UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 5.februar 2001.

1. (20) Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$,onda je $m^n \geq (n \oplus m)^m$.

2. (40) Neka je $\mathbf{L}$ distributivna mreža, $I[c,d]$ interval u mreži $\mathbf{L}$ ($I[c,d] = \{a : a \in L \text{ i } c \leq a \leq d\}$) i $\theta = \{\langle a,b\rangle : a,b \in L \text{ i } a \wedge c = b \wedge c \text{ i } a \vee d = b \vee d\}$.
   a) Neka je δ relacija ekvivalencije na L. Dokazati da su $i)$ i $ii)$ ekvivalentna tvrdjenja.
   $i)$ $\delta \in Con\mathbf{L}$,
   $ii)$ Za sve x, y, z iz L, ako je $\langle x,y\rangle \in \delta$ onda je $\langle x \wedge z, y \wedge z\rangle \in \delta$ i $\langle x \vee z, y \vee z\rangle \in \delta$.
   b) Dokazati da $\theta \in Con\mathbf{L}$.
   c) Pokazati da za svaku kongruenciju ϕ mreže $\mathbf{L}$, tako da je $\langle c,d\rangle \in \phi$, važi $\theta \subseteq \phi$.
   d) Dokazati da je $\theta = \Theta(c,d)$.

3. (15) Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida u kojima važi:
$$(\forall x,y)(xy \approx x \vee xy \approx y).$$
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. (25) Neka je K klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 1$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 03.03.2001.

1. Neka je α ordinal, $B \subseteq \alpha$, i $B \neq \alpha$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:
   (i) B je početni segment od $\langle \alpha, \in_\alpha\rangle$
   (ii) B je tranzitivan skup.

2. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ algebre istog tipa, i $f : A \to B$ epimorfizam. Neka je $\alpha = \ker f$, $\beta \in Con\mathbf{A}$, i neka je $f(\beta) = \{\langle f(x), f(y)\rangle : \langle x,y\rangle \in \beta\}$. Dokazati da $f(\beta) \in Con\mathbf{B}$ ako i samo ako $\beta \circ \alpha \circ \beta \subseteq \alpha \circ \beta \circ \alpha$.

3. Distributivna komplementirana mreža je Bulova mreža. Neka je $\mathcal{L}$ klasa distributivnih mreža tipa $\{\vee, \wedge\}$, i neka je $\mathcal{K}$ klasa Bulovih mreža tipa $\{\vee, \wedge\}$.
   a) Da li je $\mathcal{L}$ zatvorena u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   c) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Neka je K klasa Abelovih grupa tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 0$ koje zadovoljavaju identitet $x^3 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 01. april 2001.

1. Dokazati da iz $a)$ sledi $b)$.
   $a)$ Ako u parcijalno uređenom skupu svaki lanac ima gornje ograničenje tada taj skup ima maksimalni element.
   $b)$ Za svaku nepraznu familiju nepraznih skupova postoji funkcija izbora.

2. Ako je L kompletan lanac pokazati da je L algebarska mreža ako i samo ako za svako $a_1, a_2 \in L$ i $a_1 < a_2$, postoje $b_1, b_2 \in L$ takvi da $a_1 \leq b_1 \prec b_2 \leq a_2$ ($x \prec y$ ako za svako $c \in L$ iz $x \leq c \leq y$ sledi $x = c$ ili $y = c$).

3. Neka je $\theta \in Con\mathcal{A}$. Prosta algebra je ona čije su jedine kongruencije $\triangle$ i A^2. Kongruencija θ je maksimalna ako iz $\theta \leq \alpha \leq A^2$ sledi $\alpha = \theta$ ili $\alpha = A^2$.
Pokazati da je A/θ prosta algebra ako i samo ako je θ maksimalna kongruencija na A ili $\theta = A^2$.

4. Pokazati da važi nejednakost $SH \leq HS$. Da li u opštem slučaju važi $SH \neq HS$?

5. Neka je $\mathcal{KM}$ klasa komutativnih monoida tipa $L = \{\cdot, \mathit{1}\}, ar(\cdot) = \mathit{2}, ar(\mathit{1}) = \mathit{0}$. Opisati $\mathcal{KM}$-slobodnu algebru nad $X = \{a_i : i \in N\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 6.maj 2001.

1. Dokazati da iz $a)$ sledi $b)$.
$a)$ Ako u parcijalno uređenom skupu svaki lanac ima gornje ograničenje tada taj skup ima maksimalni element.
$b)$ Za svaku nepraznu familiju nepraznih skupova postoji funkcija izbora.

2. Ako je L kompletan lanac pokazati da je L algebarska mreža ako i samo ako za svako $a_1, a_2 \in L$ i $a_1 < a_2$, postoje $b_1, b_2 \in L$ takvi da $a_1 \leq b_1 \prec b_2 \leq a_2$ ($x \prec y$ ako za svako $c \in L$ iz $x \leq c \leq y$ sledi $x = c$ ili $y = c$).

3. Neka je $A = \{0, 1\}^\omega$, i f, g binarne operacije na A, definisane na sledeći način: $f(a)(i) = a(i+1)$ i $g(a)(i) = a(0)$, za $a \in A$. Dokazati da $\langle A, f, g\rangle$ je poddirektno nesvodljiva algebra.

4. Neka je p prost broj, Z_p skup celih poztitivnih brojeva po modulu p, a $\mathbf{Z}_p = \langle\{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{p-1}\}, f\rangle$ mono-unarna algebra gde je $f(\bar{n}) = \overline{n+1}$. Dokazati da Z_p ima osobinu univerzalnog preslikavanja za klasu $\mathcal{K}$ mono-unarnih algebri $\langle A, f\rangle$ koje zadovljavaju $f^p(x) \approx x$ nad skupom $\{\bar{1}\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 25.jun 2001.

1. Neka je $\leq$ parcijalno uređenje na A. Dokazati da postoji linearno uređenje $\leq^*$ na A, tako da za sve $a, b \in A$ iz $a \leq b$ sledi $a \leq^* b$.

2. Data je algebra $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3\}, f)$, gde je $f(x, y, z) = max\{x, y, z\}$. Da li je algebra $\mathcal{A}$
a) prosta,
b) direktno nesvodljiva,
c) poddirektno nesvodljiva?

3. Naći algebru $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{L} = \{f_1, f_2, ..., f_{2001}\}, ar(f_i) = 2$ za $i \in \{1, 2, ..., 2001\}$, tako da važe sledeći uslovi:
a) $f_i^{\mathcal{A}} \neq f_j^{\mathcal{A}}$ za $1 \leq i < j \leq 2001$,
b) za sve $\rho \in Con(\mathcal{A})$ i sve $b, c \in A$ važi $| b/\rho | = | c/\rho |$.

4. Neka su V_1 i V_2 varijeteti prstena tipa $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}, ar(+) = ar(\cdot) = 2, ar(-) = 1, ar(0) = 0$, takvi da su u varijetetu V_1 zadovoljeni identiteti $xyz \approx xy - yx \approx 3x \approx 0$, a u varijetetu V_2 $xyz \approx x^2 \approx 3x \approx 0$. Da li je $V_1 = V_2$?

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 06.jul 2001.

1.(20) Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$, onda je $m^{m \otimes n} \oplus n^{m \oplus m} = m^n$.

2.(30) Neka je $\mathcal{G}$ grupa tipa $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$, gde je $ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 0$, i neka je $\rho = \{\langle a, b\rangle \in G^2 \mid ab^{-1} = (g_1^{-1}f_1g_1)(g_2^{-1}f_2g_2)...(g_n^{-1}f_ng_n),\ g_1, g_2, ..., g_n \in G,\ f_1, f_2, ..., f_n \in \{cd^{-1}, dc^{-1}\},\ n \in N\}$. Dokazati:
a) ρ je relacija ekvivalencije na G,
b) ako je $\langle a, b\rangle \in \rho$ i $g \in G$, tada su $\langle ag, bg\rangle, \langle ga, gb\rangle \in \rho$,
c) $\rho \in Con(\mathcal{G})$,
d) $\Theta(c, d) = \rho$.

3.(25) Neka je $\mathcal{V}$ klasa grupoida tipa $\{\cdot\}, ar(\cdot) = 2$, za koje važi: $(\forall a, b)(\exists x, y)(ax = b \wedge ya = b)$.
a) Da li je $\mathcal{V}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{V}$ jednakosna klasa?

4.(25) Neka je $\mathcal{A} = (\omega, f)$ mono-unarna algebra gde je $f(n) = n + 1$. Dokazati da $\mathcal{A}$ ima svojstvo univerzalnog preslikavanja za klasu mono-unarnih algebri na skupu $\{0\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 21. avgust 2001.

1. Neka je A proizvoljan skup. Dokazati sledeće:
   1. $Tr(A)$ ako i samo ako je $\cup A^+ = A$,
   2. $Tr(A)$ ako i samo ako je $Tr(\mathcal{P}(A))$,
   3. Ako je $Tr(A)$, onda je $Tr(\cup A)$.

2. Dokazati da klasa Abelovih grupa ima CEP.

3. Neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{M}$ klase aldebri tipa $\mathcal{F} = \{f\}, ar(f) = 1$, koje zadovoljavju $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^4(x) \approx x)$, $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^5(x) \approx x)$, respektivno.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?
   b) Da li je $\mathcal{M}$ zatvorena u odnosu na operatore H,S,P?

4. Klasa algebri $\mathcal{K}$ tipa $\mathcal{L} = \{\cdot, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(1) = 0$, definisana je identitetima $\Sigma = \{x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z,\ x \cdot x \approx 1,\ 1 \cdot x \approx x\}$. Opisati $\mathcal{K}$-slobodnu algebru nad skupom $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 08. decembar 2001.

1. a) Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve κ, λ, μ važi:
$$\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa^\mu \leq \lambda^\mu.$$
   b) Dati primer $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$ tako da je $\kappa < \lambda$ ali $\kappa^\mu = \lambda^\mu$.

2. Algebra $\mathcal{P}$ ima CEP(svojstvo proširenja kongruencija) ako za svaku podalgebru $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{P}$ i $\theta \in Con\mathcal{B}$ postoji $\phi \in Con\mathcal{P}$ tako da je $\theta = \phi \cap B^2$.
   Klasa algebri $\mathcal{K}$ ima svojstvo CEP ako svaka algebra iz $\mathcal{K}$ ima svojstvo CEP.
   Pokazati da klasa Abelovih grupa ima CEP.

3. Neka je K klasa prstena na jeziku $L = \{+, *, -, \mathit{0}\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$.
   Ispitati zatvorenost klase K u odnosu na operatore H,S,P.

4. Neka je K klasa algebri tipa $L = \{*, \mathit{1}\}, ar(*) = \mathit{2}, ar(\mathit{1}) = \mathit{0}$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:
$$\begin{aligned} x * (y * z) &\approx (x * y) * z \\ x * x &\approx 1 \\ 1 * x &\approx x. \end{aligned}$$
   Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.