UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 13. februar 2000.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinale važi: ako je $n + m = n$ i $n_1 \geq n$, onda je $n_1 + m = n_1$.

2. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre istog tipa.
   a) Dokazati da se mreža $Con\mathcal{A} \times Con\mathcal{B}$ može potopiti u $Con(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.
   b) Dokazati da ove mreže ne moraju biti izomorfne.

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}$, u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$.
   a) Da li je $\mathcal{L}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{L}$ jednakosna klasa?

4. Neka je K klasa algebri na jeziku $L = \{\cdot, \mathit{1}, a, b\}$, koje zadovoljavaju sledeće identitete:

$$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z,$$

$$x \cdot y \approx y \cdot x,$$

$$1 \cdot x \approx x,$$

$$(a \cdot a) \cdot a \approx a, (b \cdot b) \cdot b \approx b, a \cdot b \approx 1.$$

   Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \emptyset$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 9. april 2000.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$, onda je $m^n = n^n$.

2. Dokazati da je svaki monoid izomorfan monoidu $\mathcal{E}nd\mathcal{A}$ za neku algebru $\mathcal{A}$.

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida u kojima važi sledeće: $xz = yz \to x = y$.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Neka je K klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot,^{-1}, \mathit{1}\}, ar(\cdot) = \mathit{2}, ar(^{-1}) = \mathit{1}, ar(\mathit{1}) = \mathit{1}$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 9. april 2000.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$, onda je $m^n = n^n$.

2. Neka je L distributivna mreža i neka je $I[c, d] = \{a : a \in L \text{ i } c \leq a \leq b\}$.
   a) Dokazati da je $\theta = \{\langle a, b\rangle : a \wedge c = b \wedge c \text{ i } a \vee d = b \vee d \text{ za } a, b \in L\}$ kongruencija mreže L.
   b) Pokazati da za svaku kongruenciju ϕ mreže L, takvu da je $\langle c, d\rangle \in \phi$, važi $\theta \subseteq \phi$.
   c) Dokazati da je $\theta = \Theta(c, d)$.

3. Distributivna komplementirana mreža je Bulova mreža. Neka je $\mathcal{K}$ klasa Bulovih mreža.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Neka je K klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot,^{-1}, \mathit{1}\}, ar(\cdot) = \mathit{2}, ar(^{-1}) = \mathit{1}, ar(\mathit{1}) = \mathit{1}$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 26.jun 2000.

1. Neka su λ, κ kardinali, tako da je $\lambda \geq \omega, 2 \leq \kappa \leq \lambda$. Dokazati $\kappa^\lambda \approx 2^\lambda$.

2. Ako je $\mathcal{L}$ distributivna algebarska mreža onda za svaki $A \subseteq L, a \in L$ važi $a \wedge \bigvee A = \bigvee_{d \in A}(a \wedge d)$.

3. Neka je K klasa prstena na jeziku $L = \{+, *, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$. Ispitati zatvorenost klase K u odnosu na operatore H,S,P.

4. Neka je K klasa algebri tipa $L = \{*, 1\}, ar(*) = 2, ar(1) = 0$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:
$$x * (y * z) \approx (x * y) * z$$
$$x * x \approx 1$$
$$1 * x \approx x.$$
Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 21.avgust 2000.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$,onda je $m^n \geq n^m$.

2. a) Ako je algebra $\mathcal{A}$ kongruencijski permutabilna tada je ona i kongruencijski modularna. Dokazati.
b) Da li važi obrnuto?

3. Neka je K klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$. Ispitati zatvorenost klase K u odnosu na operatore H,S,P. Da li je K jednakosna klasa?

4. Neka je K klasa Abelovih grupa tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 0$ koje zadovoljavaju identitet $x^3 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 14. septembar 2000.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$, onda je $(m^n)^m = (n^m)^n$.

2. Neka je $\mathcal{A}_i, i \in I$, familija algebri i $\theta_i \in Con\mathcal{A}_i, i \in I$. Na skupu $\prod_{i \in I} A_i$ definišemo relaciju $\prod_{i \in I} \theta_i$ ovako: za sve $p, q \in \prod_{i \in I} A_i$je $\langle p, g\rangle \in \prod_{i \in I} \theta_i \leftrightarrow (\forall i \in I)\langle p(i), g(i)\rangle \in \theta_i$.
a) Dokazati da je $\prod_{i \in I} \theta_i$ kongruencija algebre $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
b) Dokazati da je $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / _{\prod_{i \in I} \theta_i} \cong \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / \theta_i$.

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa mreža na jeziku $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee\}$, koja zadovoljava sledeću formulu $(\forall x)(\exists y)(x \vee y \neq x \ \& \ x \vee y \neq y)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Neka je $\mathcal{KM}$ klasa komutativnih monoida tipa $L = \{\cdot, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(1) = 0$. Opisati $\mathcal{KM}$-slobodnu algebru nad $X = \{a_i : i \in N\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 14. oktobar 2000.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$, onda je $(m^n)^m = (n^m)^n$.

2. Neka je $\mathcal{A}_i, i \in I$, familija algebri i $\theta_i \in Con\mathcal{A}_i, i \in I$. Na skupu $\prod_{i \in I} A_i$ definišemo relaciju $\prod_{i \in I} \theta_i$ ovako: za sve $p, q \in \prod_{i \in I} A_i$je $\langle p, g \rangle \in \prod_{i \in I} \theta_i \leftrightarrow (\forall i \in I)\langle p(i), g(i) \rangle \in \theta_i$.
a) Dokazati da je $\prod_{i \in I} \theta_i$ kongruencija algebre $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
b) Dokazati da je $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / _{\prod_{i \in I} \theta_i} \cong \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / \theta_i$.

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, *, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupa na jeziku $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 1$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati $\mathcal{K}$-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 5.novembar 2000.

1. Neka su λ, κ kardinali, tako da je $\lambda \geq \omega, 2000 \leq \kappa \leq \lambda$. Dokazati $\kappa^{\lambda \oplus 2000} \approx 2000^\lambda$.

2. Neka je $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa, i $\mathcal{A} = (G, F)$ unarna algebra pridružena grupi $\mathbf{G}$ na sledeći način $F = \{f_a | f_a : G \to G, f_a(x) = a \cdot x\}$. Dokazati da je mreža $\mathbf{S}(G) \cong \mathbf{Con}\mathcal{A}$.

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa mreža na jeziku $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee\}$, koja zadovoljava sledeću formulu $(\forall x)(\exists y)(x \vee y \neq x \; \& \; x \vee y \neq y)$. Ispitati zatvorenost klase $\mathcal{K}$ u odnosu na operatore H,S,P.

4. Neka je K klasa algebri tipa $L = \{*, \mathit{1}\}, ar(*) = \mathit{2}, ar(\mathit{1}) = \mathit{0}$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:
$$x * (y * z) \approx (x * y) * z$$
$$x * x \approx 1$$
$$1 * x \approx x.$$
Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 09.12.2000.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$,onda je $(m^n)^n = n^m \oplus m^n$.

2. Neka je ρ kongruencija na semigrupi S, i neka je $\phi : S \to T$ homomorfizam tako da je $\rho \subseteq Ker\phi$. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\beta : S/\rho \to T$ takav da $im\beta = im\phi$ i $\phi = \beta \circ nat_\rho$.

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa prstena na jeziku $L = \{+, \cdot, -, \mathit{0}\}$ koji zadovoljavaju $(\forall n \in N)(n^2 x = 0 \Rightarrow nx = 0)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, 1\}$, ar$(\cdot) = 2$, ar$(1) = 0$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:
$$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z, \tag{1}$$
$$x \cdot y \approx y \cdot x, \tag{2}$$
$$1 \cdot x \approx x. \tag{3}$$
Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_i : i \in N\}$.