Matematicke osnove informatike, IIA, 30.01.2004.

1. Nacrtati Hase dijagrame svih neizomorfnih distributivnih mreža sa manje od šest elemenata.
2. Odrediti sve minimalne DNF i nacrtati što jednostavnije prekidačko kolo koje izdvaja sve složene brojeve iz skupa $\{3, 4, ..., 13\}$, u kome su brojevi predstavljeni u binarnom obliku
3. Verovatnoća da student položi algebru u junskom roku je $0,3$. Ako je student prethodno položio matematičku logiku, verovatnoća da položi algebru je $0,45$, a ako student nije položio matematičku logiku, verovatnoća da ne položi algebru je $0,9$. Izračunati srednju informaciju koju o tome da li je student položio logiku ili ne daje podatak o tome da li je položio algebru ili ne.
4. U sledećim kodovima utvrditi zašto nisu optimalni i konstruisati odgovarajući optimalni kod:

$$\begin{array}{c|cccc} p_i & 0,6 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ \hline & 0 & 10 & 11 & 01 \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccccc} p_i & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ \hline & 000 & 001 & 010 & 001 & 100 \end{array}.$$

5. Dokazati da kod $W_{n,k}$ ne može u opštem slučaju istovremeno da ispravlja greške oblika $0 \to 11$ i $1 \to 00$ (moguća je samo jedna greška na jednoj reči).

Matematicke osnove informatike, IIA, 30. januar 2004.

1. Dokazati da u svakoj mreži L, za sve $x, y, z \in L$ važi:

$$((x \wedge y) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee y))) \wedge y \leq (x \vee y) \wedge (z \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee (y \wedge z)).$$

2. Neka je dat konačan skup $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ i neka je $P(A)$ odgovarajuća Bulova algebra partitivnog skupa. Dokazati da je $P(A) \cong B_2^n$.
3. Dokazati da na proizvoljnoj Bulovoj algebri ima tačno 2^{2^n} različitih Bulovih funkcija sa n promenljivih.
4. Ako su F i G Bulovi izrazi, a x Bulova promenljiva, pokazati da je $F \vee G = x \cdot F \vee G$ ako i samo ako je $F \leq x \vee G$.
5. Odrediti sve minimalne DNF i nacrtati što jednostavnije logičko kolo za izdvajanje brojeva koji nisu deljivi ni sa tri ni sa četiri od brojeva 2 do 14, ako su brojevi dati u binarnom zapisu sa četiri cifre.

Matematicke osnove informatike I, 25. jun 2004.

1. Dokazati da je mreža L modularna ako i samo ako je zadovoljen uslov:

$$\text{iz } x \wedge z = y \wedge z, \ x \vee z = y \vee z, \ \text{i } x \leq y \text{ sledi } x = y.$$

2. Neka je dat konačan skup $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ i neka je $P(A)$ odgovarajuća Bulova algebra partitivnog skupa. Dokazati da je $P(A) \cong B_2^n$.
3. Dokazati da na proizvoljnoj Bulovoj algebri ima tačno 2^{2^n} različitih Bulovih funkcija sa n promenljivih.

4. Ako su F i G Bulovi izrazi, a x Bulova promenljiva, pokazati da je $F \vee G = x \cdot F \vee G$ ako i samo ako je $F \leq x \vee G$.

5. Konstruisati logičko kolo koje realizuje deljenje četvorocifrenog binarnog broja brojem 3.Izlaz neka sadrži količnik i ostatak, u binarnom zapisu.

Matematicke osnove informatike, IIA, 10. septembar 2004.

1. Da li je navedeni parcijalno uređeni skup predstavljen Hase dijagramom mreža? Obrazložiti.

2. Dokazati da je funkcija f koja preslikava parcijalno uređeni skup $(A, \leq)$ u parcijalno uređeni skup $(B, \leq)$ izotona ako i samo ako je inverzna slika svakog ideala ideal.

3. Odrediti sve minimalne DNF i nacrtati što jednostavnije logičko kolo koje izdvaja brojeve 0,1,2,6,7,9,10,12,13,15 predstavljene u binarnom zapisu iz skupa brojeva $\{0, 1, 2, ..., 15\}$.

4. Neka je dat konačan skup $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ i neka je $P(A)$ odgovarajuća Bulova algebra partitivnog skupa. Dokazati da je $P(A) \cong B_2^n$.

5. Dokazati da na proizvoljnoj Bulovoj algebri ima tačno 2^{2^n} različitih Bulovih funkcija sa n promenljivih.

Matematicke osnove informatike, 22.09.2004.

1. Neka je L distributivna i komplementirana mreža. Dokazati da je L i jednoznačno komplementirana. Dati primer distributine mreže
   (a) u kojoj ni jedan elemenat nema komplement
   (b) u kojoj svi elementi imaju komplemente
   (c) u kojoj postoje elementi sa komplementima, ali mreža nije komplementirana.

2. Odrediti minimalnu DNF i konstruisati što jednostavnije logičko kolo koje realizuje korenoanje četvorocifrenog binarnog broja, a nije definisano kad koren nije ceo broj.

3. Verovatnoća da prosečna temperatura vazduha u junu u jednom primorskom mestu bude preko $21°C$ je 0,48. Ako je prosečna temperatura mora preko $21°C$, verovatnoća da i prosečna temperatura vazduha bude preko $21°C$ je 0,6, a ako je prosečna temperatura mora ispod $21°C$, verovatnoća da i prosečna temperatura vazduha bude ispod $21°C$ je 0,8. Izračunati srednju informaciju koju o temperaturi vazduha daje tempertura mora.

4. Prefiksni kod je kompletan ako se dodavanjem svake nove kodne zamene dobije kod koji nije prefiksni. Ispitati da li je kod $V = \{a, ba, bbc\}$ kompletan nad alfabetom $A = \{a, b, c\}$. Ako nije, dopuniti ga do kompletnog prefiksnog koda.

5. Dokazati da nijedan binarni kod sa $1 + 2^k$ kodnih zamena ne većih od k, ne omogucuje jednoznačno dekodiranje.

Matematicke osnove informatike I, 28. septembar 2004.

1. Dokazati da u svakoj mreži L, za sve $x, y, z \in L$ važi:

$$((x \wedge y) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee y))) \wedge y \leq (x \vee y) \wedge (z \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee (y \wedge z)).$$

2. Dokazati da je mreža L modularna ako i samo ako je zadovoljen uslov:

$$\text{iz } x \wedge z = y \wedge z,\ x \vee z = y \vee z,\ \text{ i } x \leq y \text{ sledi } x = y.$$

3. Odrediti sve minimalne DNF i nacrtati što jednostavnije prekidačko kolo koje izdvaja sve složene brojeve iz skupa $\{3, 4, ..., 13\}$, u kome su brojevi predstavljeni u binarnom obliku.

4. Svaka minimalna DNF Bulovog izraza F je disjunkcija jedne ili više prostih imlikanti tog Bulovog izraza. Dokazati.

5. Svaka konačna Bulova algebra je atomarna. Dokazati.

Matematicke osnove informatike,

1. Da li je navedeni parcijalno uređeni skup predstavljen Hase dijagramom mreža? Obrazložiti.

2. Konstruisati logičko kolo koje realizuje deljenje četvorocifrenog binarnog broja brojem 4.Izlaz neka sadrži količnik i ostatak, u binarnom zapisu.

3. Neka je $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, n \geq 3, p(x_1) = a$ i $p(x_2) = b$. Dokazati da je $H(X) \leq -a \log_2 a - b \log_2 b - (1-a-b) \log_2 \frac{1-a-b}{n-2}$, i da se jednakost dostiže ako i samo ako su svi događaji osim x_1 i x_2 jednako verovatni. (Uputstvo: Ako je $n \in N, p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n > 0$ i $\sum_{i=1}^{n} q_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i$, tada je $-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 q_i$, gde jednakost važi akko je za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}, p_i = q_i$).

4. Na ulazu u BSC nula se javlja sa verovatnoćom 0,30, a na izlazu sa verovatnoćom 0,42. Odrediti verovatnoću greške u prenosu, srednju uzejamnu informaciju ulaznog i izlaznog sistema i kapacitet kanala. Kodirati uređene trojke ulaznog alfabeta optimalnim ternarnim kodom.

5. Data je generišuća matrica linearnog koda

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Dekodirati reč 111111001011101.

Matematicke osnove informatike I, 30. septembar 2003.

- Neka su A, B i C skupovi delitelja brojeva 70,68 i 6, redom. Neka su na datim skupovima definisane operacije na sledeći način: $a \cdot b = NZD\{a, b\}$, $a \vee b = NZS\{a, b\}$ i $a' = n/a$, pri čemu je n največi broj na posmatranim skupovima.
  a) Da li je $(B, \cdot, \vee, ', 1, 68)$ Bulova algebra?
  b) Ako je $(A, \cdot, \vee, ', 1, 70)$ Bulova algebra, pronaći sve njene Bulove podalgebra.
  c) Pronaći Bulov homomorfizam algebre $(A, \cdot, \vee, ', 1, 70)$ u $(C, \cdot, \vee, ', 1, 6)$.

- Odrediti sve minimalne DNF i nacrtati što jednostavnije prekidačko kolo za izdvajanje brojeva $0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15$ iz skupa brojeva 0 do 15 datih u binarnom zapisu sa četiri cifre.

Matematicke osnove informatike, 06.11.2004.

1. Nacrtati Hase dijagrame svih neizomorfnih distributivnih mreža sa manje od šest elemenata.

2. Odrediti sve minimalne DNF i nacrtati što jednostavnije prekidačko kolo koje izdvaja sve složene brojeve iz skupa $\{3, 4, ..., 13\}$, u kome su brojevi predstavljeni u binarnom obliku

3. Dati su sistemi
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \text{ i } Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}.$$
   Odrditi koji sistem ima veću entropiju ako je $p_1 = p_2 = p_3$ i $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$.

4. U sledećim kodovima utvrditi zašto nisu optimalni i konstruisati odgovarajući optimalni kod:

p_i	0,55	0,2	0,05	0,05	0,15
	1	01	001	0001	0000

,

p_i	0,2	0,2	0,19	0,12	0,11	0,09	0,09
	10	11	000	010	011	0010	00111

.

5. Za izvor (A, P), $P = \{0,35; 0,25; 0,10; 0,10; 0,10; 0,07; 0,03\}$ konstruisati binarni kod metodom Fanoa i odrediti prosečnu dužinu kodnih zamena.