb{Z}\backslash\{2007\}, *)$ grupoid, gde je $*$ binarna operacija definisana sa: $x * y = 20x - 5y + 7$.
2. Pronaći sve podgrupoide grupoida G_1.

3. Pronaći sve kongruencije grupoida G_1.

4. Da li je $h : G_1 \to G_2$ homomorfizam grupoida ako je $h : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

5. Da li je G_1 asocijativan grupoid?

Poželjni:

6. Ako je H i N normalne podgrupe grupe G. Dokazati da je HN normalna podgrupa grupe G.

7. Ako ideal I prstena R sadrži jedinicu, dokazati da je tada $I = R$. Odavde izvesti da telo nema netrivijalnih ideala (različitih od samog tela i $\{0\}$).

-drugi deo-

Obavezni:

1. Odrediti ostatak pri deljenju broja 555^{777} sa 11

2. Pronaći sva rešenja Diofantove jednačine: $37x - 48y = 14$.

3. Ako je $z = 12 + 4\sqrt{3}i$, odrediti z^{180}.

4. Odrediti jedan maksimalni zajednički delilac za polinome $x^3 - 2x^2 + 1$ i $x^2 - x - 2$.

Poželjni:

5. Odrediti sve polinome trećeg stepena, nad poljem realnih brojeva, koji su deljivi sa $x - 4$, a pri deljenju sa $x - 1$, $x - 2$ i $x - 3$ daju jednake ostatke.