Prvi kontrolni iz Analize sa algebrom
26. oktobar 2006.

1. Date su funkcije $f(x) = 4x - 3$ i $g(x) = 3x - 2$. Naći $f \circ (g^{-1} \circ f)$ i $(f^{-1} \circ g) \circ f$ i proveriti da li su bijekcije.

2. Ispitati da li je komutativna i asocijativna operacija $x*y = 2x + 2y + 3$ u skupu prirodnih brojeva i rešiti jednačinu $3 * x = 11$.

3. Koliko ima petocifrenih neparnih brojeva u kojima se ne pojavljuju cifre 0,2,5 i prva cifra je parna.

Prvi kontrolni iz Analize sa algebrom - popravni
novembar 2006.

1. Date su funkcije $f(x) = 5x - 3$ i $g(x) = 4x - 2$. Naći $f \circ (g^{-1} \circ f)$ i $(f^{-1} \circ g) \circ f$ i proveriti da li su bijekcije.

2. Ispitati da li je komutativna i asocijativna operacija $x*y = 3x + 2y + 3$ u skupu prirodnih brojeva i rešiti jednačinu $3 * x = 14$.

3. Koliko ima petocifrenih parnih brojeva u kojima se ne pojavljuju cifre 2,3,5 i prva cifra je neparna.

Drugi kontrolni iz Analize sa algebrom
31. novembar 2006.

1. Dokazati da je $n! < n^{n-1}$, ako je $n > 2$.

2. Dokazati da je broj $n^3 + 2n$ deljiv sa 3, za svako $n \in N$.

3. Odrediti ostatak pri deljenju $2222^{5555} + 5555^{2222}$ sa 7.

4. Dokazati da je $\frac{1}{\sqrt{3}-7}$ iracionalni broj.

∞ *Džoker:* U kvadratnoj tablici $n \times n$ obojeno je $n-1$ polje. Dokazati da je međusobnom zamenom vrsta i zamenom kolona, moguće postići da sva obojena polja budu ispod dijagonale tablice.

Treći kontrolni iz Analize sa algebrom
14. februar 2007.

1. Rastaviti na činioce polinom $16x^4 - 72x^3y + 108x^2y^2 - 54xy^3$.

2. Ako je $x+y+z = 0$ i $x^2+y^2+z^2 = 1$, izračunati $x^4+y^4+z^4$.

3. Odrediti najveći zajednički delilac polinoma $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x$ i
$6x^3 - 15x^2 + 6x$.

4. Dokazati nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine
$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

∞ *Džoker:* Dokazati nejednakost
$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{1}{2}.$$

Četvrti kontrolni iz Analize sa algebrom
30. maj 2007.

1. Rešiti sistem nejednačina (a je realan parametar)
$$(a-1)(a+2)x \geq a+2,$$
$$(a-1)(a+3)x \geq a+3.$$

2. Rešiti jednačinu po x
$$|2x+2| + |x-1| = 3x - a$$

3. Rešiti sistem jednačina:
$$2x + y + z = 4,$$
$$x + ay + z = 3,$$
$$x + 2ay + z = 4.$$

Peti kontrolni iz Analize sa algebrom
06. jun 2007.

1. Rešiti jednačinu $\sqrt{x-4-\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-3-\sqrt{x-2}} = 1$.

2. Izračunati vrednost izraza $\sqrt{14+7\sqrt{3}} + \sqrt{14-7\sqrt{3}}$.

3. Uprostiti izraz: $\left(\frac{p^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{3}{2}}}{p-q} - \frac{p-q}{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\sqrt{pq}\,\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}\right)^{-1}$, $p > 0$, $q > 0$, $p \neq q$.

Prvi pismeni zadatak iz Analize sa algebrom
02. novembar 2006.

1. Diskusijom po slovu dokazati da je sledeća formula tautologija:
$((p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow p) \Leftrightarrow ((p_1 \Rightarrow p) \vee \cdots \vee (p_n \Rightarrow p))$.
2. Dokazati da za proizvoljne skupove A, B i C važi:
$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
3. Ako je $f(\frac{x+1}{x-3}) + 2f(\frac{x-3}{x+1}) = x$, $x \neq 3$, $x \neq -1$, odrediti $f(x)$.
4. Na skupu $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$ definisana je operacija $\circ$ pomoću $(a,b) \circ (c,d) = (2ac+5bd, ad+bc)$. Dokazati da je $\circ$ asocijativna.
5. Na koliko načina se mogu rasporediti u niz 3 bele i 7 crnih kuglica tako da:
a) bele kuglice ne budu jedna do druge,
b) između svake dve bele kuglice postoji bar jedna crna. kuglica.

∞ *Džoker:* Nazvaćemo *delfinom* figuru koja se po šahovskoj tabli kreće jedno polje nagore, ili jedno polje nadesno, ili jedno polje dijagonalno levo nadole. Može li *delfin*, polazeći iz donjeg levog ugla table, da obiđe tačno jedanput svako polje i u sledećem koraku se vrati na polazno polje?

Drugi pismeni zadatak iz Analize sa algebrom
18. decembar 2006.

1. Na dvema dijametralno suprotnim tačkama date kružnice upisane su jedinice. U prvom koraku, svaka od dobijenih polukružnica se deli na pola i na sredini se upisuje suma brojeva na krajevima. Zatim se u svakom od sledećih koraka lukovi dobijeni u prethodnom koraku dele na po dva luka i u sredini se upisuje suma brojeva na krajevima. Kolika je suma svih brojeva koji se upišu posle n koraka?
2. Ako su p i $8p^2+1$ prosti brojevi, dokazati da je i $8p^2+2p+1$ prost broj.
3. Dokazati da je broj $2007^{2008^{2009}} - 2003^{2004^{2005}}$ deljiv sa 5.
4. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi. Ako je $\frac{4a+b}{4c+d} = \frac{5a+b}{5c+d}$ i $\frac{6a+b}{6c+d} = 7$, izračunati $\frac{11a+b}{11c+d}$.
5. Dokazati da ne postoji izraz $p(x) = ax^2+bx+c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, takav da je $p(\sqrt[3]{2}) = 0$.

∞ *Džoker:* U ravni je dato n konveksnih figura, $n > 3$. Ako svake tri figure imaju zajedničku tačku, tada i sve date figure imaju zajedničku tačku.

Treći pismeni zadatak iz Analize sa algebrom
05. april 2007.

1. Odrediti polinome $P(x)$ i $Q(x)$, ako je njihov NZS polinom $S(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$, a NZD je polinom $D(x) = x^2 - 2x + 1$.
2. Ako je $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \neq 0$, dokazati da su brojevi a, b i c različiti među sobom.
3. Ako su x, y, z pozitivni brojevi i $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, tada je $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$. Dokazati.

Četvrti pismeni zadatak iz Analize sa algebrom - završni test
07. jun 2007.

1. a) Dokazati da je relacija $\sim$ na skupu $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definisana na sledeći način:
$$(a,b) \sim (c,d) \text{ akko } a+d = b+c,$$
relacija ekvivalencije i odrediti njene klase ekvivalencije.
b) Dokazati da se među $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu izabrati tri takva broja da jedan od njih bude jednak zbiru ostala dva.
2. a) Odrediti ostatak pri deljenju $222^{555} + 555^{222}$ sa 7.
b) Da li postoje $x, y, z, t \in \mathbf{Q}$ tako da važi:
$$(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}?$$
3. a) Odrediti NZD i NZS za polinome $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ i $x^2 - x - 2$.
b) Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni vrojevi i $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokazati da je
$$(\frac{1}{a_1} - 1)(\frac{1}{a_2} - 1)\ldots(\frac{1}{a_n} - 1) \geq (n-1)^n.$$
4. a) Rešiti sledeći sistem jednačina:
$$5x - 6y + 3z - u = 4,$$
$$3x + 3y - 2z + u = 5,$$
$$-x + y + 2z - u = 6,$$
$$x + y + z + u = 7.$$
b) Rešiti nejednačinu $|\frac{2x-3}{3x-4}| - \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} \leq 0$.
5. a) Izračunati vrednost izraza $\sqrt{2 + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}$.
b) Racionalisati imenilac sledećeg razlomka $\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$, $a, b, c > 0$.