UNIVERZALNA ALGEBRA, 10. februar 2003.

UPUTSTVO: Teorijsko usmerenje i stari profesorski smer ne radi drugi zadatak, a novo profesorsko usmerenje ne radi prvi zadatak.

1. Neka su $\lambda, \kappa$ kardinali, tako da je $\lambda \geq \omega,\ 2003 \leq \kappa \leq \lambda$. Dokazati da je $\kappa^{\lambda \oplus 2003} = 2000^{\lambda}$.
2. Ako je algebra $\mathcal{A}$ kongruencijski permutabilna tada je ona i kongruencijski modularna. Dokazati.
3. Data je algebra $\mathcal{A} = (\{1,2,3\}, f)$, gde je $f(x,y,z) = max\{x,y,z\}$. Da li je algebra $\mathcal{A}$:
   a) prosta,
   b) direktno nesvodljiva,
   c) poddirektno nesvodljiva?
4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}$, u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$.
   a) Da li je $\mathcal{L}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{L}$ jednakosna klasa?
5. Neka je $K$ klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 1$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati $K$-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_{2003}\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 08. mart 2003.

UPUTSTVO: Teorijsko usmerenje i stari profesorski smer ne radi drugi zadatak, a novo profesorsko usmerenje ne radi prvi zadatak.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve $m, n$ važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$, onda je $m^n = n^n$.
2. Dokazati da je mreža podalgebri unarne algebre $\mathcal{A}$ podmreža partitivnog skupa $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.
3. Data je unarna algebra $\mathcal{A} = (N \cup \{0\}, f_1, f_2)$, gde je $f_1(n) = n+1,\ f_2(n) = n-1$ za $n > 0$ i $f_2(0) = 0$. Da li je algebra $\mathcal{A}$ prosta?
4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$ koje zadovoljavaju $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^3(x) \approx x)$.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?
5. Dokazati da grupa $(Z, +, -, 0)$ ima osobinu univerzalnog preslikavanja za klasu $\mathcal{G}$ grupa nad skupom $\{1\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 05. april 2003.

UPUTSTVO: Teorijsko usmerenje i stari profesorski smer ne radi drugi zadatak, a novo profesorsko usmerenje ne radi prvi zadatak.

1. Dokazati da za prizvoljan kardinalni broj $n \geq \aleph_0$ važi $(2^n)^{2003} = n^n$.
2. Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra, $0 \in \mathcal{F}_0$, i za sve $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$ važi $f^{\mathcal{A}}(0^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, ..., 0^{\mathcal{A}}) = 0^{\mathcal{A}}$. Dokazati da se proizvoljna algebra $\mathcal{B}$ tipa $\mathcal{F}$ može potopiti u $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

3. Neka je $\mathcal{A}_i, i \in I$, familija algebri i $\theta_i \in Con\mathcal{A}_i, i \in I$. Na skupu $\prod_{i\in I} A_i$ definišemo relaciju $\prod_{i\in I}\theta_i$ ovako: za sve $p, q \in \prod_{i\in I} A_i$ je $\langle p, g\rangle \in \prod_{i\in I}\theta_i \leftrightarrow (\forall i \in I)\langle p(i), g(i)\rangle \in \theta_i$.
a) Dokazati da je $\prod_{i\in I}\theta_i$ kongruencija algebre $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$.
b) Dokazati da je $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/_{\prod_{i\in I}\theta_i} \cong \prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/\theta_i$.

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}$, u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je $\mathcal{KM}$ klasa komutativnih monoida na jeziku $L = \{\cdot, \mathit{1}\}$. Neka je $X = \{a_i \mid i \in N\}$, opisati $\mathcal{KM}$ slobodnu algebru nad $X$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 3. maj 2003.

UPUTSTVO: Teorijsko usmerenje i stari profesorski smer ne radi drugi zadatak, a novo profesorsko usmerenje ne radi prvi zadatak.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve $m, n$ važi: ako je $1 < m \leq n,\ n \geq \aleph_0$, onda je $m^n \geq n^m$.

2. Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra, $0 \in \mathcal{F}_0$, i za sve $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$ važi $f^{\mathcal{A}}(0^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, ..., 0^{\mathcal{A}}) = 0^{\mathcal{A}}$. Dokazati da se proizvoljna algebra $\mathcal{B}$ tipa $\mathcal{F}$ može potopiti u $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

3. Algebra $\mathcal{A}$ ima CEP(svojstvo proširenja kongruencija) ako za svaku podalgebru $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ i $\theta \in Con\mathcal{B}$ postoji $\phi \in Con\mathcal{A}$ tako da je $\theta = \phi \cap B^2$.
Klasa algebri $\mathcal{K}$ ima svojstvo CEP ako svaka algebra iz $\mathcal{K}$ ima svojstvo CEP.
Pokazati da klasa Abelovih grupa ima CEP.

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$ koje zadovoljavaju $(\forall x)(f^3(x) \approx x \vee f^5(x) \approx x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je $K$ klasa Abelovih grupa tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$, $ar(\cdot) = 2$, $ar(^{-1}) = 1$, $ar(1) = 0$ koje zadovoljavaju identitet $x^3 \approx 1$. Opisati $K$-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 23. jun 2003.

UPUTSTVO: Teorijsko usmerenje i stari profesorski smer ne radi drugi zadatak, a novo profesorsko usmerenje ne radi prvi zadatak.

1. Dokazati da za prizvoljan kardinalni broj $n \geq \aleph_0$ važi $(2003^n)^{2000} = n^n$.

2. Neka je $\rho$ kongruencija na semigrupi $S$, i neka je $\phi : S \to T$ homomorfizam takav da je $\rho \subseteq Ker\phi$. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\beta : S/\rho \to T$ takav da važi $im\beta = im\phi$ i $\phi = \beta \circ nat_\rho$.

3. Neka je $\mathcal{A} = (\{0, 1, 2\}, f),\ ar(f) = 2$, gde je $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1, y \neq 2 \\ 2, & x = 1, y = 2 \end{cases}$
a) Dokazati da za $\rho \in Con\mathcal{A},\ a, b \in A$ važi: ako je $(a, b) \in \rho$ onda je $\nabla_{\{0,...,max\{a,b\}\}} \subseteq \rho$.
b) Pronaći sve kongruencije algebre $\mathcal{A}$.
c) Da li je algebra $\mathcal{A}$ prosta?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$ koje zadovoljavaju $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^3(x) \approx x)$.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je $K$ klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 1$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati $K$-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2\}$.

## UNIVERZALNA ALGEBRA, 23. jun 2003.

I DEO

1. Neka je $\leq$ parcijalno uređenje na skupu $A$. Dokazati da postoji linearno uređenje $\leq^*$ na $A$ tako da važi $a \leq b \Rightarrow a \leq^* b$.

2. Pronaći sve neizomorfne nedistributivne mreže sa šest elemenata. Da li postoji potapanje između neke dve gore pomenute mreže?

---

II DEO

3. Neka je $\rho$ kongruencija na semigrupi $S$, i neka je $\phi : S \to T$ homomorfizam takav da je $\rho \subseteq Ker\phi$. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\beta : S/\rho \to T$ takav da važi $im\beta = im\phi$ i $\phi = \beta \circ nat_\rho$.

4. Neka je $\mathcal{A} = (\{0,1,2\}, f),\ ar(f) = 2$, gde je $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1, y \neq 2 \\ 2, & x = 1, y = 2 \end{cases}$
   a) Dokazati da za $\rho \in Con\mathcal{A},\ a,b \in A,\ a \neq b$ važi: ako je $(a,b) \in \rho$ onda je $\nabla_{\{0,\dots,max\{a,b\}\}} \subseteq \rho$.
   b) Pronaćisve kongruencije algebre $\mathcal{A}$.
   c) Da li je algebra $\mathcal{A}$ prosta?

---

III DEO

5. Neka je $f$ unaran operacijski simbola, i $\cdot$ binaran operacijski simbol. Ispitati da li je tačno:
   a) $x \cdot y \approx y \cdot x \vdash (x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z)$
   b) $f^3x \approx x, f^2x \approx fx \vdash fx \approx x$.

6. Neka je $f$ homomorfizam prstena $R$ u njega samog. Dokazati da je podskup $S = \{x \in R \mid f^2(x) = x\}$ potprsten u $R$.

## UNIVERZALNA ALGEBRA, 07. jul 2004.

1. Neka je $\leq$ parcijalno uređenje na skupu $A$. Dokazati da postoji linearno uređenje $\leq^*$ na $A$ tako da važi $a \leq b \Rightarrow a \leq^* b$.

2. Pronaći sve neizomorfne nedistributivne mreže sa šest elemenata. Da li postoji potapanje između neke dve gore pomenute mreže?

3. Neka je $\mathcal{A} = (\{0,1,2\}, f),\ ar(f) = 2$, gde je $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1, y \neq 2 \\ 2, & x = 1, y = 2 \end{cases}$
   a) Dokazati da za $\rho \in Con\mathcal{A},\ a,b \in A,\ a \neq b$ važi: ako je $(a,b) \in \rho$ onda je $\nabla_{\{0,\dots,max\{a,b\}\}} \subseteq \rho$.
   b) Pronaćisve kongruencije algebre $\mathcal{A}$.
   c) Da li je algebra $\mathcal{A}$ prosta?

4. Neka je $f$ unaran operacijski simbola, i $\cdot$ binaran operacijski simbol. Ispitati da li je tačno:
a) $x \cdot y \approx y \cdot x \vdash (x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z)$
b) $f^3 x \approx x, f^2 x \approx fx \vdash fx \approx x$.

5. Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$ koje zadovoljavaju $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^3(x) \approx x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

UNIVERZALNA ALGEBRA, 09. jul 2003.

I DEO

1. Neka je $\varphi : A \times A \to A$ preslikavanje i za svako $x, y, z \in A$ važi sledeće:
1) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
2) $\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z)$
3) $\varphi(x, x) = x$.
Na skupu $A$ definišemo relaciju $\leq$ na sledeći način: $x \leq y$ ako i samo ako $\varphi(x, y) = x$. Dokazati da je $\leq$ relacija poretka, i za sve $x, y \in A$ važi $inf\{x, y\} = \varphi(x, y)$.
2. Neka je lanac $L$ algebarska mreža. Dokazati da za svako $a_1, a_2 \in L$ i $a_1 < a_2$, postoje $b_1, b_2 \in L$ takvi da važi $a_1 \leq b_1 \prec b_2 \leq a_2$($x \prec y$ ako je $x \neq y$ i za svako $c \in L$ iz $x \leq c \leq y$ sledi $x = c$ ili $y = c$).

---

II DEO

3. Dokazati da klasa Abelovih grupa ima CEP. (Algebra $A$ ima svojstvo CEP ako za svaku podalgebru $B$ algebre $A$ i $\theta \in Con(B)$ postoji $\phi \in Con(A)$ tako da je $\phi = \theta \cap B^2$)
4. Pronaći sve mreže sa četiri elementa koje su direktno nesvodljive ali nisu poddirektno nesvodljive, i dokazati da te mreže ispunjavaju uslove zadatka.

---

III DEO

5. Konstruisati jednakosno izvođenje za identitet $x'' \approx x$ iz jednakosnih aksioma za Bulove algebre.
6. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupa na jeziku $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$, $ar(\cdot) = 2$, $ar(^{-1}) = 1$, $ar(1) = 0$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati $\mathcal{K}$-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 11. sep 2003.

I DEO

1. Neka je $\varphi : A \times A \to A$ preslikavanje i za svako $x, y, z \in A$ važi sledeće:
1) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
2) $\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z)$
3) $\varphi(x, x) = x$.
Na skupu $A$ definišemo relaciju $\leq$ na sledeći način: $x \leq y$ ako i samo ako $\varphi(x, y) = x$. Dokazati da je $\leq$ relacija poretka, i za sve $x, y \in A$ važi $inf\{x, y\} = \varphi(x, y)$.
2. Neka je lanac $L$ algebarska mreža. Dokazati da za svako $a_1, a_2 \in L$ i $a_1 < a_2$, postoje $b_1, b_2 \in L$ takvi da važi $a_1 \leq b_1 \prec b_2 \leq a_2$($x \prec y$ ako je $x \neq y$ i za svako $c \in L$ iz $x \leq c \leq y$ sledi $x = c$ ili $y = c$).

II DEO

3. Ako je $L$ distributivna mreža, dokazati da je $\Theta(c, d) = \{\langle a, b\rangle \in L \times L : c \wedge d \wedge a = c \wedge d \wedge b \text{ i } c \vee d \vee a = c \vee d \vee b\}$.
4. Data je unarna algebra $\mathcal{H} = (\{0, 1, 2, 3\}, f_1, f_2)$, gde su $f_1$ i $f_2$ definisane na sledeći način:
$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } f_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta i direktno nesvodljiva?

---

III DEO 5. Konstruisati jednakosno izvođenje za identitet $1 \cdot (x^{-1})^{-1} \approx x$ iz jednakosnih aksioma za grupe.

6. Neka je $K$ klasa prstena na jeziku $L = \{+, *, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$. Ispitati zatvorenost klase $K$ u odnosu na operatore H,S,P.

## UNIVERZALNA ALGEBRA, 28. septembar 2003.

I DEO 1. Dokazati da svaki vektorski prostor $\mathcal{V}$ nad nekim poljem $\mathcal{F}$ ima bazu

2. Da li postoji beskonačna mreža u kojoj važi da za svaki element mreže postoji tačno jedan element mreže sa kojim nije uporediv.

---

II DEO 3. Neka je $\mathcal{L}$ distributivna algebarska mreža, $A$ podskup skupa $L$, i $a$ proizvoljan element iz $A$. Ako je $x = a \wedge \bigvee A$ i $y = \bigvee_{d \in A}(a \wedge d)$ dokazati da važi:
a) $y \leq x$;
b) Za svaki kompaktni element $k$ iz mreže $\mathcal{L}$ važi: ako je $k \leq x$ tada je $k \leq y$;
c) $x = y$.

4. Data algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f, g)$, $ar(f) = 3$, $ar(g) = 1$, gde su $f$ i $g$ definisane na sledeći način:

$$f(x,y,z) = max\{min\{x,y\}, z\} \text{ za } x,y,z \in H, \text{ i } g : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta i direktno nesvodljiva?

---

III DEO 5. Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$, koja zadovoljava sledeću formulu $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^5(x) \approx x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvorena u odnosu na operatore $H, S, P$?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

6. Neka je $K$ klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, 1\}$, $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}(1) = 0$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &\approx (x \cdot y) \cdot z, & (1) \\ x \cdot y &\approx y \cdot x, & (2) \\ 1 \cdot x &\approx x. & (3) \end{aligned}$$

Opisati $K$-slobodnu algebru nad $X = \{x_i : i \in N\}$.

## UNIVERZALNA ALGEBRA, 20. oktobar 2003.

I DEO 1. Dokazati da svaki vektorski prostor $\mathcal{V}$ nad nekim poljem $\mathcal{F}$ ima bazu

2. Da li postoji beskonačna mreža u kojoj važi da za svaki element mreže postoji tačno jedan element mreže sa kojim nije uporediv.

---

II DEO 3. a) Ako je algebra $\mathcal{A}$ kongruencijski permutabilna tada je ona i kongruencijski modularna. Dokazati.
b) Da li važi obrnuto?

4. Data je unarna algebra $\mathcal{A} = (N \cup \{0\}, f_1, f_2)$, gde je $f_1(n) = n+1$, $f_2(n) = n-1$ za $n > 0$ i $f_2(0) = 0$. Da li je algebra $\mathcal{A}$ prosta?

---

III DEO 5. Neka je $K$ klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$. Ispitati zatvorenost klase $K$ u odnosu na operatore H,S,P. Da li je $K$ jednakosna klasa?

6. Neka je $K$ klasa Abelovih grupa tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 0$ koje zadovoljavaju identitet $x^3 \approx 1$. Opisati $K$-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 8. novembar 2003.

1. Da li postoji beskonačna mreža u kojoj važi da za svaki element mreže postoji tačno jedan element mreže sa kojim nije uporediv.

2. Ako je $\mathcal{L}$ distributivna algebarska mreža onda za svaki $A \subseteq L, a \in L$ važi $a \wedge \bigvee A = \bigvee_{d \in A}(a \wedge d)$
.

3. Data je algebra $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3\}, f)$, gde je $f(x, y, z) = max\{x, y, z\}$. Da li je algebra $\mathcal{A}$
a) prosta,
b) direktno nesvodljiva,
c) poddirektno nesvodljiva?

4. Distributivna komplementirana mreža je Bulova mreža. Neka je $\mathcal{K}$ klasa Bulovih mreža.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je $\mathcal{KM}$ klasa komutativnih monoida tipa $L = \{\cdot, \mathit{1}\}, ar(\cdot) = \mathit{2}, ar(\mathit{1}) = \mathit{0}$. Opisati $\mathcal{KM}$-slobodnu algebru nad $X = \{a_i : i \in N\}$.