Kontrolni iz Analize sa algebrom 3
3. oktobar 2008.

1. Naći modul i argument kompleksnog broja: $\frac{(1+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^2}$.
2. Naći skup tačaka u z-ravni određen relacijom $|z-i| = |z+1|$.
3. Rešiti jednačinu $z^3 = (\frac{8(1+i)}{\sqrt{2}})^2$.
4. U ravni su dati trougao $A_1A_2A_3$ i tačka P_0. Označimo $A_s = A_{s-3}$ za svaki prirodan broj $s \geq 4$. Konstruišimo niz tačaka $P_0, P_1, P_2, \ldots$ tako da se tačka P_{k+1} dobija rotacijom tačke P_k za $120°$ u smeru kazaljke na satu oko tačke A_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Dokazati da ako je $P_{1986} \equiv P_0$, tada trougao $A_1A_2A_3$ mora biti jednakostraničan.
5. Dokazati da je $\binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} + 9\binom{n}{5} - \cdots = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{\sqrt{3}} \sin\frac{2n\pi}{3}$.

Prvi pismeni zadatak iz Analize sa algebrom 3
14. novembar 2008.

1. Naći sve jedanaeste korene broja $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. U ravni su dati trougao $A_1A_2A_3$ i tačka P_0. Označimo $A_s = A_{s-3}$ za svaki prirodan broj $s \geq 4$. Konstruišimo niz tačaka $P_0, P_1, P_2, \ldots$ tako da se tačka P_{k+1} dobija rotacijom tačke P_k za $120°$ u smeru kazaljke na satu oko tačke A_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Dokazati da ako je $P_{1986} \equiv P_0$, tada trougao $A_1A_2A_3$ mora biti jednakostraničan.
3. Dokazati da je polinom $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}$ deljiv sa $x^2 + x + 1$.
4. Ako su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koreni polinoma $5x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 15x + 17$, izračunati vrednost izraza $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\delta)(\alpha+\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta)$.
5. Odrediti sve polinome $p(x)$ takve da važi $2p(x) = p(x+2) + p(x-2)$ za svako x i $p(0) = 0$.

Drugi pismeni zadatak iz Analize sa algebrom 3
12. decembar 2008.

1. Za svaka dva realna broja a i b, $a < b$, postoji racionalan broj x, takav da je $a < x < b$.
2. Neka je $A = \{\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Naći $\inf A$ i $\sup A$.
3. Dokazati da za realne brojeve x i y važi nejednakost $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
4. Dokazati da je broj $0,392781243\ldots$ koji je dobijen tako što su iza decimalnog zareza ispisani redom prirodni brojevi $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \ldots$, iracionalan.
5. Odrediti sve racionalne brojeve r za koje je $\log_2 r$ i sam racionalan broj.

75%. Pronaći realne brojeve $a, b > 0$, takve da je $a, b, a^b \notin \mathbf{Q}$.

Drugi pismeni zadatak iz Analize sa algebrom 3
16. decembar 2008.

1. Svaki niz umetnutih odsečaka na realnoj pravoj ima neprazan presek.
2. Neka je $A = \{\frac{2n+1}{2m} \mid n, m \in \mathbf{N}\}$. Naći $\inf A$ i $\sup A$.
3. Koristeći aksiome polja racionalnih brojeva dokazati da je $x \cdot 0 = 0$ za svako $x \in \mathbf{Q}$.
4. Dokazati da je broj $0,13579111315\ldots$, koji je dobijen tako što su iza decimalnog zareza ispisani redom svi neparni prirodni brojevi, iracionalan.
5. Pronaći realne brojeve $a, b > 0$, takve da $a \in \mathbf{Q}$ i $b, a^b \notin \mathbf{Q}$.

Kontrolni iz Analize sa algebrom 3
18. mart 2009.

1. Dokazati da je niz $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = xx_{n-1}x_{n+1}$, $n \in N$, $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq 0)$ periodičan.
2. Brojevi a, b, c su uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokazati da su i brojevi a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2, b^2+bc+c^2 takodje uzastopni članovi aritmetičkog niza.
3. Izračunati zbir $1 + 2^2q + \cdots + (n+1)^2q^n$, $q \neq 1$.
4. Rešiti diferencnu jednačinu: $x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+x_n}{1-x_n\sqrt{3}}$, $n \geq 0$, $x_0 = 0$.
5. Naći zbir reda: $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots$.

Kontrolni iz Analize sa algebrom 3
25. mart 2009.

1. Tri broja su uzastopni članovi rastućeg aritmetičkog niza. Zbir tih brojeva je 3, a zbir njihovih kubova je 4. Odrediti te brojeve.
2. Zbir tri boja koji su uzastopni članovi geometrijskog niza je 13, a zbir njihovih kvadrata je 91. Naći te brojeve.
3. Dokazati sledeće svojstvo Fibonačijevih brojeva f_n: $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$.
4. Naći zbir reda: $\frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots$.
5. Naći graničnu vrednost niza $a_n = \sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}$ (n korena).

(T1) Rešiti diferencnu jednačinu $x_{n+1} = -\frac{1}{10}x_n$, $n \geq 0$, $x_0 = a$, $a \in R$.

(T2) Po definiciji dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

(T3) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b > 0$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

(T4) Dokazati da je niz $a_{n+1} = \frac{4+a_n}{2}$, $n \in N$; $a_1 = 0$, monoton i ograničen i naći njegovu graničnu vrednost.

Treći pismeni zadatak iz Analize sa algebrom 3
8. maj 2009.

1. Izračunati zbir $\frac{5}{2} + 5 + \frac{19}{2} + 18 + \cdot + \frac{n+2^{n+1}}{2}$.

2. Po definiciji dokazati $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{n} = 0$.

3. Ako je $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$, $n \geq 0$, dokazati da je
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

4. Naći najmanju vrednost funkcije $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ za $x > -1$.

5. Dokazati periodičnost i naći osnovni period funkcije $f(x) = \mathrm{tg} x + \sin 2x$.

Treći pismeni zadatak iz Analize sa algebrom 3
20. maj 2009.

1. Naći aritmetički niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ako je poznato da je $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ i $a_1a_3a_5 = 80$.

2. Po definiciji dokazati $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2-n+2} = 0$.

3. Za $q \in \mathbf{R}$, $|q| < 1$, niz (a_n) dat je formulom
$$a_n = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}.$$
Naći $\lim_{n\to\infty} a_n$.

4. Naći najveću vrednost funkcije $f(x) = \frac{x}{1-x+x^2}$. Dokazati.

5. Da li je funkcija $f(x) = \sin\sqrt{x}$ periodična? Dokazati.

Završni pismeni iz Analize sa algebrom, 10. jun 2009.

Test ima 20 zadataka. Vreme za rad je 180 minuta. Svaki zadatak vredi 5 pena. Pogrešan odgovor donosi $-0,5$ poena. Ako smatrate da nijedan od ponuđenih odgovora nije tačan, upišite pod E) odgovor za koji mislite da je tačan i zaokružite E). U slučaju zaokruživanja više od jednog odgovora dobija se -1 poen.

1. Jedno rešenje jednačine $z^4 = i(z-2i)^4$ je:
   $\boxed{\text{A)}}$ $i + ctg\frac{\pi}{16}$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
2. Vrednost izraza $(\sqrt{3} + \frac{1-i}{1+i})^{20}$ je:
   $\boxed{\text{A)}}$ $2^{19}(-1+i\sqrt{3})$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
3. Ostatak pri deljenju polinoma $x^{1998} - x^{1999} + x^{2000}$ sa x^3+1 je:
   $\boxed{\text{A)}}$ $x^2 - x + 1$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
4. Koreni jednačine $x^3 + 4x + 2 = 0$ su α, β i γ. Tada su $\alpha + \frac{1}{\alpha}$, $\beta + \frac{1}{\beta}$, $\gamma + \frac{1}{\gamma}$ koreni jednačine:
   $\boxed{\text{A)}}$ $x^3+2x^2+x+\frac{13}{2}=0$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
5. Rešenja jednačine $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ su za $k = 1, \ldots, 5$:
   A) $\cos(\frac{k\pi}{3}) + i\sin(\frac{k\pi}{3})$; B) ; C) 2; D) ; E) ____________.
6. Neka je $A = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$ i $B = \{\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Tada je $\inf(A \cup B)$:
   $\boxed{\text{A)}}$ $1 - \sqrt{2}$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
7. Prva tri člana aritmetičkog niza $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kod koga važi da je $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ i $a_1 a_3 a_5 = 80$ su:
   $\boxed{\text{A)}}$ $2, -1, -4$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
8. Izračunati zbir $\frac{5}{2} + 5 + \frac{19}{2} + \cdots + \frac{n+2^{n+1}}{2} + \cdots + \frac{100+2^{101}}{2}$:
   $\boxed{\text{A)}}$ $2523 + 2^{101}$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
9. Neka su f_n Fibonačijevi brojevi. Tada je $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2009}$:
   $\boxed{\text{A)}}$ f_{2010}; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
10. Izračunati $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)})$:
    $\boxed{\text{A)}}$ $\frac{1}{4}$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
11. Domen funkcije $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3} + \log_3(8-x)$ je:
    $\boxed{\text{A)}}$ $[2,3) \cup (3,8)$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
12. Skup vrednosti funcije $\frac{1}{2} + \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$ je:
    $\boxed{\text{A)}}$ $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
13. Osnovni period funkcije $f(x) = \cos\sqrt{x+1}$ je:
    $\boxed{\text{A)}}$ ne postoji; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
14. Ako je $f(\frac{2x-1}{x+1}) = x^2 + 2x$ onda je $f(0) + f(1) =$:
    $\boxed{\text{A)}}$ $\frac{37}{4}$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
15. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+1)(x+2)} - x) =$
    $\boxed{\text{A)}}$ $1,5$; B) ; C) ; D) ∞; E) ____________.
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x - \sin 5x}{\sin 2x} =$
    $\boxed{\text{A)}}$ $\frac{3}{2}$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
17. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{3n-4}{3n+2})^{\frac{n+1}{3}} =$
    $\boxed{\text{A)}}$ $e^{-\frac{2}{3}}$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
18. Prvi izvod funkcije $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$ je
    $\boxed{\text{A)}}$ $\frac{1}{1+x^2}$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
19. 2009-ti izvod funkcije $f(x) = \sin^2 x$ je:
    $\boxed{\text{A)}}$ $2^{2008}\sin 2x$; B) ; C) ; D) ; E) ____________.
20. U polinomu $x^{10} - 5x^6 + 5x^4 - 1$ broj 1 je koren reda:
    $\boxed{\text{A)}}$ 3; B) ; C) ; D) ; E) ____________.

Završni pismeni iz Analize sa algebrom, 10. jun 2009.

Test ima 10 zadataka. Vreme za rad je 90 minuta. Svaki zadatak vredi 10 pena. Pogrešan odgovor donosi -1 poena. Ako smatrate da nijedan od ponuđenih odgovora nije tačan, upišite pod E) odgovor za koji mislite da je tačan i zaokružite E). U slučaju zaokruživanja više od jednog odgovora dobija se -2 poen.

1. Jedno rešenje jednačine $z^4 = (z-2i)^4$ je:
   $\boxed{\text{A)}}$ $i + ctg\frac{\pi}{4}$; B) $2i + ctg\frac{\pi}{16}$; C) $i + ctg\frac{\pi}{16}$; D) $2i - ctg\frac{\pi}{4}$; E) __________.

2. Ostatak pri deljenju polinoma $x^{1998} + x^{1999} + x^{2000}$ sa $x^3 - 1$ je:
   A) $x^2 + x - 1$; B) $x^2 - x + 1$; $\boxed{\text{C)}}$ $x^2 + x + 1$; D) $x^3 - x + 1$; E) __________.

3. Neka je $A = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$ i $B = \{2\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Tada je $\inf(A \cup B)$:
   A) $\sqrt{2} - 1$; B) $2\sqrt{2} - 1$; C) 1; D) $1 - \sqrt{2}$; $\boxed{\text{E)}}$ $\underline{0}$.

4. Izračunati zbir $\frac{5}{2} + 5 + \frac{17}{2} + \cdots + \frac{3n+2^n}{2} + \cdots + \frac{150+2^{50}}{2}$:
   A) $\frac{3823}{2} + 2^{50}$; $\boxed{\text{B)}}$ $\frac{3823}{2} + 2^{50}$; C) $1523 + 2^{100}$; D) $\frac{3825}{2} + 2^{50}$; E) __________.

5. Izračunati $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(4n)(4n+1)})$:
   A) $\frac{3}{4}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{D)}}$ 1; E) __________.

6. Domen funkcije $f(x) = e^{\frac{\sqrt{x-3}}{x-3}} + \log_4(16 - x^2)$ je:
   A) $\mathbf{R}$; B) $[3,4]$; C) $[2,3) \cup (3,16)$; $\boxed{\text{D)}}$ $(3,4)$; E) __________.

7. Skup vrednosti funcije $\frac{1}{2} + \sin^2 2x - \cos^2 2x$ je:
   A) $[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$; $\boxed{\text{B)}}$ $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$; C) $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$; D) $[\frac{3}{2}, 4]$; E) __________.

8. Ako je $f(\frac{2x}{x+1}) = x^2 + 2x$ onda je $f(0) + f(1) = :$
   $\boxed{\text{A)}}$ 3; B) 2; C) $\frac{5}{2}$; D) 6; E) __________.

9. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+1)(x-2)} - x + 1) =$
   A) $1,5$; B) $2,5$; $\boxed{\text{C)}}$ $0,5$; D) ∞; E) __________.

10. Prvi izvod funkcije $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{2+2x}{1-x}$ je
    $\boxed{\text{A)}}$ $\frac{1}{1+x^2}$; B) $\frac{1+x+x^2}{2}$; C) $\cos(x + x^2)$; D) $\frac{x}{1+x^2}\cdot\cos(x + x^2)$; E) __________.