Prvi blic-kontrolni iz Analize sa algebrom 2
09. oktobar 2006.

Grupa I

1. Koristeći se Vietovim formulama, izraziti zbir kvadrata rešenja jednačine $Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$ preko njenih koeficijenata.
2. Skratiti razlomak: $\frac{x^3+1}{x^2-2x-3}$.
3. Odrediti vrednost realnog parametra m tako da rešenja jednačine $(m-3)x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ budu realna i različitog znaka.
4. Rešiti jednačinu: $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$, $a \in R$.
5. Data je jednačina $x^2 + ax + 1 = 0$, $a \in N$. Dokazati da je zbir petih stepena rešenja jednačine ceo broj.

Grupa II

1. Rešiti jednačinu $x^2 + 5|x| + 4 = 0$.
2. U jednačini $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ odrediti realan broj a tako da jedno rešenje te jednačine bude kvadrat drugog.
3. Skratiti razlomak: $\frac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}$.
4. Odrediti vrednost realnog parametra k tako da oba rešenja jednačine $2x^2 - 7x + k = 0$ budu pozitivna.
5. Naći sve vrednosti parametra a tako da je razlika rešenja jednačine $(a-2)x^2 - (a-4)x - 2 = 0$ jednaka 3.

Kontrolni iz Analize sa algebrom 2
07. mart 2008.

1. Deset autora treba da napise knjigu od sedamnaest poglavlja. Na koliko načina oni mogu da rasporede materijal ako dva autora pišu po tri poglavlja, četiri po dva, a tri po jedno poglavlje?
2. Izračunati zbir koeficijenata polinoma po x, koji se dobija binomnim razvojem $(3x-4)^{51}$.
3. Dokazati identitet $2\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} \binom{n}{2k+1-2i} = \binom{2n}{2k+1}$, za $0 \leq 2k < n$.
4. Prirodan broj sa decimalnom reprezentacijom $a_N \cdot 10^N + a_{N-1} \cdot 10^{N-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ zove se "monoton" ako je $a_N \leq a_{N-1} \leq \ldots \leq a_0$. Koliko ima monotonih brojeva sa ne više od 2008 cifara?
5. Medjunarodno društvo čine članovi iz 6 različitih zemalja. Spisak članova društva sastoji se od 1978 imena, numerisanih brojevima $1, 2, \ldots, 1978$. Dokazati da postoji član društva čiji je broj jednak zbiru brojeva dvaju članova društva iz njegove zemlje ili je jednak dvostrukom broju nekog člana društva iz njegove zemlje.

Kontrolni iz Analize sa algebrom 2
23. maj 2008.

1. Rešiti jednačinu $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$.
2. Rešiti jednačinu
$$x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}.$$
3. Za koje vrednosti realnog parametra a sistem jednačina
$$2^{1+\sqrt{xy}} + 3^{x+y-1} = a,$$
$$8^{1+\sqrt{xy}} + 27^{x+y-1} = a^3 - 3a^2 + 3a$$
ima bar jedno rešenje (x, y), $x, y \in \mathbf{R}$.
4. Rešiti jednačinu $3^{log_3^2 x} + x^{log_3 x} = 162$.
5. Rešiti nejednačinu $log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

Prvi pismeni iz Analize sa algebrom,
02. novembar 2007.

GRUPA I

1. Dokazati da za proizvoljne komplekse brojeve z_1, z_2 važi svojstvo $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.
2. Neka je $f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$. Odrediti $f(2003)+f(2007)$.
3. Rešiti jednačinu $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$.
4. U jednačini $x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0$ ($p\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$) važi $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$. Dokazati.
5. Nacrtati grafik funkcije $f(x)=|x^2+x-6|-|x^2+x-2|$.

GRUPA II

1. Neka je $f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$. Odrediti $f(2003)+f(2007)$.
2. Odrediti tri kompleksna broja modula 1 sa svojstvom da im je i zbir i proizvod jednak 1. (Uputstvo: Pokazati da je $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=1$.)
3. Ako su a, b, c dužine stranica trougla, dokazati da jednačina $a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$ ne može imati realnih rešenja.
4. Rešiti nejednačinu $\Big||x^2-1|-1\Big|<2$.
5. U jednačini $x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0$ ($p\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$) važi $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$. Dokazati.

Drugi pismeni iz Analize sa algebrom
18. januar 2008.

1. Rešiti jednačinu: $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$.
2. Rešiti nejednačinu: $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.
3. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi:
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.
4. Ako su a i b rešenja jednačine $x^2-6x+1=0$, dokazati da je a^n+b^n ($n\in\mathbf{N}$) ceo broj koji nije deljiv sa 5.
5. Košarkaški tim sačinjavaju tri beka, četiri centra i pet krila. Na koliko se načina može od njih sastaviti petorka ako u njoj moraju da igraju bar dva krila i bar jedan centar?
6. Na fudbalskom turniru takmičenje se odvija u m grupa ($m>1$) sa po $2k$ ekipa ($k>1$) u svakoj grupi. U grupama ekipe igraju svaka sa svakom i prve dve ekipe iz svake grupe ulaze u finalnu grupu. U finalnoj grupi ekipe igraju svaka sa svakom, s tim što ekipe koje su se sastale u predtakmičenju ne igraju međusobno novu utakmicu. Ako je na turniru odigrano ukupno manje od 115 utakmica i ako je taj broj utakmica neparan, odrediti m i $2k$.

Treći pismeni iz Analize sa algebrom,
25. mart 2008.

Grupa A

1. Koliko rešenja u skupu prirodnih brojeva ima jednačina $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$, ako je $2m\leq n$, $x_1\geq 2$, $x_2\geq 2,\ldots,x_m\geq 2$.
2. Naći koeficijente uz x^7 i x^9 u razvoju $(1+x^2-x^3)^8$.
3. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi jednakost
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$
4. Dokazati da ni za jedan ceo broj n broj n^2-n-11 nije deljiv sa 25.
5. Pronaći poslednje dve cifre broja $9^{8^{7^{8^{9}}}}$.

Grupa B

1. Koliko rešenja u skupu prirodnih brojeva ima jednačina $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$, ako je $2m\leq n$, $x_1\geq 2$, $x_2\geq 2,\ldots,x_m\geq 2$.
2. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi jednakost
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$
3. Koliko postoji različitih binarnih relacija na skupu od n elemenata koje nisu ni simetrične ni antisimetrične?
4. Pronaći poslednje dve cifre broja $9^{8^{7^{8^{9^{8}}}}}$.
5. Neka je A zbir cifara broja 4444^{4444} i B zbir cifara broja A. Naći zbir cifara broja B.

Završni pismeni iz Analize sa algebrom, 13. jun 2008.

Test ima 20 zadataka. Vreme za rad je 180 minuta. Svaki zadatak vredi 5 pena. Pogrešan odgovor donosi $-0,5$ poena. Ako smatrate da nijedan od ponuđenih odgovora nije tačan, upišite pod E) odgovor za koji mislite da je tačan i zaokružite E). U slučaju zaokruživanja više od jednog odgovora dobija se -1 poen.

1. Vrednost izraza $(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^4 + (\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^4$:
   $\boxed{\text{A)}}$ 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) ______.

2. Vrednost izraza $(i-1)^{124}$ je:
   $\boxed{\text{A)}}$ -2^{62}; B) 2^{62}; C) $2^{62}i$; D) $-2^{62}i$; E) ______.

3. Ako je $z+\frac{1}{z}=1$, vrednost izraza $z^{100}+\frac{1}{z^{100}}$ je:
   $\boxed{\text{A)}}$ -1; B) 1; C) $-i$; D) i; E) ______.

4. Broj rešenja jednačina $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$ u skupu realnih brojeva je:
   $\boxed{\text{A)}}$ 2; B) 1; C) 0; D) 3; E) ______.

5. Najmanja vrednost funkcije $y=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2$ je:
   A) $a+b+c$; B) $-(a+b+c)$; C) $(a+b+c)^2$; D) $-(a+b+c)^2$; $\boxed{\text{E)}}$ $\underline{a^2+b^2+c^2-\frac{(a+b+c)^2}{3}}$.

6. Za koje vrednosti realnog parametra m je broj 2 između rešenja jednačine $(m-3)x^2+2(m-4)x+m-5=0$?
   $\boxed{\text{A)}}$ $m\in(3,\frac{11}{3})$; B) $m\in(-\frac{11}{3},-3)$; C) $m\in(-3,3)$; D) $m=0$; E) ______.

7. Koliko realnih različitih rešenja ima jednačina $(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$, $a,b,c\in\mathbf{R}$?
   $\boxed{\text{A)}}$ 0; B) 1; C) 2; D) ∞; E) ______.

8. Koliko rešenja ima jednačina $\frac{4x^4+1}{2}=x\sqrt{2}\sqrt{4x^4-1}$ (smena $t=2x^2-1$):
   $\boxed{\text{A)}}$ 1; B) 0; C) 2; D) 4; E) ______.

9. Ako su a i b rešenja kvadratne jednačine $x^2-3x+3=0$ tada je a^n+b^n ceo broj samo za prirodne brojeve n:
   A) $n\le 1$; B) $n\le 2$; C) $n\le 3$; D) $n\le 10$; $\boxed{\text{E)}}$ sve.

10. Ako je $\binom{n}{8}=\binom{n}{9}$, tada je $\binom{n}{16}$ jednako:
    $\boxed{\text{A)}}$ 17; B) 18; C) 19; D) 16; E) ______.

11. Na koliko se načina broj 415800 može predstaviti kao proizvod dva uzajamno prosta broja?
    $\boxed{\text{A)}}$ 16; B) 17; C) 15; D) 20; E) ______.

12. Nači koeficijent uz x^4 u razvoju binoma $(x+3x^{-1})^8$.
    $\boxed{\text{A)}}$ 252; B) 200; C) 250; D) 306; E) ______.

13. Odrediti broj permutacija cifara $1,2,3,4,5,6,7$ u kojima cifra 1 nije na prvom, a cifra 7 nije na poslednjem mestu.
    $\boxed{\text{A)}}$ 3720; B) 5160; C) 4440; D) 6600; E) ______.

14. Ostatak pri deljenju broja 2000^{2008} sa 13 je:
    $\boxed{\text{A)}}$ 3; B) 2; C) 1; D) 4; E) ______.

15. Koliko celobrojnih rešenja ima jednačina $\sqrt{x^3+y^3+z^3}=2000$?
    A) 1; B) 2; C) 3; D) ∞; $\boxed{\text{E)}}$ $\underline{0}$.

16. Za koliko prirodnih brojeva n je 2^n-1 potpun kvadrat?
    $\boxed{\text{A)}}$ 1; B) 0; C) 2; D) 21; E) ______.

17. Koliko rešenja ima jednačina $6\cdot 9^{\frac{1}{x}}-13\cdot 6^{\frac{1}{x}}+6\cdot 4^{\frac{1}{x}}=0$?
    $\boxed{\text{A)}}$ 2; B) 0; C) 1; D) 3; E) ______.

18. Jednačina $2^x+2^{3-2x}=a$ ima bar jedno realno rešenje ako i samo ako je:
    A) $a>0$; B) $a<\frac{2}{3}$; C) $a<0$; D) $a>\frac{2}{3}$; $\boxed{\text{E)}}$ $\underline{a\ge 3\sqrt[3]{2}}$.

19. Koliko rešenja ima jednačina $3^{1+\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=27$?
    $\boxed{\text{A)}}$ 3; B) 0; C) 1; D) 2; E) ______.

20. Rešenje nejednačine $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$ je:
    A) $x\in(0,\frac{1}{2})$; B) $x\in(1,2)$; C) $x\in(1,2)\cup(3,6)$; D) $x\in(3,6)$; $\boxed{\text{E)}}$ $\underline{x\in(0,\frac{1}{2})\cup(1,2)\cup(3,6)}$.