PRVI TEST IZ TEORIJSKIH OSNOVA INFORMATIKE(2008/09)

kod prof. Gradimira Vojvodića, novembar 2008.

I grupa Prezime i ime:______________________

br.ind.:_______

1. Dokazati matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj $n \geq 1$ važi.
2. Metodom diskusije po slovu dokazati
$\models (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)$.
3. Naći formulu $F(p, q, r)$ koja je tačna akko tačno jedno slovo od p, q i r ima vrednost $\top$.
4. Izraziti operaciju $\not\Rightarrow$ preko operacija $\neg$ i $\vee$.
5. Dokazati: $A \Leftrightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

Rešenje:

1. Za $n = 1$ imamo da je tvrdjenje zadatka tačno jer $3|(2^{1+2} + 2 \cdot 5^1)$, tj. $3|18$.
Pretpostavimo da $3|(2^{n+2} + 2 \cdot 5^n)$ i dokažimo da $3|(2^{n+3} + 2 \cdot 5^{n+1})$. Kako je $2^{n+3} + 2 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+2} + 10 \cdot 5^n = 2(2^{n+2} + 2 \cdot 5^n) + 6 \cdot 5^n$ i kako $3|(2^{n+2} + 2 \cdot 5^n)$ i $3|6$ sledi da $3|(2^{n+3} + 2 \cdot 5^{n+1})$.
2. Za $v(p) = \top$ imamo da je
$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)$
$(\top \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg\top \vee q) \wedge \neg(\top \wedge \neg q)$
$q \Rightarrow (\bot \vee q) \wedge \neg\neg q$
$q \Rightarrow q \wedge q$
$\top$.
Za $v(p) = \bot$ imamo da je
$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)$
$(\bot \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg\bot \vee q) \wedge \neg(\bot \wedge \neg q)$
$\neg q \Rightarrow (\top \vee q) \wedge \neg\bot$
$\neg q \Rightarrow \top \wedge \top$
$\top$.
3. KDF: $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$,
KKF: $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$.
4. $p \not\sim \neg(p \Rightarrow q) \sim \neg(\neg p \vee q)$.
5. Dokaz:

1.$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	Hip.
2.$\neg B$	Hip.
3.$A \Rightarrow B$	$F \wedge G \vdash F$ na (1)
4.$\neg B \Rightarrow \neg A$	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ na (3)
5.$\neg A$	$MP(2, 4)$

PRVI TEST IZ TEORIJSKIH OSNOVA INFORMATIKE(2008/09)

kod prof. Gradimira Vojvodića, novembar 2008.

II grupa Prezime i ime:______________________

br.ind.:_______

1. Dokazati matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj $n \geq 1$ važi $5|(3^{n+2} + 8^n)$.
2. Metodom diskusije po slovu dokazati
$\not\models \neg(q \wedge \neg p) \wedge (\neg q \vee p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.
3. Naći formulu $F(p, q, r)$ koja je tačna akko tačno jedno slovo od p, q i r ima vrednost $\bot$.
4. Izraziti operaciju $\not\Rightarrow$ preko operacija $\neg$ i $\wedge$.
5. Dokazati: $A \Leftrightarrow B, \neg A \vdash \neg B$.

Rešenje:

1. Za $n = 1$ imamo da je tvrdjenje zadatka tačno jer $5|(3^{1+2} + 8^1)$, tj. $5|35$.
Pretpostavimo da $5|(3^{n+2} + 8^n)$ i dokažimo da $5|(3^{n+3} + 8^{n+1})$. Kako je $3^{n+3} + 8^{n+1} = 3 \cdot 3^{n+2} + 8 \cdot 8^n = 3(2^{n+2} + 8^n) + 5 \cdot 8^n$ i kako $5|(3^{n+2} + 8^n)$ i $5|5$ sledi da $5|(3^{n+3} + 8^{n+1})$.
2. Za $v(q) = \top$ imamo da je
$\neg(q \wedge \neg p) \wedge (\neg q \vee p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
$\neg(\top \wedge \neg p) \wedge (\neg\top \vee p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow \top)$
$\neg\neg p \wedge (\bot \vee p) \Rightarrow p$
$p \wedge p \Rightarrow p$
$\top$.
Za $v(q) = \bot$ imamo da je
$\neg(q \wedge \neg p) \wedge (\neg q \vee p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
$\neg(\bot \wedge \neg p) \wedge (\neg\bot \vee p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow \bot)$
$\neg\bot \wedge (\top \vee p) \Rightarrow \neg p$
$\top \wedge \top \Rightarrow \neg p$
$\neg p$,
pa za $v(q) = \bot$ i $v(p) = \top$ formula nije tačna, tj. formula nije tautologija.
3. KDF: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$,
KKF: $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$.
4. $p \not\sim \neg(p \Rightarrow q) \sim \neg\neg(p \wedge \neg q)$.
5. Dokaz:

1.$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	Hip.
2.$\neg A$	Hip.
3.$B \Rightarrow A$	$F \wedge G \vdash G$ na (1)
4.$\neg A \Rightarrow \neg B$	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ na (3)
5.$\neg B$	$MP(2, 4)$

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2008/09),
KOLOKVIJUM I, 29. decembar 2008.
GRUPA I

1. (a) Naći jednu formulu F takvu da formula

$$(\neg(F \Rightarrow p) \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$$

bude tautologija.

(b) Za formulu F iz (a) pokazati da u iskaznom računu kao formalnoj teoriji važi

$$\vdash (\neg(F \Rightarrow p) \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (r \Rightarrow p).$$

2. Naći model za sledeći skup formula:
$\{\neg(\exists x)R(x,x)$,
$(\forall x)(\exists y)R(x,y)$,
$\neg(\exists x)(\forall y)\neg R(y,x)$,
$(\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge \neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$,
$(\forall x)(\forall y)\neg(R(x,y) \wedge R(y,x))\}$.

Rešenje:

1. (a) Neka je
$A \equiv \neg(F \Rightarrow p)$,
$B \equiv A \Rightarrow \neg r$,
$C \equiv \neg q \Rightarrow \neg r$,
$D \equiv B \wedge C$,
$E \equiv r \Rightarrow p$,
$G \equiv D \Rightarrow E$. Tada je:

p	q	r	A	B	C	D	E	G	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\underline{\top}/\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\underline{\top}/\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\bot}$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\bot}$
$\bot$	$\top$	$\top$	F	$\neg F$	$\top$	$\neg F$	$\bot$	F	$\underline{\top}$
$\bot$	$\top$	$\bot$	F	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\underline{\top}/\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	F	$\neg F$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top/\underline{\bot}$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	F	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\bot}$

Za izbor formule F postoji 2^7 do na ekvivalenciju mogućnosti. Uzmimo za formulu $F \equiv q$. Ovako izabrana formula je jedno rešenje za F jer je $q \sim (p \wedge \neg p) \vee q \vee (r \wedge \neg r) \sim (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$, dok je poslednja formula KDF funkcije izabrane (podvučene) u poslednjoj koloni tabele.

(b)

1.$(\neg(F \Rightarrow p) \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg r)$	Hip.
2.r	Hip.
3.$\neg(F \Rightarrow p) \Rightarrow \neg r$	$F \wedge G \vdash F$ na (1)
4.$\neg q \Rightarrow \neg r$	$F \wedge G \vdash G$ na (1)
5.$r \Rightarrow (F \Rightarrow p)$	$\neg F \Rightarrow \neg G \vdash G \Rightarrow F$ na (3)
6.$r \Rightarrow q$	$\neg F \Rightarrow \neg G \vdash G \Rightarrow F$ na (4)
7.$F \Rightarrow p \quad \equiv q \Rightarrow p$	$MP(2,5)$
8.q	$MP(2,6)$
9.p	$MP(8,7)$

2. $\mathcal{M} = (Z \cup \{a\}, \overline{R})$ gde je Z skup celih brojeva i $\overline{R}(x,y) = \top$ akko je
$x, y \in Z$, $x < y$ ili $x = a$, $0 < y$, ili $x < 0$, $y = a$.

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2008/09),
KOLOKVIJUM I, 29. decembar 2008.
GRUPA II

1. (a) Naći jednu formulu F takvu da formula

$$(\neg(q \Rightarrow p) \Rightarrow \neg r) \wedge (F \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$$

bude tautologija.

(b) Za formulu F iz (a) pokazati da u iskaznom računu kao formalnoj teoriji važi

$$\vdash (\neg(q \Rightarrow p) \Rightarrow \neg r) \wedge (F \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (r \Rightarrow p).$$

2. Naći model za sledeći skup formula:
$\{(\forall x)\neg R(x,x)$,
$\neg(\exists x)(\forall y)\neg R(x,y)$,
$(\forall x)(\exists y)R(y,x)$,
$(\exists x)(\exists y)\neg(x = y \vee R(x,y) \vee R(y,x))$,
$(\forall x)(\forall y)(\neg R(x,y) \vee \neg R(y,x))\}$.

Rešenje:

1. (a) Neka je
$A \equiv \neg(q \Rightarrow p)$,
$B \equiv A \Rightarrow \neg r$,
$C \equiv F \Rightarrow \neg r$,
$D \equiv B \wedge C$,
$E \equiv r \Rightarrow p$,
$G \equiv D \Rightarrow E$. Tada je:

p	q	r	A	B	C	D	E	G	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\neg F$	$\neg F$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\bot}$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\bot}$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\neg F$	$\neg F$	$\top$	$\top$	$\underline{\top}/\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\underline{\top}/\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\neg F$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top/\underline{\bot}$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top/\underline{\bot}$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\neg F$	$\neg F$	$\bot$	F	$\underline{\top}$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\underline{\top}/\bot$

Za izbor formule F postoji 2^7 do na ekvivalenciju mogućnosti. Uzmimo za formulu $F \equiv \neg q$. Ovako izabrana formula je jedno rešenje za F jer je $\neg q \sim (p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee (r \wedge \neg r) \sim (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, dok je poslednja formula KDF funkcije izabrane (podvučene) u poslednjoj koloni tabele.

(b)

1.$(\neg(q \Rightarrow p) \Rightarrow \neg r) \wedge (F \Rightarrow \neg r)$	Hip.
2.r	Hip.
3.$\neg(q \Rightarrow p) \Rightarrow \neg r$	$F \wedge G \vdash F$ na (1)
4.$F \Rightarrow \neg r \quad \equiv \neg q \Rightarrow \neg r$	$F \wedge G \vdash G$ na (1)
5.$r \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	$\neg F \Rightarrow \neg G \vdash G \Rightarrow F$ na (3)
6.$r \Rightarrow q$	$\neg F \Rightarrow \neg G \vdash G \Rightarrow F$ na (4)
7.$q \Rightarrow p$	$MP(2,5)$
8.q	$MP(2,6)$
9.p	$MP(8,7)$

2. $\mathcal{M} = (Z \cup \{a\}, \overline{R})$ gde je Z skup celih brojeva i $\overline{R}(x,y) = \top$ akko je
$x, y \in Z$, $x < y$ ili $x = a$, $0 < y$, ili $x < 0$, $y = a$.

DRUGI TEST IZ TEORIJSKIH OSNOVA INFORMATIKE(2008/09)
kod prof. Gradimira Vojvodića, januar 2009

Grupa Leva

Prezime i ime:______________________ br.ind.:_______

1. Naći preneks formu sledeće formule:
$$(\forall z)(\neg P(z)) \vee (\exists x)\neg(\forall y)(P(x) \Rightarrow Q(y)).$$
2. Izvršiti skolemizaciju formule dobijene u prethodnom zadatku.
3. Dokazati: $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$.
4. Dokazati da je $(\rho \cap \theta)^{-1} = \rho^{-1} \cap \theta^{-1}$.
5. Pronaći primer funkcije koja nije sirjektivna i jeste injektivna.

Rešenje:

1. $(\forall z)(\neg P(z)) \vee (\exists x)\neg(\forall y)(P(x) \Rightarrow Q(y))$
   $(\forall z)(\neg P(z)) \vee (\exists x)\neg(\forall y)(\neg P(x) \vee Q(y))$
   $(\forall z)(\neg P(z)) \vee (\exists x)(\exists y)\neg(\neg P(x) \vee Q(y))$
   $(\forall z)(\neg P(z)) \vee (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg Q(y))$
   $(\forall z)(\neg P(z) \vee (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg Q(y)))$
   $(\forall z)(\exists x)(\neg P(z) \vee (\exists y)(P(x) \wedge \neg Q(y)))$
   $(\forall z)(\exists x)(\exists y)(\neg P(z) \vee (P(x) \wedge \neg Q(y)))$
2. $(\forall z)(\neg P(z) \vee (P(f_1(z)) \wedge \neg Q(f_2(z))))$, gde su f_1 i f_2 nova funkcijska slova.
3. $x \in (A \setminus B) \cup C$ akko
   $x \in (A \setminus B) \vee x \in C$ akko
   $(x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C$ akko
   $(x \in A \vee x \in C) \wedge (\neg x \in B \vee x \in C)$ akko
   $(x \in A \vee x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge \neg x \in C)$ akko
   $x \in (A \cup C) \wedge \neg x \in (B \setminus C)$ akko
   $x \in (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$.
4. $(x, y) \in (\rho \cap \theta)^{-1}$ akko
   $(y, x) \in \rho \cap \theta$ akko
   $(y, x) \in \rho \wedge (y, x) \in \theta$ akko
   $(x, y) \in \rho^{-1} \wedge (x, y) \in \theta^{-1}$ akko
   $(x, y) \in \rho^{-1} \cap \theta^{-1}$.
5. $f : N \rightarrow N,\ f(x) = 2x$.

DRUGI TEST IZ TEORIJSKIH OSNOVA INFORMATIKE(2008/09)
kod prof. Gradimira Vojvodića, januar 2009

Grupa Desna

Prezime i ime:______________________ br.ind.:_______

1. Naći preneks formu sledeće formule:
$$(\forall x)\neg(\exists y)(P(x) \Rightarrow Q(y)) \vee (\exists z)(\neg P(z)).$$
2. Izvršiti skolemizaciju formule dobijene u prethodnom zadatku.
3. Dokazati: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
4. Dokazati da je $(\rho \cup \theta)^{-1} = \rho^{-1} \cup \theta^{-1}$.
5. Pronaći primer funkcije koja nije injektivna i nije sirjektivna.

Rešenje:

1. $(\forall x)\neg(\exists y)(P(x) \Rightarrow Q(y)) \vee (\exists z)(\neg P(z))$
   $(\forall x)\neg(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(y)) \vee (\exists z)(\neg P(z))$
   $(\forall x)(\forall y)\neg(\neg P(x) \vee Q(y)) \vee (\exists z)(\neg P(z))$
   $(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee (\exists z)(\neg P(z))$
   $(\forall x)((\forall y)(P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee (\exists z)(\neg P(z)))$
   $(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee (\exists z)(\neg P(z)))$
   $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee \neg P(z))$
2. $(\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee \neg P(f_1(x, y)))$, gde je f_1 novo funkcijsko slovo.
3. $x \in (A \cap B) \setminus C$ akko
   $x \in (A \cap B) \wedge \neg x \in C$ akko
   $(x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg x \in C$ akko
   $(x \in A \wedge x \in B) \wedge (\neg x \in C \wedge \neg x \in C)$ akko
   $(x \in A \wedge \neg x \in C) \wedge (x \in B \wedge \neg x \in C)$ akko
   $x \in (A \setminus C) \wedge x \in (B \setminus C)$ akko
   $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
4. $(x, y) \in (\rho \cup \theta)^{-1}$ akko
   $(y, x) \in \rho \cup \theta$ akko
   $(y, x) \in \rho \vee (y, x) \in \theta$ akko
   $(x, y) \in \rho^{-1} \vee (x, y) \in \theta^{-1}$ akko
   $(x, y) \in \rho^{-1} \cup \theta^{-1}$.
5. $f : N \rightarrow N,\ f(x) = 1$.

DRUGI KOLOKVIJUM IZ TEORIJSKIH OSNOVA INFORMATIKE I

kod prof. Gradimira Vojvodića
januar 2009

Grupa I.

1. a) Neko su ρ, σ i θ relacije na skupu A, i neka je $\rho \subseteq \sigma$. Dokazati da je $\rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta$

   b) Neka je $f : A \to B$ i $X, Y \subseteq B$. Dokazati:
$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y).$$

2. Neka je $f : A \times A \to A$, i neka za sve $x, y, z \in A$ važi: $f(x,y) = f(y,x)$, $f(x,x) = x$, $f(x, f(y,z)) = f(f(x,y),z)$. Dokazati da je tada relacija ρ na skupu A definisana sa:
$$x \rho y \text{ akko } f(x,y) = x,$$
relacija poretka.

Rešenja.

1. a) Neko su ρ, σ i θ relacije na skupu A, i neka je $\rho \subseteq \sigma$. Tada važi da je:
   - prvi način:
     $(x,y) \in \rho \circ \theta$
     $\Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in \rho \land (z,y) \in \theta)$
     $\Rightarrow (\exists z)((x,z) \in \sigma \land (z,y) \in \theta)$
     $\Leftrightarrow (x,y) \in \sigma \circ \theta$;
   - drugi način:
     $\rho \cup \sigma = \sigma$
     $\Rightarrow (\rho \cup \sigma) \circ \theta = \sigma \circ \theta$
     $\Leftrightarrow (\rho \circ \theta) \cup (\sigma \circ \theta) = \sigma \circ \theta$
     $\Leftrightarrow \rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta$.

   b) Neka je $f : A \to B$ i $X, Y \subseteq B$. Tada važi da je za sve $x \in A$:
   $x \in f^{-1}(X \cap Y)$ akko
   $f(x) \in X \cap Y$ akko
   $f(x) \in X \land f(x) \in Y$ akko
   $x \in f^{-1}(X) \land x \in f^{-1}(Y)$ akko
   $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

2. Treba pokazati da je relacija ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna:

   (R) Kako za svako $a \in A$ važi $f(a,a) = a$ tada na osnovu definicije relacije ρ imamo da je $a \rho a$, tj. ρ je refleksivna relacija.

   (AS) Pretpostavimo da $(a,b), (b,a) \in \rho$, tada je $f(a,b) = a$ i $f(b,a) = b$. Međutim kako je $f(a,b) = f(b,a)$ sledi da je $a = b$. Relacija ρ je antisimetrična.

   (T) Pretpostavimo da $(a,b), (b,c) \in \rho$, tada je $f(a,b) = a$ i $f(b,c) = b$. Na osnovu pretpostavki zadatka imamo da je $f(a,c) = f(f(a,b),c) = f(a, f(b,c)) = f(a,b) = a$, tj. $(a,c) \in \rho$. Relacija ρ je tranzitivna.

DRUGI KOLOKVIJUM IZ TEORIJSKIH OSNOVA INFORMATIKE I

kod prof. Gradimira Vojvodića
januar 2009

Grupa II.

1. a) Neko su ρ, σ i θ relacije na skupu A, i neka je $\rho \subseteq \sigma$. Dokazati da je $\theta \circ \rho \subseteq \theta \circ \sigma$

   b) Neka je $f : A \to B$ i $X, Y \subseteq B$. Dokazati:
$$f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y).$$

2. Neka je $f : X \times X \to X$, i neka za sve $a, b, c \in X$ važi: $f(a,b) = f(b,a)$, $f(a,a) = a$, $f(a, f(b,c)) = f(f(a,b),c)$. Dokazati da je tada relacija σ na skupu A definisana sa:
$$a \sigma b \text{ akko } f(a,b) = b,$$
relacija poretka.

Rešenja.

1. a) Neko su ρ, σ i θ relacije na skupu A, i neka je $\rho \subseteq \sigma$. Tada važi da je:
   - prvi način:
     $(x,y) \in \theta \circ \rho$
     $\Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in \theta \land (z,y) \in \rho)$
     $\Rightarrow (\exists z)((x,z) \in \theta \land (z,y) \in \sigma)$
     $\Leftrightarrow (x,y) \in \theta \circ \sigma$;
   - drugi način:
     $\rho \cup \sigma = \sigma$
     $\Rightarrow \theta \circ (\rho \cup \sigma) = \theta \circ \sigma$
     $\Leftrightarrow (\theta \circ \rho) \cup (\theta \circ \sigma) = \theta \circ \sigma$
     $\Leftrightarrow \theta \circ \rho \subseteq \theta \circ \sigma$.

   b) Neka je $f : A \to B$ i $X, Y \subseteq B$. Tada važi da je za sve $x \in A$:
   $x \in f^{-1}(X \setminus Y)$ akko
   $f(x) \in X \setminus Y$ akko
   $f(x) \in X \land \neg(f(x) \in Y)$ akko
   $x \in f^{-1}(X) \land \neg(x \in f^{-1}(Y))$ akko
   $x \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

2. Treba pokazati da je relacija ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna:

   (R) Kako za svako $a \in A$ važi $f(a,a) = a$ tada na osnovu definicije relacije ρ imamo da je $a \rho a$, tj. ρ je refleksivna relacija.

   (AS) Pretpostavimo da $(a,b), (b,a) \in \rho$, tada je $f(a,b) = b$ i $f(b,a) = a$. Međutim kako je $f(a,b) = f(b,a)$ sledi da je $b = a$, tj. $a = b$. Relacija ρ je antisimetrična.

   (T) Pretpostavimo da $(a,b), (b,c) \in \rho$, tada je $f(a,b) = b$ i $f(b,c) = c$. Na osnovu pretpostavki zadatka imamo da je $f(a,c) = f(a, f(b,c)) = f(f(a,b),c) = f(b,c) = c$, tj. $(a,c) \in \rho$. Relacija ρ je tranzitivna.

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2008/09),
DODATNI KOLOKVIJUM - Deo I, 27. januar 2009.

1. Neka je $h : \{\top, \bot\}^3 \to \{\top, \bot\}$ istinitosna funkcija definisana na sledeći način: $h(x,y,z) = x \Rightarrow \neg y \wedge \neg z$. Dokazati da je $\{h\}$ baza.

2. Pokazati da je valjana formula:
$(\exists x)(\forall y)R(x,y) \wedge$
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \wedge$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$
$\Rightarrow (\forall x)R(x,x)$.

Rešenja.

1. Dovoljno je pokazati da se pomoću skupa $\{h\}$ mogu prikazati $\neg$ i $\vee$:

$$h(x,x,x) = x \Rightarrow \neg x \wedge \neg x = x \Rightarrow \neg x = \neg x$$
$$h(\neg x, \neg y, \neg y) = \neg x \Rightarrow \neg\neg y \wedge \neg\neg y = \\ = \neg x \Rightarrow y \wedge y = \neg x \Rightarrow y = x \vee y.$$

2. Pokažimo da $\neg F$ nema model, tj. za formule:

$(\exists x)(\forall y)R(x,y)$,
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$,
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$,
$(\exists x)\neg R(x,x)$,

ne postoji model. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji model $\mathcal{M}$, tada u njemu važi:

   1. $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$
   2. $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$
   3. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$
   4. $(\exists x)\neg R(x,x)$
   5. $\neg R(a,a)$ za novu konstantu a, iz 4 skolemizacijom
   6. $(\forall y)R(b,y)$ za novu konstantu b, iz 1 skolemizacijom
   7. $R(b,a)$ iz 6 za $y = a$
   8. $R(b,a) \Rightarrow R(a,b)$ iz 2 za $x = b$ i $y = a$
   9. $R(a,b)$ iz 7,8 po MP
   10. $R(a,b) \wedge R(b,a)$ iz 9,7 po $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
   11. $R(a,b) \wedge R(b,a) \Rightarrow R(a,a)$ iz 3 za $x = a$, $y = b$ i $z = a$
   12. $R(a,a)$ iz 10,11 po MP

što je u suprotnosti sa 5. Znači $\neg F$ nema model pa je formula F valjana.

TEORIJSKE OSNOVE INFORMATIKE(2008/09),
DODATNI KOLOKVIJUM - Deo II, 27. januar 2009.

1. Dokazati da parcijalno uređen skup može imati najviše jedan najmanji i najviše jedan najveći element.

2. Na skupu A date su funkcije f, g i h. Ako su $h \circ g$ i f "na", a $f \circ g \circ h$ "1-1", dokazati da su f, g i h bijekcije.

Rešenja.

1. Neka je $(P, \leq)$ parcijalno uređen skup i neka su a i b najmanji elementi tada na osnovu definicije najmanjeg elementa sledi da za $x = a$ i $x = b$ važi $x \leq y$ za sve $y \in P$, odakle sledi da je $a \leq b$ i $b \leq a$. Kako je relacija $\leq$ antisimetrična sledi da je $a = b$, odnosno, postoji najviše jedan najmanji element u parcijalno uređenom skupu. Analogno se pokazuje da postoji najviše jedan najveći element.

2. Znamo da važe sledeća dva tvrđenja sa predavanja:

   a) $k \circ l$ "1-1"$\Rightarrow$ l "1-1",
   b) $k \circ l$ "na"$\Rightarrow$ k "na".

   Na osnovu a) iz $f \circ g \circ h$ "1-1" sledi da je h "1-1", a na osnovu $h \circ g$ "na" sledi da je h "na" pa je funkcija h bijekcija i postoji h^{-1} koja je takođe bijekcija. Tada je $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ "1-1" kao kompozicija "1-1" preslikavanja pa je na osnovu a) funkcija g "1-1". Pored toga, funkcija $g = h^{-1} \circ (h \circ g)$ je "na" kao kompozicija "na" funkcija pa je g bijekcija i postoji g^{-1} koja je takođe bijekcija. Dalje je $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ "1-1" kao kompozicija "1-1" funkcija i kako je f "na" sledi da je f bijekcija.