UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 06.maj 1999.

1. Neka je $(T, *)$ semigrupa, ρ kongruencija na semigrupi $(S, \cdot)$, i neka je $\phi : S \rightarrow T$ homomorfizam tako da je $\rho \subseteq Ker\phi$. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\beta : S/\rho \rightarrow T$ takav da $im\beta = im\phi$ i $\phi = \beta \circ nat_\rho$.

2. Neka je K klasa grupoida u kojima važi:

$$(\forall x, y)(xy \approx x \vee xy \approx y).$$

a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

3. Neka je K klasa algebri tipa $L = \{*, \mathit{1}\}, ar(*) = \mathit{2}, ar(\mathit{1}) = \mathit{0}$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:

$$x * (y * z) \approx (x * y) * z$$

$$x * x \approx 1$$

$$1 * x \approx x.$$

Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 30.jun 1999.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$,onda je $m^n \geq n^m$.

2. Neka je K klasa grupoida u kojima važi:

$$(\forall x, y)(xy \approx x \vee xy \approx y).$$

Da li je K jednakosna klasa.

3. Neka je K klasa algebri tipa $L = \{*, \mathit{1}\}, ar(*) = \mathit{2}, ar(\mathit{1}) = \mathit{0}$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:

$$x * (y * z) \approx (x * y) * z$$

$$x * x \approx 1$$

$$1 * x \approx x.$$

Opisati K-slobodnu algebru nad $X = x, y$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 30.jun 1999.

1. Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve m, n važi: ako je $1 < m \leq n, n \geq \aleph_0$,onda je $m^n \geq n^m$.

2. a) Ako je algebra $\mathcal{A}$ kongruencijski permutabilna tada je ona i kongruencijski modularna. Dokazati.
b) Da li važi obrnuto?

3. Neka je K klasa prstena na jeziku $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$. Ispitati zatvorenost klase K u odnosu na operatore H,S,P. Da li je K jednakosna klasa?

4. Neka je K klasa Abelovih grupa tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}, ar(\cdot) = 2, ar(^{-1}) = 1, ar(1) = 0$ koje zadovoljavaju identitet $x^3 \approx 1$. Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 14. jul 1999.

1. a) Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve κ, λ, μ važi:

$$\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa^\mu \leq \lambda^\mu.$$

   b) Dati primer $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$ tako da je $\kappa < \lambda$ ali $\kappa^\mu = \lambda^\mu$.

2. Neka je $\mathcal{A}_i, i \in I$, familija algebri i $\theta_i \in Con\mathcal{A}_i, i \in I$. Na skupu $\prod_{i\in I} A_i$ definišemo relaciju $\prod_{i\in I} \theta_i$ ovako: za sve $p, q \in \prod_{i\in I} A_i$je $\langle p, g\rangle \in \prod_{i\in I} \theta_i \leftrightarrow (\forall i \in I)\langle p(i), g(i)\rangle \in \theta_i$.
   a) Dokazati da je $\prod_{i\in I} \theta_i$ kongruencija algebre $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
   b) Dokazati da je $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/_{\prod_{i\in I}\theta_i} \cong \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\theta_i$.

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida tipa $\mathcal{F} = \{f\}$, $ar(f) = 1$ koje zadovoljavaju $(\forall x)(f^2(x) \approx x \vee f^3(x) \approx x)$.
   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Neka je $\mathcal{KM}$ klasa komutativnih monoida tipa $L = \{\cdot, \mathit{1}\}, ar(\cdot) = \mathit{2}, ar(\mathit{1}) = \mathit{0}$. Opisati $\mathcal{KM}$-slobodnu algebru nad $X = \{a_i : i \in N\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 14. jul 1999.

1. a) Dokazati da za proizvoljne kardinalne brojeve κ, λ, μ važi:

$$\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa^\mu \leq \lambda^\mu.$$

   b) Dati primer $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$ tako da je $\kappa < \lambda$ ali $\kappa^\mu = \lambda^\mu$.

2. a) Ako je algebra $\mathcal{A}$ kongruencijski permutabilna tada je ona i kongruencijski modularna. Dokazati.
   b) Da li važi obrnuto?

3. Neka je $\mathcal{K}$ klasa grupoida u kojima važi:

$$xz \approx yz \Rightarrow x \approx y.$$

   a) Da li je $\mathcal{K}$ zatvoren u odnosu na operatore H,S,P?
   b) Da li je $\mathcal{K}$ jednakosna klasa?

4. Algebra $\mathcal{P}$ ima CEP(svojstvo proširenja kongruencija) ako za svaku podalgebru $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{P}$ i $\theta \in Con\mathcal{B}$ postoji $\phi \in Con\mathcal{P}$ tako da je $\theta = \phi \cap B^2$.
   Klasa algebri $\mathcal{K}$ ima svojstvo CEP ako svaka algebra iz $\mathcal{K}$ ima svojstvo CEP.
   Pokazati da ako varijetet $\mathcal{V}$ ima CEP, tada za sve $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ sledi $HS(\mathcal{K}) = SH(\mathcal{K})$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 15.sep 1999.

1. Dokazati da za proizvoljan kardinalan broj $n \geq \aleph_0$ važi $2^n = 3^n$.

2. Neka je ρ kongruencija na semigrupi S, i neka je $\phi : S \to T$ homomorfizam tako da je $\rho \subseteq Ker\phi$. Tada postoji jedinstveni homomorfizam $\beta : S/\rho \to T$ takav da $im\beta = im\phi$ i $\phi = \beta \circ nat_\rho$.

3. Neka je K klasa prstena na jeziku $L = \{+, *, -, 0\}$ u kojima važi: $(\forall x)(x^2 \approx x \vee x^2 \approx -x)$. Ispitati zatvorenost klase K u odnosu na operatore H,S,P.

4. Neka je K klasa algebri tipa $L = \{*, 1\}, ar(*) = 2, ar(1) = 0$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:

$$x * (y * z) \approx (x * y) * z$$

$$x * x \approx 1$$

$$1 * x \approx x.$$

Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x, y\}$.

UNIVERZALNA ALGEBRA - IV A, 17.10.1999.

1. Neka je α ordina, $B \subseteq \alpha$ i $B \neq \alpha$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:
(i) B je početni segment od $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$
(ii) B je tranzitivan skup.

2. Dokazati da se mreža $ConA_1 \times ConA_2$ može potpiti u $Con(A_1 \times A_2)$.

3. Neka je K klasa prstena na jeziku $L = \{+, \cdot, -, 0\}$ koji zadovoljavaju $(\forall n \in N)(n^2 x = 0 \Rightarrow nx = 0)$. Da li je K varijetet?

4. Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F} = \{\cdot, 1\}$, $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}(1) = 0$ koji zadovoljavaju sledeće identitete:

$$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z, \tag{1}$$

$$x \cdot y \approx y \cdot x, \tag{2}$$

$$1 \cdot x \approx x. \tag{3}$$

Opisati K-slobodnu algebru nad $X = \{x_i : i \in N\}$.