PRVI TEST IZ MATEMATIČKIH OSNOVA INFORMATIKE(2007/08)
kod prof. Gradimira Vojvodića
novembar 2007
I grupa

1. Dokazati matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj $n \geq 4$ važi $2^n > 2n + 2$.
2. Metodom diskusije po slovu dokazati $\models (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge (q \vee p))$.
3. Naći formulu $F(p, q, r)$ koja je tačna akko tačno dva slova od p, q i r ima vrednost $\top$.
4. Izraziti operaciju $\Leftrightarrow$ preko operacija $\neg$ i $\wedge$.
5. Dokazati: $A \vee B, \neg B \vdash A$.

II grupa

1. Dokazati matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj $n \geq 3$ važi $3^n > 3n + 5$.
2. Metodom diskusije po slovu dokazati $\models \neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \wedge (p \vee (q \wedge p))$.
3. Naći formulu $F(p, q, r)$ koja je tačna akko tačno dva slova od p, q i r ima vrednost $\perp$.
4. Izraziti operaciju $\not\Leftrightarrow$ preko operacija $\neg$ i $\vee$.
5. Dokazati: $A \vee B, \neg A \vdash B$.

MATEMATIČKE OSNOVE INFORMATIKE(2007/08), KOLOKVIJUM I, 01. decembar 2007.
GRUPA I

1. Naći bar jednu formulu F (ako postoji) takvu da formula $((q \wedge \neg p) \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow (F \Rightarrow (q \vee \neg r))$ bude tautologija.
2. Pokazati da je valjana formula: $(\forall x)(\exists y)R(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \Rightarrow R(y, x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)) \Rightarrow (\forall x)R(x, x)$.

GRUPA II

1. Naći bar jednu formulu F (ako postoji) takvu da formula $((r \wedge \neg p) \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow ((q \vee \neg r) \Rightarrow F)$ bude tautologija.
2. Pokazati da je valjana formula: $(\exists x)(\forall y)R(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \Rightarrow R(y, z)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)R(y, x)$.

DRUGI TEST IZ MATEMATIČKIH OSNOVA INFORMATIKE(2007/08)
kod prof. Gradimira Vojvodića, januar 2008

I grupa Prezime i ime:______________________
br.ind.:_______

1. Naći preneks formu sledeće formule:
$$(\exists x)\neg(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow (\forall z)(\neg P(z)).$$
2. Izvršiti skolemizaciju formule dobijene u prethodnom zadatku.
3. Dokazati: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
4. Da li je relacija ρ na skupu N relacija ekvivalencije, ako je:
$$x\rho y \Leftrightarrow \text{ u zapisu broja } x \text{ i } y \text{ koriste se različite cifre?}$$
5. Pronaći primer funkcije koja je sirjektivna i nije injektivna.

II grupa

1. Naći preneks formu sledeće formule:
$$(\exists z)(\neg P(z)) \Rightarrow (\forall x)\neg(\exists y)(P(x) \vee Q(y)).$$
2. Izvršiti skolemizaciju formule dobijene u prethodnom zadatku.
3. Dokazati: $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cup \overline{C})$.
4. Da li je relacija ρ na skupu N relacija poretka, ako je:
$$x\rho y \Leftrightarrow \text{ broj cifara broja } x \text{ je veći od broja cifara}$$
$$\text{broja } y?$$
5. Pronaći primer funkcije koja je injektivna i nije sirjektivna.

III grupa

1. Naći preneks formu sledeće formule:
$$(\forall x)\neg(\exists y)(P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow (\forall z)(\neg P(z)).$$
2. Izvršiti skolemizaciju formule dobijene u prethodnom zadatku.
3. Dokazati: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
4. Da li je relacija ρ na skupu N relacija ekvivalencije, ako je:
$$x\rho y \Leftrightarrow \text{ u zapisu broja } x \text{ i } y \text{ koriste se iste cifre?}$$
5. Pronaći primer funkcije koja nije sirjektivna i nije injektivna.

DRUGI KOLOKVIJUM IZ TEORIJSKIH OSNOVA INFORMATIKE I
kod prof. Gradimira Vojvodića
januar 2008

Grupa I.

1. Dokazati: ako su ρ i σ relacije na skupu A, $\rho \subseteq \sigma$, σ refleksivna i tranzitivna, ρ refleksivna, onda je $\sigma \circ \rho \circ \sigma \circ \rho \subseteq \sigma \circ \rho$.

2. Ako su $f : A \to C$ i $g : B \to D$ bijekcije, dokazati da je i $h : A \times B \to D \times C$ data sa $h((x, y)) = (g(y), f(x))$ bijekcija.

Rešenja.

1. Kako je $\rho \subseteq \sigma$ sledi da je $\sigma \circ \rho \circ \sigma \circ \rho \subseteq \sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \rho$ (1), a iz tranzitivnosti relacije σ, tj. $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$ sledi da je $\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \rho \subseteq \sigma \circ \rho$ (2). Na osnovu tranzitivnosti inkluzije, (1) i (2), dobijamo da je $\sigma \circ \rho \circ \sigma \circ \rho \subseteq \sigma \circ \rho$.

2. 1-1: Pretpostavimo da je $h(x, y) = h(z, t)$. To znači da je $(g(y), f(x)) = (g(t), f(z))$, odakle sledi da je $f(x) = f(z)$ i $g(y) = g(t)$. Kako su funkcije f i g bijekcije, sledi da su f i g "1-1" odakle zaključujemo da je $x = z$ i $y = t$. Prema tome, važi da je $(x, y) = (z, t)$.

   NA: Neka je $(d, c) \in D \times C$. Dokazujemo da postoji $(a, b) \in A \times B$ takvo da $h((a, b)) = (d, c)$. Iz pretpostavke $(d, c) \in D \times C$ sledi da je $d \in D$ i $c \in C$. Kako su funkcije f i g bijekcije, sledi da postoje njima inverzne funkcije f^{-1} i g^{-1}, i da je $f^{-1}(c) \in A$ i $g^{-1}(d) \in B$ odakle sledi da za $(a, b) = (f^{-1}(c), g^{-1}(d))$ važi da je $h((a, b)) = (g(b), f(a)) = (g(g^{-1}(d)), f(f^{-1}(c))) = (d, c)$.

Grupa II.

1. Dokazati: ako su ρ i σ relacije na skupu A, $\rho \subseteq \sigma$, σ refleksivna i tranzitivna, ρ refleksivna, onda je $\rho \circ \sigma \circ \rho \circ \sigma \subseteq \rho \circ \sigma$.

2. Ako su $f : A \to C$ i $g : B \to D$ bijekcije, dokazati da je i $h : C \times D \to A \times B$ data sa $h((x, y)) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y))$ bijekcija.

Rešenja.

1. Kako je $\rho \subseteq \sigma$ sledi da je $\rho \circ \sigma \circ \rho \circ \sigma \subseteq \rho \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma$ (1), a iz tranzitivnosti relacije σ, tj. $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$ sledi da je $\rho \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma \subseteq \rho \circ \sigma$ (2). Na osnovu tranzitivnosti inkluzije, (1) i (2), dobijamo da je $\rho \circ \sigma \circ \rho \circ \sigma \subseteq \rho \circ \sigma$.

2. Kako su funkcije f i g bijekcije, sledi da postoje njima inverzne funkcije f^{-1} i g^{-1}.

   1-1: Pretpostavimo da je $h(x, y) = h(z, t)$. To znači da je $(f^{-1}(x), g^{-1}(y)) = (f^{-1}(z), g^{-1}(t))$, odakle sledi da je $f^{-1}(x) = f^{-1}(z)$ i $g^{-1}(y) = g^{-1}(t)$. Kako su funkcije f i g bijekcije, odnosno f^{-1} i g^{-1} bijekcije, sledi da su f^{-1} i g^{-1} "1-1" odakle zaključujemo da je $x = z$ i $y = t$. Prema tome, važi da je $(x, y) = (z, t)$.

   NA: Neka je $(a, b) \in A \times B$. Dokazujemo da postoji $(c, d) \in C \times D$ takvo da $h((c, d)) = (a, b)$. Iz pretpostavke $(a, b) \in A \times B$ sledi da je $a \in A$ i $b \in B$, pa $f(a) \in C$ i $g(b) \in D$. Tada za $(c, d) = (f(a), g(b))$ važi da je $h((c, d)) = (f^{-1}(c), g^{-1}(d)) = (f^{-1}(f(a)), g^{-1}(g(b))) = (d, c)$.

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2007/08),
POPRAVNI KOLOKVIJUM - Deo I, 24. januar 2008.

1. Naći bar jednu formulu F (ako postoji) takvu da formula $(F \Leftrightarrow (r \wedge \neg p)) \Leftrightarrow (F \vee (q \vee \neg r))$ bude tautologija.

2. Pokazati da je valjana formula: $(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow R(y,z)) \Rightarrow (\forall x)R(x,x)$.

Rešenja.

1. Za valuaciju $v(p) = \perp,\ v(q) = \perp,\ v(r) = \top$ početna iskazna formula se svodi na izraz $\neg F \Leftrightarrow F$, pa bez obzira na vrednost iskazne formule F za datu valuaciju početna formula će imati vrednost $\perp$. Prema tome, iskazna formula $(F \Leftrightarrow (r \wedge \neg p)) \Leftrightarrow (F \vee (q \vee \neg r))$ nije tautologija za svaku iskaznu formulu F.

2. Pokažimo da za formule:

   (a) $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$,
   (b) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(x,z) \Rightarrow R(y,z))$,
   (c) $(\exists x)\neg R(x,x)$,

   ne postoji model. Pretpostavimo suprotno. Tada iz tačnosti (c) sledi da postoji element $n \in D$ takav da je $\overline{R}(n,n) = \perp$. Tada iz tačnosti (a) sledi da postoje elementi $m \in D$ takav da je $\overline{R}(m,y') = \top$ tačno za svako $y' \in D$, pa za i $y' = n$, tj. $\overline{R}(m,n) = \top$. Iz (b) kako za svako $x', y', z' \in D$ važi da je $\overline{R}(x',y') \wedge \overline{R}(x',z') \Rightarrow \overline{R}(z',y')$ tačno tada je i za $x' = m,\ y' = n,\ z' = n$ tačno $\overline{R}(m,n) \wedge \overline{R}(m,n) \Rightarrow \overline{R}(n,n)$. Medjutim, kako je $\overline{R}(m,n) \wedge \overline{R}(m,n) = \top$ sledi da je $\overline{R}(n,n) = \top$, kontradikcija.

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2007/08),
POPRAVNI KOLOKVIJUM - Deo II, 24. januar 2008.

1. Neka su ρ i σ relacije ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $\rho \circ \sigma$ relacija ekvivalencije ako i samo ako je $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

2. Ako su $f : A \to B$ i $g : C \times A \to D$ bijekcije, dokazati da je i funkcija $h : C \times B \to D$ data sa $h((c,b)) = g(c, f^{-1}(b))$ takodje bijekcija.

Rešenja.

1. $(\Rightarrow)$ Neka je $\rho \circ \sigma$ relacija ekvivalencije. Pokažimo da je $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$. Kako je $\rho \circ \sigma = (\rho \circ \sigma)^{-1}$ (iz osobina relacije ekvivalencije) dalje sledi da je $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1} = \sigma \circ \rho$.
   $(\Leftarrow)$ Neka je $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, $(*)$. Pokažimo da je $\rho \circ \sigma$ relacija ekvivalencije.

   R: Kako je $\triangle \subseteq \rho$ i $\triangle \subseteq \sigma$ sledi da je $\triangle = \triangle \circ \triangle \subseteq \rho \circ \sigma$.

   S: $\rho \circ \sigma =_{(*)} \sigma \circ \rho = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1} = (\rho \circ \sigma)^{-1}$.

   T: $(\rho \circ \sigma) \circ (\rho \circ \sigma) = \rho \circ \sigma \circ \rho \circ \sigma =_{(*)} \rho \circ \rho \circ \sigma \circ \sigma =_{(T)} \rho \circ \sigma$.

2. 1-1: Pretpostavimo da je $h(x,y) = h(z,t)$. To znači da je $g(x, f^{-1}(y)) = g(z, f^{-1}(t))$, odakle sledi da je $(x, f^{-1}(y)) = (z, f^{-1}(t))$ (jer je g bijekcija), pa je $x = z$ i $f^{-1}(y) = f^{-1}(t)$. Kako je funkcija f bijekcija, odnosno f^{-1} bijekcije, sledi da je f^{-1} "1-1" odakle zaključujemo da je $x = z$ i $y = t$. Prema tome, važi da je $(x,y) = (z,t)$.

   NA: Neka je $d \in D$. Dokazujemo da postoji $(c,b) \in C \times B$ takvo da $h((c,b)) = d$. Kako je g bijekcija sledi da postoji uredjen par $(i,j) \in C \times A$ takav da je $g(i,j) = d$, a kako je f^{-1} bijekcija sledi da postoji $k \in B$ takav da je $f^{-1}(k) = j$. Tada ako za (c,d) uzmemo (i,k) dobijamo da je $h(c,d) = h(i,k) = g(i, f^{-1}(k)) = g(i,j) = d$.

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2007/08),
DODATNI KOLOKVIJUM - Deo I,
08. april 2008.

1. Naći bar jednu formulu F (ako postoji) takvu da formula $(p \vee \neg r \vee F \Rightarrow \neg F) \Leftrightarrow (q \wedge \neg p)$ bude tautologija.

2. Pokazati da nije valjana formula: $(\forall x)R(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$.

Rešenja.

1. Iskazna formula $q \wedge \neg p$ je tačna samo za dve interpretacije, tj. interpretacije u kojima je $v(q) = \top$ i $v(p) = \bot$, a $v(r)$ može biti i tačno i netačno, a ako je $v(F) = \bot$ u tim interpretacijama tada i posmatra formula ima vrednost $\top$. U svim ostalim interpretacijama iskazna formula $q \wedge \neg p$ ima vrednost $\bot$, pa ako je za te interpretacije vrednost formule F tačna tada je i cela posmatrana formula tačna. Prema tome, formula F postoji i u KKNF ona glasi $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$.

2. $\underline{D} = \{a, b, c\}$,
$\overline{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}$.

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2007/08),
DODATNI KOLOKVIJUM - Deo II,
08. april 2008.

1. Dokazati da je ρ relacija poretka i relacija ekvivalencije skupa A akko je $\rho = \triangle_A$.

2. Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije. Dokazati ako su f, $g \circ f$ bijekcije, onda je i g bijekcija.

Rešenja.

1. Ako je $\rho = \triangle_A$ tada je relacija ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna.

   Neka je sada relacija ρ relacija poretka i relcija ekvivalencije. Zbog refleksivnosti sledi da je $\triangle_A \subset \rho$. Pretpostavimo da je tačna stroga inkluzija $\triangle_A \subset \rho$. Tada postoji uredjen par $(a,b) \in \rho$ gde su a i b različiti elementi iz A. Tada iz simetričnosti sledi da i uredjen par (b,a) pripada relaciji ρ. Kako je relacija ρ antisimetrična tada iz $(a,b),(b,a) \in \rho$ sledi da je $a = b$, kontradikcija. Prema tome, važi da je $\rho = \triangle_A$.

2. Pretpostavimo da funkcija g nije "1-1", tada postoje različiti elementi $a, b \in Y$ takvi da je $g(a) = g(b)$. Kako je funkcija f bijekcija sledi da je f "na", tj. postoje različiti elementi (jer je f funkcija) $a_1, b_1 \in X$ takvi da je $f(a_1) = a$ i $f(b_1) = b$. Tada važi da je $g \circ f(a_1) = g(f(a_1)) = g(a) = g(b) = g(f(b_1)) = g \circ f(b_1)$, kontraikcija jer je $g \circ f$ "1-1".

   Neka je c elemenat iz skupa Z. Kako je funkcija $g \circ f$ "na" sledi da postoji elemenat $a \in X$ takav da je $g \circ f(a) = c$, ali tada sledi da se elemenat $f(a)$ iz skupa Y funkcijom g preslikava u elemenat c. Prema tme, funkcija g je "na".