UNIVERZALNA ALGEBRA,
PROFESORSKI SMER

UNIVERZALNA ALGEBRA, 22. jun 2004.

1. Dokazati da za $|A| \geq 4$ mreža $Eqv(A)$ svih ekvivalencija na A nije modularna.

2. Ako je L kompletan lanac, pokazati da je L algebarska mreža ako i samo ako za sve $a_1, a_2 \in L$ i $a_1 < a_2$ postoje $b_1, b_2 \in L$ tako da je $a_1 \leq b_1 \prec b_2 \leq a_2$.

3. Data algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f, g)$, $ar(f) = 3$, $ar(g) = 1$, gde su f i g definisane na sledeći način:
$$f(x,y,z) = min\{max\{x,y\},z\} \text{ za } x,y,z \in H, \text{ i } g : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta i direktno nesvodljiva?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida u kojima važi sledeće: $xz = yz \Rightarrow x = y$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

UNIVERZALNA ALGEBRA, 07. septembar 2004., 25. septembar 2004.

1. Neka je $\leq$ parcijalno uređenje na A. Dokazati da postoji linearno uređenje $\leq^*$ na A, tako da za sve $a, b \in A$ iz $a \leq b$ sledi $a \leq^* b$.

2. Neka je φ izomorfno preslikavanje dobro uređenog skupa $\mathcal{A} = (A, \leq)$ u sebe. Dokazati da za sve $a \in A$ važi $a \leq \varphi(a)$.

3. Data je unarna algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f_1, f_2)$, gde su f_1 i f_2 definisane na sledeći način:
$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } f_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta i direktno nesvodljiva?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida u kojima važi:
$$(\forall x, y)(xy \approx x \vee xy \approx y).$$
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

UNIVERZALNA ALGEBRA, 04. decembar 2004.

1. Pronaći sve neizomorfne nedistributivne mreže sa šest elemenata. Da li postoji potapanje između neke dve gore pomenute mreže?

2. Neka je φ izomorfno preslikavanje dobro uređenog skupa $\mathcal{A} = (A, \leq)$ u sebe. Dokazati da za sve $a \in A$ važi $a \leq \varphi(a)$.

3. Neka je L distributivna mreža.
a) Dokazati da je $\theta = \{\langle a, b\rangle : a \wedge c = b \wedge c \text{ i } a \vee d = b \vee d \text{ za } a, b \in L\}$ kongruencija mreže L.
b) Pokazati da za svaku kongruenciju ϕ mreže L, takvu da je $\langle c, d\rangle \in \phi$, važi $\theta \subseteq \phi$.
c) Dokazati da je $\theta = \Theta(c, d)$.

4. Data algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f, g)$, $ar(f) = 3$, $ar(g) = 1$, gde su f i g definisane na sledeći način:

$$f(x,y,z) = max\{min\{x,y\}, z\} \text{ za } x,y,z \in H, \text{ i } g : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta i direktno nesvodljiva?

5. Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$, koja zadovoljava sledeću formulu $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^5(x) \approx x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvorena u odnosu na operatore H, S, P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

UNIVERZALNA ALGEBRA,
TEORETSKI SMER

UNIVERZALNA ALGEBRA, 03. februar 2004.

1. Neka su $\mathcal{T} = (T, \wedge_T, \vee_T)$ i $\mathcal{S} = (S, \wedge_S, \vee_S)$ mreže u kojima su svaka dva elementa uporediva, i ρ kongruencija na mreži $\mathcal{S}$. Neka je $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ homomorfizam takav da je $\rho \subseteq Ker\phi$. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\beta : \mathcal{S}/\rho \to \mathcal{T}$ takav da je $im\beta = im\phi$ i $\phi = \beta \circ nat_\rho$.

2. Ako je algebra $\mathcal{A}$ kongruencijski permutabilna tada je ona i kongruencijski modularna. Dokazati.

3. Data je unarna algebra $\mathcal{H} = (\{0, 1, 2, 3\}, f_1, f_2)$, gde su f_1 i f_2 definisane na sledeći način:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } f_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta i direktno nesvodljiva?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$, koja zadovoljava sledeću formulu $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^5(x) \approx x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvorena u odnosu na operatore H, S, P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, 1\}$, ar$(\cdot) = 2$, ar$(1) = 0$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:

$$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z, \tag{1}$$
$$x \cdot y \approx y \cdot x, \tag{2}$$
$$1 \cdot x \approx x. \tag{3}$$

Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_i : i \in N\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 03. februar 2004.

1. Neka su $\mathcal{T} = (T, \wedge_T, \vee_T)$ i $\mathcal{S} = (S, \wedge_S, \vee_S)$ mreže u kojima su svaka dva elementa uporediva, i ρ kongruencija na mreži $\mathcal{S}$. Neka je $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ homomorfizam takav da je $\rho \subseteq Ker\phi$. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\beta : \mathcal{S}/\rho \to \mathcal{T}$ takav da je $im\beta = im\phi$ i $\phi = \beta \circ nat_\rho$.

2. Neka je $\mathbf{L}$ distributivna mreža i $\theta = \{\langle a, b\rangle : a, b \in L \text{ i } a \wedge c = b \wedge c \text{ i } a \vee d = b \vee d\}$.
a) Neka je δ relacija ekvivalencije na L. Dokazati da su *i*) i *ii*) ekvivalentna tvrdjenja.
i) $\delta \in Con\mathbf{L}$,
ii) Za sve x, y, z iz L, ako je $\langle x, y\rangle \in \delta$ onda je $\langle x \wedge z, y \wedge z\rangle \in \delta$ i $\langle x \vee z, y \vee z\rangle \in \delta$.
b) Dokazati da $\theta \in Con\mathbf{L}$.
c) Pokazati da za svaku kongruenciju ϕ mreže $\mathbf{L}$, tako da je $\langle c, d\rangle \in \phi$, važi $\theta \subseteq \phi$.
d) Dokazati da je $\theta = \Theta(c, d)$.

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa prstena na jeziku $L = \{+, \cdot, -, 0\}$ koji zadovoljavaju $(\forall n \in N)(n^2 x = 0 \Rightarrow nx = 0)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, 1\}$, $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}(1) = 0$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &\approx (x \cdot y) \cdot z, && (4)\\ x \cdot y &\approx y \cdot x, && (5)\\ 1 \cdot x &\approx x. && (6) \end{aligned}$$

Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_i : i \in N\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 22. jun 2004.

1. Neka je F pravi filter na skupu S. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:
a) F je ultrafilter;
b) za sve $a, b \in L$ iz uslova $a \vee b \in F$ sledi $a \in F$ ili $b \in F$.

2. Ako je L kompletan lanac, pokazati da je L algebarska mreža ako i samo ako za sve $a_1, a_2 \in L$ i $a_1 < a_2$ postoje $b_1, b_2 \in L$ tako da je $a_1 \leq b_1 \prec b_2 \leq a_2$.

3. Data algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f, g)$, $ar(f) = 3$, $ar(g) = 1$, gde su f i g definisane na sledeći način:
$$f(x,y,z) = min\{max\{x,y\}, z\} \text{ za } x,y,z \in H, \text{ i } g : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta i direktno nesvodljiva?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida u kojima važi sledeće: $xz = yz \Rightarrow x = y$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je na tipu $\mathcal{L}_{BA} = \{\vee, \wedge, ', 0, 1\}$ definisan sistem aksioma $Ax(\mathcal{BA})$:

$$\begin{array}{lrcl lrcl}
(B1) & x \vee y & \approx & y \vee x, & (B7) & x \wedge (y \vee z) & \approx & (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\\
(B2) & x \wedge y & \approx & y \wedge x, & (B8) & x \vee x' & \approx & 1,\\
(B3) & x \vee (y \vee z) & \approx & (x \vee y) \vee z, & (B9) & x \wedge x' & \approx & 0,\\
(B4) & x \wedge (y \wedge z) & \approx & (x \wedge y) \wedge z, & (B10) & x \vee 1 & \approx & 1,\\
(B5) & x \wedge (x \vee y) & \approx & x, & (B11) & x \wedge 0 & \approx & 0.\\
(B6) & x \vee (x \wedge y) & \approx & x, & & & &
\end{array}$$

Dokazati da nije tačno $Ax(\mathcal{BA}) \vdash x \vee (y \wedge z)' \approx (x \vee y') \wedge (x \vee z')$. Dokazati da važi $Ax(\mathcal{BA}) \vdash x \vee x \approx x$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 07. jul 2004.

1. Neka je $\leq$ parcijalno uređenje na skupu A. Dokazati da postoji linearno uređenje $\leq^*$ na A tako da važi $a \leq b \Rightarrow a \leq^* b$.

2. Pronaći sve neizomorfne nedistributivne mreže sa šest elemenata. Da li postoji potapanje između neke dve gore pomenute mreže?

3. Neka je $\mathcal{A} = (\{0,1,2\}, f)$, $ar(f) = 2$, gde je $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1, y \neq 2 \\ 2, & x = 1, y = 2 \end{cases}$

   a) Dokazati da za $\rho \in Con\mathcal{A}$, $a, b \in A$, $a \neq b$ važi: ako je $(a,b) \in \rho$ onda je $\nabla_{\{0,\dots,max\{a,b\}\}} \subseteq \rho$.
   b) Pronaćisve kongruencije algebre $\mathcal{A}$.
   c) Da li je algebra $\mathcal{A}$ prosta?

4. Neka je f unaran operacijski simbola, i $\cdot$ binaran operacijski simbol. Ispitati da li je tačno:
   a) $x \cdot y \approx y \cdot x \vdash (x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z)$
   b) $f^3x \approx x, f^2x \approx fx \vdash fx \approx x$.

5. Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$ koje zadovoljavaju $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^3(x) \approx x)$.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

UNIVERZALNA ALGEBRA, 25. septembar 2004.

1. Neka je $\leq$ parcijalno uređenje na A. Dokazati da postoji linearno uređenje $\leq^*$ na A, tako da za sve $a, b \in A$ iz $a \leq b$ sledi $a \leq^* b$.

2. Neka je $A = \{0,1\}^\omega$, i f, g binarne operacije na A, definisane na sledeći način: $f(a)(i) = a(i+1)$ i $g(a)(i) = a(0)$, za $a \in A$. Dokazati da $\langle A, f, g \rangle$ je poddirektno nesvodljiva algebra.

3. Data je unarna algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f_1, f_2)$, gde su f_1 i f_2 definisane na sledeći način:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } f_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta i direktno nesvodljiva?

4. Neka je K klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 1$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_{2004}\}$.

5. Neka je na tipu $\mathcal{L}_{BA} = \{\vee, \wedge, ', 0, 1\}$ definisan sistem aksioma $Ax(\mathcal{BA})$:

$$\begin{array}{llllllll}
(B1) & x \vee y & \approx & y \vee x, & (B7) & x \wedge (y \vee z) & \approx & (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \\
(B2) & x \wedge y & \approx & y \wedge x, & (B8) & x \vee x' & \approx & 1, \\
(B3) & x \vee (y \vee z) & \approx & (x \vee y) \vee z, & (B9) & x \wedge x' & \approx & 0, \\
(B4) & x \wedge (y \wedge z) & \approx & (x \wedge y) \wedge z, & (B10) & x \vee 1 & \approx & 1, \\
(B5) & x \wedge (x \vee y) & \approx & x, & (B11) & x \wedge 0 & \approx & 0. \\
(B6) & x \vee (x \wedge y) & \approx & x, & & & &
\end{array}$$

   Dokazati da nije tačno $Ax(\mathcal{BA}) \vdash x \vee (y \wedge z)' \approx (x \vee y') \wedge (x \vee z')$. Dokazati da važi $Ax(\mathcal{BA}) \vdash x \vee x \approx x$.