UNIVERZALNA ALGEBRA, 01. februar 2005.

1. Pronaći sve neizomorfne nedistributivne mreže sa šest elemenata. Da li postoji potapanje između neke dve gore pomenute mreže?

2. Dokazati da između dva dobro uređena skupa postoji najvise jedan izomorfizam.

3. Data je monounarna algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f)$, gde je f definisana na sledeći način:

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Da li je algebra $\mathcal{H}$ prosta, direktno nesvodljiva i poddirektno nesvodljiva?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa prstena na jeziku $L = \{+, \cdot, -, \mathit{0}\}$ koji zadovoljavaju $(\forall n \in N)(n^2x = 0 \Rightarrow nx = 0)$.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je K klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot, ^{-1}, \mathit{1}\}, ar(\cdot) = \mathit{2}, ar(^{-1}) = \mathit{1}, ar(\mathit{1}) = \mathit{1}$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_{2005}\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 05. mart 2005.

Studenti koji su slušali jednosemestralni kurs iz Univerzalne algebre rade 1,2,3a,3b i 4 zadatak, dok ostali rade 2,3,4 i 5 zadatak.

1. Na koliko načina možemo troelementni lanac potopiti u uređeni skup $(\{1,2,3,5,30,60\}, |)$. Navesti sva potapanja.

2. Neka je I ideal mreže L i neka je $a \in L$. Za $X \subseteq L$ obelezimo sa $\downarrow \{X\}$ sledeći skup $\{y \in L : \ y \leq x \text{ za neko } x \in X\}$. Dokazati da je skup $\downarrow \{a \vee c : c \in I\}$ ideal i da je najmanji ideal od L koji sadrži I i a.

3. Data je algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f_1, f_2)$, $ar(f_1) = 1$, $ar(f_2) = 2$, gde su f_1 i f_2 definisana na sledeći način:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{array}{c|cccc} f_2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}.$$

   Da li je algebra $\mathcal{H}$:
   a) prosta,
   b) direktno nesvodljiva,
   c) poddirektno nesvodljiva?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida na jeziku $L = \{\cdot\}$ koji zadovoljavaju $(\forall x)((x \cdot x) \cdot x = x \Rightarrow x \cdot x \neq x)$.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, 1\}$, $\text{ar}(\cdot) = 2$, $\text{ar}(1) = 0$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &\approx (x \cdot y) \cdot z, & (1)\\ x \cdot y &\approx y \cdot x, & (2)\\ 1 \cdot x &\approx x. & (3) \end{aligned}$$

Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_i : i \in N\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 06. april 2005.

Studenti koji su slušali jednosemestralni kurs iz Univerzalne algebre rade 1,2,3a,3b i 4 zadatak, dok ostali rade 2,3,4 i 5 zadatak.

1. Na koliko načina možemo troelementni lanac potopiti u uređeni skup $(\{1, 2, 3, 5, 30, 60\}, |)$. Navesti sva potapanja.

2. Dokazati da je mreža L modularna ako i samo ako je zadovoljen uslov:

$$\text{iz } x \wedge z = y \wedge z,\ x \vee z = y \vee z,\ \text{i } x \leq y \text{ sledi } x = y.$$

3. Data je algebra $\mathcal{H} = (\{0, 1, 2, 3\}, f_1, f_2)$, $ar(f_1) = 1$, $ar(f_2) = 2$, gde su f_1 i f_2 definisana na sledeći način:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{array}{c|cccc} f_2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}.$$

Da li je algebra $\mathcal{H}$:
a) prosta,
b) direktno nesvodljiva,
c) poddirektno nesvodljiva?

4. Neka je K klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. a) Dokazati da nije tačno: $x \cdot y \approx y \cdot x \vdash x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$.
b) Dokazati da je tačno: $x \cdot y \approx y \vdash x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 07. maj 2005.

Studenti koji su slušali jednosemestralni kurs iz Univerzalne algebre rade 1,2,3a,3b i 4 zadatak, dok ostali rade 2,3,4 i 5 zadatak.

1. Neka je X proizvoljan skup, Y uredjen skup. Na skupu Y^X svih preslikavanja X u Y definišimo poredak na sledeći način: $f \leq g \Leftrightarrow (\forall x \in X) f(x) \leq g(x)$. Dokazati da je $\langle Y^X, \leq \rangle$ uredjen skup.

2. Dokazati da je mreža L distributivna ako i samo ako je zadovoljen uslov:

$$\text{iz } x \wedge z = y \wedge z, \text{ i } x \vee z = y \vee z \text{ sledi } x = y.$$

3. Data je algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f_1, f_2)$, $ar(f_1) = 1$, $ar(f_2) = 2$, gde su f_1 i f_2 definisana na sledeći način:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da li je algebra $\mathcal{H}$:
a) prosta,
b) direktno nesvodljiva,
c) poddirektno nesvodljiva?

4. Neka je K klasa nemodularnih mreža tipa $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee\}$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je K klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 1$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_{2005}\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 21. jun 2005.

Studenti koji su slušali jednosemestralni kurs iz Univerzalne algebre rade 1,2,3a,3b i 4 zadatak, dok ostali rade 2,3,4 i 5 zadatak.

1. Neka je X proizvoljan skup, Y uredjen skup. Na skupu Y^X svih preslikavanja X u Y definišimo poredak na sledeći način: $f \leq g \Leftrightarrow (\forall x \in X) f(x) \leq g(x)$. Dokazati da je $\langle Y^X, \leq \rangle$ uredjen skup.

2. Pronaći sve mreže sa šest elemenata koje su modularne i nedistributivne.

3. Data je algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f_1, f_2)$, $ar(f_1) = 1$, $ar(f_2) = 2$, gde su f_1 i f_2 definisana na sledeći način:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da li je algebra $\mathcal{H}$:
a) prosta,
b) direktno nesvodljiva,
c) poddirektno nesvodljive?

4. Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$ koje zadovoljavaju $(\forall x)(f^2(x) \approx f(x) \vee f^2(x) \approx x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. Neka je K klasa grupa na jeziku $L = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 1$, koje zadovoljavaju identitet $x^2 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_1, x_2, ..., x_{2005}\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 06. septembar 2005.

1. Neka su L i K dve mreže, a $\varphi : L \to K$ homomorfizam. Dokazati:
a) Ako je M podmreža od L, onda je $\varphi(M)$ podmreža od K;
b) Ako je N podmreža od K, onda je $\varphi^{-1}(N) \in Sub_0(L)$.

2. Data je algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f_1, f_2)$, $ar(f_1) = 3$, $ar(f_2) = 1$, gde su f_1 i f_2 definisani na sledeći način:
$$f_1(x,y,z) = max\{x,y,z\} \quad \text{i} \quad f_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Da li je algebra $\mathcal{H}$:
a) prosta,
b) direktno nesvodljiva,
c) poddirektno nesvodljive?

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida u kojima važi:
$$(\forall x,y)(xy \approx x \vee xy \approx y).$$
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. a) Dokazati da nije tačno: $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z \vdash x \cdot x \approx x$.
b) Dokazati da je tačno: $x \cdot y \approx x \vdash x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$.

UNIVERZALNA ALGEBRA, 03. decembar 2005.

Studenti koji su slušali jednosemestralni kurs iz Univerzalne algebre rade 1,2,3a,3b i 4 zadatak, dok ostali rade 2,3,4 i 5 zadatak.

1. Na koliko načina možemo troelementni lanac potopiti u uređeni skup $(\{1,2,3,7,42,84\}, |)$. Navesti sva potapanja.

2. Dokazati da je mreža L distributivna ako i samo ako je zadovoljen uslov:
$$\text{iz } x \wedge z = y \wedge z,\ x \vee z = y \vee z, \quad \text{sledi } x = y.$$

3. Data je algebra $\mathcal{H} = (\{0,1,2,3\}, f_1, f_2)$, $ar(f_1) = 1$, $ar(f_2) = 2$, gde su f_1 i f_2 definisana na sledeći način:
$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{array}{c|cccc} f_2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}.$$
Da li je algebra $\mathcal{H}$:
a) prosta,
b) direktno nesvodljiva,
c) poddirektno nesvodljiva?

4. Neka je K klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$.
a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

5. a) Dokazati da nije tačno: $x \cdot y \approx y \cdot x \vdash x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$.
b) Dokazati da je tačno: $x \cdot y \approx y \vdash x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$.