UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Anđal Andor

O beskonačnim kardinalima

- diplomski rad -

Novi Sad, *2010*.

Sadržaj

Predgovor..3.

1. Uvod...5.
1.1. Ordinali...5.
1.2. Ekvipotentni skupovi..8.
2. Kardinali kao specijalni ordinali...9.
3. Transfinitna indukcija i rekurzija...14.
4. Operacija sa kardinalima...18.
4.1. Definicije..18.
4.2. Osobine kardinala $\aleph_0$ ....20.
4.3. Osnovna teorema kardinalne aritmetike...22.
5. Osobine beskonačnih kardinala..25.
5.1. Alefi..25.
5.2. Drugo hebrejsko slovo: ב ....28.
5.3. Kofinalnost..29.
6. Stepenovanje kardinala..36.
6.1. Problemi sa stepenovanjem..36.
6.2. Kenigova teorema..37.
6.3. Bernštajn – Hauzdorf – Tarski - teorema...41.
6.4. Šta je ako prihvatimo CH ili GCH?..43.
6.5. Zaključak..45.

Literatura..47.

Kratka biografija...48.

Predgovor

„Beskonačnost! Nikad nijedno pitanje nije tako duboko uznemiravalo duh čovečiji (…) i nijedan pojam ne zahteva bolje razjašnjenje nego beskonačnost.“
Tako piše Hilbert o beskonačnosti.

Teologija, filozofija i, naravno, matematika se bavi sa beskonačnošću, koja je jako problematični pojam u svim tim oblastima. U toku istorije veliki mislioci su probali razjasniti: šta je beskonačnost?
Jako je interesantno da već šestogodišnja deca u zabavištu razgovaraju o takvim stvarima. Ovo je moje iskustvo, zato što sam jednom prilikom čuo da je glavno pitanje u njihovoj maloj diskusiji bilo je sledeće: „Da li je beskonačno jedan broj?“. Naravno, oni su za nekoliko minuta rešavali taj problem. Svi su dali svoj odgovor na to pitanje, tj. da ili ne (neki su i objasnili, zašto), i otišli da se igraju. (Napominjem da je najviše od njih tvrdilo da je beskonačno jedan broj!) Međutim, mi znamo da nije tako jednostavno objasniti pojam beskonačnosti. U matematici beskonačno često označavamo sa simbolom ∞.

Već je Aristotel razlikovao dve vrste beskonačnosti: potencijalnu i aktuelnu.
Potencijalna beskonačnost je bila poznata i u matematici. Na primer niz prirodnih brojeva je u takvom smislu beskonačan: jedan proces koji se može beskrajno nastaviti. A govorimo o aktuelnoj beskonačnosti ako na primer mislimo na celinu (skup) svih prirodnih brojeva, koja je jedna završena stvar. Očigledno da postoji razlika između te dve beskonačnosti. Aktuelna beskonačnost je izuzetno teško priznata od strane matematičara. Georg Kantor[1] je uradio veliku inovaciju u matematici s tim da je uveo aktuelnu beskonačnost i izradio osnove teorije skupova. U tadašnjem vremenu mnogi su bili skeptični što se tiče Kantorove ideje, ali njegovi sledbenici su pokazali da su ove misli opravdane i tačne.

U ovom radu bavimo se beskonačnim kardinalima i videćemo da se oni mogu smatrati za uopštenje prirodnih brojeva i kao takvi, oni su beskonačni brojevi u teoriji skupova. U nastavku ćemo napisati jedan kratak pregled onog što je urađeno, uz napomenu o očekivanom predznanju. Radimo u Cermelo[2]-Frenkelovom[3] sistemu aksioma (oznaka: ZF sistem) sa aksiomom izbora (oznaka: ZFC sistem). Aksiomu izbora skraćeno označavamo sa AC.

[1] Georg Cantor (1845–1918), nemački matematičar
[2] Ernst Zermelo (1871–1953), nemački matematičar
[3] Abraham Fraenkel (1891–1965), izraelski matematičar nemačkog porekla

Ovaj rad sadrži šest poglavlja.

U prvom, uvodnom poglavlju navodimo sve pojmove o ordinalima i ekvipotentnim skupovima, koji su potrebni za definisanje kardinala. Od čitaoca se očekuje da zna osnovne pojmove o uređenjima, naročito: pojam striktnog, dobrog uređenja i izomorfizma.

U drugom poglavlju definišemo kardinale pomoću ordinala i dokazujemo neke osnovne teoreme, koje koristimo u daljem tekstu.

U trećom poglavlju dajemo dokaze teorema transfinitne indukcije i rekurzije. Ove dve tvrdnje su jako važne, koristimo ih više puta.

U četvrtom poglavlju definišemo operacije sa kardinalima. Navodimo osobine tih operacija i dokazujemo osnovnu teoremu kardinalne aritmetike.

U petom poglavlju navodimo osobine beskonačnih kardinala i definišemo jedan važan operator: kofinalnost. Ispitujemo najvažnije osobine ovog operatora.
Za jednoznačne korespondencije, koje se ne mogu smatrati funkcijama, zato što nisu definisane na skupovima, koristimo termin operator. Dakle, ako svakoj stvari x jednoznačno dodelimo jednu stvar $F(x)$, onda korespondenciju F nazivamo operator.

U šestom, ujedno i poslednjom poglavlju bavimo se problemima stepenovanja kardinala. Dajemo dokaz dve najvažnije teoreme, koje nešto bitno tvrde o stepenovanju. Navodimo i šta je problem kontinuuma i uopšteni problem kontinuuma. Na kraju kratko navodimo neke novije rezultate kardinalne aritmetike.

Verujem da s oznakama neće biti nikakvih problema, ali ovde ćemo istaći ono što bi moglo da izazove nejasnoće.
Simbolom $\subseteq$ označavamo podskup bez ograničenja, a simbol $\subset$ ne dozvoljava jednakost. Uglastim zagradama $\langle \cdot,\cdot \rangle$ označavamo uređeni par. Simbolom $\cong$ označavamo izomorfizam. Ako je A jedna kolekcija, onda sa $\bigcup A$ označavamo skup $\{x : \exists y\ (x \in y \wedge y \in A)\}$. Kraj dokaza leme i teoreme obeleženi su znakom ■.

Ovom prilikom bih želeo da se zahvalim svim svojim profesorima i asistentima na pruženom znanju tokom studija. Posebno bih želeo da iskažem zahvalnost dr Rozaliji Madaras-Silađi, mentoru ovog diplomskog rada.

Novi Sad, *jun 2010.* *Anđal Andor*

1. Uvod

1.1. Ordinali

Definicija 1.1.1 *Za neki skup A kažemo da je ordinal ako važi:*

- *iz $x \in A$ sledi $x \subseteq A$ (tj. skup A je tranzitivan) i*
- *relacija $\in_A = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \in y\}$ je striktno dobro uređenje na skupu A.*

Ordinale ćemo obeležavati malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ ...

Tada, ako nam je dat neki skup α, onda da bi α bio ordinal, treba proveriti da li ima sledeće osobine:

1. za sve $x \in \alpha$ važi $x \subseteq \alpha$;
2. za sve $x, y, z \in \alpha$ važi: ako $x \in y$ i $y \in z$ onda $x \in z$;
3. za sve $x, y \in \alpha$ važi tačno jedan od sledećih relacija
$$x \in y \text{ ili } x = y \text{ ili } y \in x;$$
4. svaki neprazan podskup skupa α ima minimalni element.

Na primer, sledeći skupovi su ordinali:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

Primetimo da su svi ovi navedeni ordinali (sem $\emptyset$) oblika $\alpha \cup \{\alpha\}$, za neki ordinal α.

Definicija 1.1.2 *Za ordinal α kažemo da je naredni ordinal ako za neki ordinal β važi*

$$\alpha = \beta \cup \{\beta\}.$$

U tom slučaju pišemo $\alpha = \beta^+$ ili $\alpha = \beta + 1$.[4] *Ako ordinal α nije naredni i $\alpha \neq \emptyset$, kažemo da je granični ordinal.*

[4] Ako pišemo $\beta + 1$, tada je reč o sabiranju ordinala, kojim se mi ovde nećemo baviti.

Kako ne postoji skup koji sadrži sve ordinale odnosno, što isto znači, kolekcija svih ordinala nije skup, govori se o klasi svih ordinala i ta klasa se označava sa On. Na osnovu definicije ordinala, osobina "biti ordinal" je osobina prvog reda u ZF teoriji skupova, tj. postoji formula prvog reda koja znači: "α je ordinal". Skraćeni zapis te formule je $\alpha \in \mathrm{On}$, koji ćemo koristiti u daljem tekstu. Po dogovoru, za ordinale α i β umesto $\alpha \in \beta$ piše se $\alpha < \beta$. To možemo shvatiti kao da smo u klasi On definisali "relaciju" $<$ na sledeći način: $\alpha < \beta$ akko $\alpha \in \beta$. Zbog toga što On nije skup, nije korektno reći "relacija" $<$ jer, rekli smo, relacije definišemo na skupovima.

Detaljno ispitivanje osobine ordinala i dokazivanja teorema o tim specijalnim skupovima nije tema ovog rada. Zato ćemo tu samo navesti, kako smo rekli ranije, najvažnije teoreme, pomoću kojih možemo da stignemo do definicije kardinala.

Teorema 1.1.1 *Na klasi svih ordinala* On *"relacija"* $<$ *ima sve osobine striktnog dobrog uređenja tj. važi irefleksivnost, tranzitivnost, trihotomija i svaki naprazan podskup* On *ima minimum.*

■

Lema 1.1.1 *Neka su* α *i* β *ordinali. Tada*

$$\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \cong \langle \beta, \in_\beta \rangle \Rightarrow \alpha = \beta.$$

■

Teorema 1.1.2 *Za striktno dobro uređen skup* $\langle A, \lhd \rangle$ *postoji tačno jedan ordinal* α *takav da*

$$\langle A, \lhd \rangle \cong \langle \alpha, \in_A \rangle.$$

■

Definicija 1.1.3 *Za striktno dobro uređen skup* $\langle A, \lhd \rangle$ *označimo sa* $type(\langle A, \lhd \rangle)$ *jedinstven ordinal* α *sa osobinom* $\langle A, \lhd \rangle \cong \langle \alpha, \in_A \rangle$. *Ordinal* $type(\langle A, \lhd \rangle)$ *zovemo ordinalni tip od* $\langle A, \lhd \rangle$.

Teorema 1.1.3 *Za sve striktno dobro uređene skupove* $\langle A, \lhd \rangle$ *i* $\langle A^*, \lhd^* \rangle$ *važi:*

$$\langle A, \lhd \rangle \cong \langle A^*, \lhd^* \rangle \text{ akko } type(\langle A, \lhd \rangle) = type(\langle A^*, \lhd^* \rangle).$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Neka je $\langle A, \lhd \rangle \cong \langle A^*, \lhd^* \rangle$.
Kako je $\langle A, \lhd \rangle \cong type(\langle A, \lhd \rangle) = \alpha$ i $\langle A^*, \lhd^* \rangle \cong type(\langle A^*, \lhd^* \rangle) = \alpha^*$, onda $\alpha = type(\langle A, \lhd \rangle) \cong type(\langle A^*, \lhd^* \rangle) = \alpha^*$ pa iz prethodne leme dobijamo

$$\alpha = type(\langle A, \lhd \rangle) = type(\langle A^*, \lhd^* \rangle) = \alpha^*.$$

$(\Leftarrow)$ Iz $\langle A, \lhd \rangle \cong type(\langle A, \lhd \rangle) = type(\langle A^*, \lhd^* \rangle) \cong \langle A^*, \lhd^* \rangle$ sledi $\langle A, \lhd \rangle \cong \langle A^*, \lhd^* \rangle$.

■

Primetimo da kao neposrednu posledicu ove teoreme imamo da se svaki striktno dobro uređen skup $\langle A, \lhd\rangle$ može "indeksirati" po nekom ordinalu α. Naime, važi

Posledica 1.1.1 *Neka je $\langle A, \lhd\rangle$ striktno dobro uređen skup. Tada postoji ordinal α, takav da važi:*

$$A = \{a_\beta : \beta < \alpha\},$$

gde je $a_\beta \neq a_\gamma$ za sve $\beta \neq \gamma$.

Dokaz. Kako je $\langle A, \lhd\rangle$ striktno dobro uređen skup, tada postoji jedinstven ordinal α da $\langle A, \lhd\rangle \cong \langle \alpha, \in_A\rangle$. Ako je φ: $A \to \alpha$ izomorfizam između $\langle A, \lhd\rangle$ i $\langle \alpha, \in_A\rangle$, onda treba uzeti $a_\beta = \varphi^{-1}(\beta)$ za sve $\beta < \alpha$.

■

Ako prihvatimo aksiomu izbora (AC), onda dobijamo da se svaki skup može indeksirati po nekom ordinalu α.

U nastavku dajemo definiciju specijalnih ordinala tzv. prirodnih brojeva.

Definicija 1.1.4 *Za ordinal α kažemo da je prirodan broj ako za sve ordinale $\beta \leq \alpha$ važi $\beta = \emptyset$ ili je β naredni ordinal.*

Na primer, ordinali $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, … su prirodni brojevi.

Teorema 1.1.4 *Elementi prirodnog broja su opet prirodni brojevi.*

Dokaz. Neka je α prirodan broj i $\beta \in \alpha$. Treba dokazati da za sve $\gamma \leq \beta$ važi $\gamma = \emptyset$ ili je γ naredni ordinal. Kako je $\gamma \leq \beta < \alpha$, sledi $\gamma < \alpha$, što implicira: $\gamma = \emptyset$ ili je γ naredni ordinal.

■

Teorema 1.1.5 *Ako je α prirodan broj, onda je i $\alpha \cup \{\alpha\}$ prirodan broj.*

Dokaz. Neka je $\beta \leq \alpha \cup \{\alpha\}$. Ako je $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$, onda je β naredni ordinal. Ako je $\beta < \alpha \cup \{\alpha\}$, onda je ili $\beta \in \alpha$ ili $\beta = \alpha$. Tada je $\beta \leq \alpha$, i kako je α prirodan broj, onda je ili $\beta = \emptyset$ ili je β naredni ordinal.

■

Ova teorema implicira da su sledeći ordinali prirodni brojevi.

$0 = \emptyset$,
$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\}$,
$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$,
$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$,
…
$n + 1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\}$,
…

Bez dokaza napomenimo da klasa svih prirodnih brojeva jeste skup, koji označavamo sa ω, i zadovoljava sve Peanove aksiome[5]. Ta činjenica može da posluži kao dokaz da naša formalna definicija prirodnog broja pokriva intuitivan pojam prirodnog broja. Lako je uvideti da važi:

Teorema 1.1.6 *Skup ω je najmanji granični ordinal.*

■

1.2. Ekvipotentni skupovi

Definicija 1.2.1 *Za dva proizvoljna skupa A i B kažemo da su ekvipotentni ako postoji bijekcija f: $A \to B$. U tom slučaju pišemo $A \sim_f B$ ili samo $A \sim B$.*

Definicija 1.2.2 *Za dva proizvoljna skupa A i B pisaćemo $A \preccurlyeq B$ ako postoji injekcija iz A u B, dok ćemo oznaku $A \prec B$ koristiti u slučaju da je $A \preccurlyeq B$ i nije $A \sim B$.*

Teorema 1.2.1 *Ako su A, B i C proizvoljni skupovi, tada je*

1) a) $A \sim A$;
b) $A \sim B$ onda $B \sim A$;
c) $A \sim B$ i $B \sim C$ onda $A \sim C$.

2) a) $A \preccurlyeq A$;
b) $A \preccurlyeq B$ i $B \preccurlyeq A$ onda $A \sim B$ (Šreder[6]–Bernštajnova[7] teorema);
c) $A \preccurlyeq B$ i $B \preccurlyeq C$ onda $A \preccurlyeq C$.

Teorema 1.2.3 (Kantor) *Za svaki skup A važi $A \prec P(A)$, gde je $P(A)$ partitivni skup skupa A.*

Dokaz. Ako definišemo funkciju f: $A \to P(A)$ sa $f(x) = \{x\}$, $x \in A$, onda je f injekcija, tj. $A \preccurlyeq P(A)$. Treba dokazati da nije $A \sim P(A)$.
Pretpostavimo suprotno, da je $A \sim P(A)$, tj. da postoji bijekcija g: $A \to P(A)$. Tada za $a \in A$ važi $g(a) \subseteq A$. Posmatramo skup S definisan sa

$$S = \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Kako je $S \in P(A)$, a g je sirjekcija, postoji $s \in A$ takav da je $g(s) = S$. Tada je moguće:

- $s \in S$. Tada je $s \notin g(s) = S$. Kontradikcija.
- $s \notin S$. Tada je $s \in g(s) = S$. Kontradikcija.

Dakle, $A \nsim P(A)$, što sa $A \preccurlyeq P(A)$ daje $A \prec P(A)$.

■

[5] Sistem aksioma prirodnih brojeva, koji je prvi put navodio italijanski matematičar, Giuseppe Peano (1858–1932).
[6] F. W. Schröder (1841–1902), nemački matematičar
[7] Felix Bernstein (1878–1956), nemački matematičar

2. Kardinali kao specijalni ordinali

"Relacija" ekvipotentnosti ~ je refleksivna, simetrična i tranzitivna (teorema 1.2.1), tj. na prvi pogled ~ je relacija ekvivalencije. Znamo da svaka relacija ekvivalencije vrši particiju (razbijanje) odgovarajućeg skupa na klase. Dakle, i ~ razbija kolekciju svih skupova na klase. Najčešće se tako definiše pojam kardinalnog broja nekog skupa A (u oznaci |A|), kao klasa svih skupova ekvipotentnih skupu A, tj.

$$|A| = \{X : X \sim A\}.$$

Drugim rečima, zajednička osobina svih skupova koji su iz iste klase zove se kardinalnost (ili kardinal).

Ali ova definicija nije baš sasvim korektna. Znamo da ne postoji skup svih skupova odnosno, drugačije rečeno, kolekcija svih skupova nije *skup*. Na osnovu ove činjenice možemo odmah primetiti da nije korektno ako kažemo "relacija ekvipotentnost" zato što relacije definišemo samo na skupovima.

Prethodna definicija kardinalnog broja za neki skup nije korektna ni u aksiomatskoj teoriji skupova ZFC, jer na ovaj način se uvodi jedan novi osnovni pojam. Međutim, cilj u aksiomatskoj teoriji skupova je to da svi objekti sa kojima radimo, pa dakle i kardinalni brojevi, budu *skupovi*.

Ovaj problem će biti rešen, ako se dokaže da postoji takav operator koji ekvipotentnim skupovima dodeljuje iste "stvari" dok neekvipotentnim skupovima dodeljuje različite "stvari". Zbog toga uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 2.1 *Kažemo da je operator F* ***kompatibilan*** *sa "relacijom" ekvipotentnosti ~ ako za svaka dva skupa A i B važi:*

$$F(A) = F(B) \text{ ako i samo ako } A \sim B.$$

Ako se nađe takav operator F, onda se može korektno definisati pojam kardinalnog broja, tako da se izbegne pomenuti nedostatak.

Teorema 2.1 *Neka je operator F definisan za proizvoljan skup A na sledeći način:*

$$F(A) = \min_{<} \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \sim A\}$$

Tada je F kompatibilan sa relacijom ~ . Dakle, operator koji proizvoljnom skupu dodeljuje najmanji ordinal, koji je ekvipotentan tom skupu, kompatibilan je sa relacijom ~ .

Dokaz. Iz teoreme 1.1.1 i 1.1.2 sledi da je operator F dobro definisan. Naime, na osnovu aksiome izbora (odnosno njenog ekvivalenta) svaki skup A se može dobro urediti, pa postoji tačno jedan ordinal α takav da je $\alpha \sim A$, tj. skup $\{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \sim A\}$ nije prazan. Kako svaki skup ordinala ima minimalni element i skup $\{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \sim A\}$ ima minimalni element.

($\Rightarrow$) Po definiciji za proizvoljne skupove A i B važi $A \sim F(A)$ i $B \sim F(B)$. Zato je $A \sim F(A) = F(B) \sim B$ tj. $A \sim B$.

($\Leftarrow$) Kako $A \sim B$ onda za proizvoljan ordinal α važi $\alpha \sim A \Leftrightarrow \alpha \sim B$ pa imamo

$$F(A) = \min_{<} \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \sim A\} = \min_{<} \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \sim B\} = F(B).$$

■

Definicija 2.2 ***Kardinalni broj*** *(ili samo* ***kardinal****) nekog skupa A je najmanji ordinal ekvipotentan skupu A, tj.*

$$|A| = \min_{<} \{\alpha : \alpha \sim A\}.$$

Treba naglasiti da se kardinalni broj može definisati i bez pozivanja na aksiomu izbora.

Definicija 2.3 *Za neki ordinal α kažemo da je kardinal ako je*

$$\alpha = |\alpha|.$$

Posledica 2.1 *Za proizvoljan skup A važi* $||A|| = |A|$, *tj.* $|A|$ *je jedan skup kardinalnosti* $|A|$.

Dokaz. Kako je $A \sim |A|$, oba skupa imaju istu kardinalnost.

■

Posledica 2.2 *Ordinal α je kardinal ako i samo ako za svaki $\beta < \alpha$ važi $\beta \nsim \alpha$.*

Dokaz. α je kardinal ako i samo ako je $\alpha = |\alpha|$ i $|\alpha|$ je najmanji ordinal takav da $\alpha \sim |\alpha|$.

■

Kardinale ćemo obeležavati malim grčkim slovima $\kappa, \lambda, \mu, \tau$, ...

Lema 2.1 *Neka je A skup ordinala takav da $A \subseteq \beta$. Neka su $\alpha = type(\langle A, <\rangle)$ i $f\colon A \to \alpha$ izomorfizam. Tada je za sve $\eta \in A$*

$$f(\eta) \leq \eta.$$

Šta više, $\alpha \leq \beta$.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da je $f(\eta) \leq \eta$. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji takav $\eta \in A$ da $f(\eta) > \eta$. Neka je η_0 prvi element od A takav da

$$f(\eta_0) > \eta_0.$$

Tada za sve $\eta < \eta_0$, $\eta \in A$, važi

$$f(\eta) \leq \eta < \eta_0,$$

a za sve $\eta \geq \eta_0$, $\eta \in A$, imamo

$$f(\eta) \geq f(\eta_0) > \eta_0.$$

Tako smo dobili kontradikciju, jer za sve $\eta \in A$ imamo: $f(\eta) < \eta_0$ ili $f(\eta) > \eta_0$, što znači da $f[A] = \alpha$ nije ordinal.[8] Dakle, za sve $\eta \in A$ važi $f(\eta) \leq \eta$, što implicira $\alpha \subseteq \beta$ odnosno $\alpha \leq \beta$.

■

Teorema 2.2 *Neka su A i B dva neprazna skupa. Tada važi:*

$$|A| \leq |B| \text{ ako i samo ako } A \preccurlyeq B.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $|A| \leq |B|$, imamo bijekcije $f\colon A \to |A|$ i $g\colon B \to |B|$, i injekciju $\iota\colon |A| \to |B|$ koja je identično preslikavanje (jer je $|A| \subseteq |B|$). Tada je $g^{-1} \circ \iota \circ f$ injekcija iz A u B pa imamo $A \preccurlyeq B$.

($\Leftarrow$) Neka je j injekcija od A u B. Tada je $k = g \circ j \circ f^{-1}$ injekcija od $|A|$ u $|B|$. Direktna slika $k[|A|]$ je neki podskup ξ od $|B|$.
Neka je $\alpha = type(\langle \xi, <\rangle)$ i $\varphi\colon \xi \to \alpha$ izomorfizam. Tada je kompozicija

$$\varphi \circ k : |A| \to \alpha$$

bijekcija, pa $|A| = |\alpha|$. Kako je $\xi \subseteq |B|$, na osnovu prethodne leme

[8] Ako je $f\colon X \to Y$ proizvoljna funkcija i $A \subseteq X$, onda se skup $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$ zove direktna slika skupa A.

$$\alpha \leq |B|.$$

Tada važi

$$|A| = |\alpha| \leq \alpha \leq |B|.$$

■

Definicija 2.4 *Za skup A kažemo da je* ***konačan*** *ako je ekvipotentan sa nekim prirodnim brojem, tj.* $(\exists n \in \omega)\ n \sim A$. *Skup A je* ***beskonačan*** *ako nije konačan.*

Kako se u ovom radu bavimo sa beskonačnim kardinalima, a ne konačnim, tu samo napomenimo: može se dokazati da su prirodni brojevi tačno konačni kardinali. U tom dokazu se koristi jedna važna lema, koju navodimo u nastavku, jer pomoću te leme pokazujemo i to da je skup prirodnih brojeva beskonačan.

Lema 2.2 *Nijedan konačan skup nije ekvipotentan svom pravom podskupu.*

■

Teorema 2.3 *ω je najmanji beskonačan kardinal.*

Dokaz. Kako je ω ekvipotentan svom pravom podskupu, tada na osnovu prethodne leme imamo da je ω beskonačan. Neka je $\beta < \omega$. Tada je $\beta \in \omega$, tj. β je prirodan broj pa ω ne može biti ekvipotentan prirodnom broju, jer je beskonačan. Tako smo dobili da $\forall \beta < \omega\ \beta \nsim \omega$, što znači da je ω kardinal. ω je i najmanji beskonačan kardinal, jer su svi ordinali $\beta < \omega$ prirodni brojevi, a oni su konačni.

■

Zbog istorijskog razloga, kardinal ω se označava i sa $\aleph_0$, gde je $\aleph$ prvo slovo hebrejskog alfabeta[9]. Naime, dok nisu smatrali kardinale za specijalne ordinale, $\aleph_0$ je bio kardinal skupa ω. U daljem tekstu ćemo koristiti obe oznake.

Znamo da ω je (najmanji) granični ordinal. Možemo dokazati i to da su svi beskonačni kardinali granični ordinali. Ovu činjenicu ćemo više puta koristiti kasnije.

Lema 2.3 *Za svaki ordinal $\alpha \geq \omega$ važi*

$$|\alpha| = |\alpha^+|.$$

Dokaz. Definišemo funkciju φ: $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \rightarrow \alpha$ na sledeći način:

[9] Kantor je prvi put označavao kardinal skupa prirodnih brojeva sa $\aleph_0$.

$$\varphi(\beta) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ako je } \beta = \alpha; \\ \beta, & \text{ako je } \omega \leq \beta < \alpha; \\ \beta \cup \{\beta\}, & \text{ako je } \beta < \omega. \end{cases}$$

Funkcija φ je bijekcija.

■

Teorema 2.3 *Svaki beskonačan kardinal je granični ordinal.*

Dokaz. Neka je κ neki beskonačan kardinal, tj. $\kappa \geq \omega$. Pretpostavimo da je κ naredni ordinal i $\kappa = \alpha \cup \{\alpha\}$, za neki ordinal α. Tada je $\alpha \geq \omega$ jer u suprotnom bi bilo $\alpha \in \omega$ i $\alpha \cup \{\alpha\} \in \omega$ tj. $\kappa < \omega$. Dakle, $\alpha \geq \omega$ pa možemo napraviti bijekciju između $\alpha \cup \{\alpha\}$ i α kao što u prethodnoj lemi. Sledi da $\kappa = \alpha \cup \{\alpha\} \sim \alpha$, ali to znači da za $\alpha < \kappa$ $\alpha \sim \kappa$ pa dobili smo kontradikciju sa pretpostavkom da je κ kardinal.

■

Definicija 2.5 *Za skup A kažemo da je* ***prebrojivo beskonačan*** *ako je* $|A| = \omega$. *Skup A je* ***prebrojiv*** *ako je konačan ili prebrojivo beskonačan, tj.* $|A| \leq \omega$. *U suprotnom, tj. ako je* $|A| > \omega$, *onda je skup A* ***neprebrojiv***.

Teorema 2.4 *Postoji neprebrojiv skup (kardinal).*

Dokaz. Na osnovu Kantorove teoreme važi $\omega < |P(\omega)|$, pa je $P(\omega)$ neprebrojiv skup, a $|P(\omega)|$ je neprebrojiv kardinal.

■

Primer: Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije prebrojiv.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da se za proizvoljan neprazan prebrojiv podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ može naći jedan realan broj $y \in \mathbb{R} \setminus A$. Kako je A prebrojiv može se napisati u obliku $A = \{a_n : n \in \omega\}$.
Svaki realan broj ima jadan i samo jedan decimalni zapis (tj. može se napisati u obliku beskonačnog decimalnog razlomka) sa beskonačno mnogo decimalnih mesta različit od 9. Neka a_n^k označava k-tu cifru u decimalnom zapisu broja a_n. (Dakle, za svaki n važi da $a_n^k \neq 9$ za beskonačno mnogo indeksa k.) Definišemo niz y_n na sledeći način:

$$y_n = 0 \text{ ako je } a_n^n \neq 0;$$
$$y_n = 1 \text{ ako je } a_n^n = 0.$$

Tada je 0, $y_0 y_1 \ldots y_n \ldots$ jedan decimalni zapis nekog realnog broja y. Na ovaj način smo dobili da se n-ta decimalna mesta realnih brojeva y i a_n razlikuju za proizvoljan $n \in \omega$. Kako svaki realan broj a_n ima samo jedan decimalni zapis takav da $a_n^k \neq 9$ za beskonačno mnogo indeksa k, zaključujemo da $y \neq a_n$ za svaki $n \in \omega$. Dakle, $y \notin A$.

Definicija 2.6 *Kardinalni broj skupa realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *označavamo sa* $\mathfrak{c}$ (*čitamo*: ***kontinuum***).

3. Transfinitna indukcija i rekurzija

Da je On skup, mogli bi reći da $\langle \mathrm{On}, \leq \rangle$ zadovoljava uslov minimalnosti (tj. da svaki neprazan podskup On ima minimum), pa bi u njemu važio i uslov induktivnosti[10], koji omogućava sprovođenje dokaza unutar On koristeći indukciju analognu matematičkoj indukciji u skupu prirodnih brojeva. No, On je prava klasa. Ipak, i u klasi On svih ordinala možemo koristiti princip koji je analogan principu matematičke indukcije. To je tzv. princip transfinitne indukcije. On se zasniva na sledećoj teoremi.

Teorema 3.1 *Neka je Φ neka osobina koja je definisana za sve ordinale. Pretpostavimo da za proizvoljan ordinal α važi:*

(1) Ako svi ordinali $\beta < \alpha$ imaju osobinu Φ, onda i α ima osobinu Φ.

Tada osobinu Φ imaju svi ordinali.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoje ordinali koji nemaju osobinu Φ, tj. da je klasa

$$A = \{\gamma \in \mathrm{On} : \neg\Phi(\gamma)\}$$

neprazna. Neka je γ_0 (jedinstven) minimalni element u A koji po teoremi 1.1.1 sigurno postoji. Tada za sve $\beta < \gamma_0$ važi da imaju osobinu Φ, ali to implicira na osnovu uslova *(1)* da i γ_0 ima osobinu Φ, tj. $\Phi(\gamma_0)$ a to je kontradikcija. Dakle, klasa A je prazna i za sve $\alpha \in \mathrm{On}$ važi $\Phi(\alpha)$.

∎

[10] Uređen skup $\langle A, \trianglelefteq \rangle$ zadovoljava uslov induktivnosti ako za proizvoljan $B \subseteq A$ važi sledeće: $(\forall a \in A)\ (\{x \in A : x \triangleleft a\} \subseteq B \Rightarrow a \in B)$, tada je $A = B$.

Ova teorema je zapravo uopštenje matematičke indukcije u skupu prirodnih brojeva. Tvrđenje ostaje tačno ako umesto ordinala stavimo prirodne brojeve.

Matematička indukcija se formuliše ovako: Ako $\Phi(0)$ i za sve $n \in \omega$ $\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n + 1)$ onda $\Phi(n)$ važi za sve $n \in \omega$.

Ovu formulaciju ne možemo direktno koristiti i za ordinale jer npr. 0 je konačan, i ako je α konačan, onda i $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ konačan ali postoji ordinal koji nije konačan (npr. ω). Formulacija teoreme 3.1 je dobra, zato što je primenljiva i za prirodne brojeve i za ordinale. Možemo primetiti da ne treba posebno pretpostaviti osobinu $\Phi(0)$, jer $\forall\beta < 0\ \Phi(\beta)$ važi za svaku osobinu Φ.

U teoremi transfinitne rekurzije pokazaćemo da uvek postoji takav operator F za koji $F(\alpha)$ na zadati način zavisi od toga kako smo definisali operator F na ordinalima $\beta < \alpha$.

Teorema 3.2 *Neka je G operator koji svakoj funkciji f dodeljuje jedan skup $G(f)$. Tada postoji na ordinalima jednoznačno određen operator F takav da za svaki ordinal α važi:*

$$F(\alpha) = G(F|\alpha).$$

Pre dokaza teoreme podsetimo se da restrikcija jednog operatora na skup jeste funkcija. To kako je operator F definisan do zadatog α, tačno opisuje funkcija $F|\alpha$, jer ova ne daje samo šta su $F(\beta)$ vrednosti, nego i to kako zavisi $F(\beta)$ od β u slučaju $\beta < \alpha$. A mi tražimo takav F za koji $F(\alpha)$ za svaki α na unapred dati "G način" zavisi od toga, kako smo dotle definisali F, odnosno tražimo takav F koji na "G način" zavisi od $F|\alpha$.

Dokaz. Prvo pokazujemo jedinstvenost. Pretpostavimo da i F_1 i F_2 zadovoljavaju tvrđenje teoreme. Kako je $F_1 \neq F_2$ i minimalnost važi u On (teorema 1.1.1) sledi da postoji jedan takav ordinal α za koji je $F_1(\alpha) \neq F_2(\alpha)$ dok za sve ordinale $\beta < \alpha$ $F_1(\beta) = F_2(\beta)$. A to znači $F_1|\alpha = F_2|\alpha$. Ali tada dobijamo

$$F_1(\alpha) = G(F_1|\alpha) = G(F_2|\alpha) = F_2(\alpha)$$

što je kontradikcija.

U nastavku dokaza nazvaćemo funkciju f, definisanu na proizvoljnom ordinalu α, *dobrom funkcijom* ako

$$\forall\beta < \alpha\ f(\beta) = G(f\,|\beta).$$

Stav 3.2.1 Za svaki ordinal α postoji najviše jedna dobra funkcija f definisana na α.

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dve različite dobre funkcije f_1 i f_2 na α. Kako je $f_1 \neq f_2$ sledi da je skup $\{\beta \in \alpha : f_1(\beta) \neq f_2(\beta)\}$ neprazan. Opet na osnovu teoreme 1.1.1 u tom skupu postoji najmanji element γ. Tada je $\forall\delta < \gamma\ f_1(\delta) = f_2(\delta)$ tj. $f_1|\gamma = f_2|\gamma$. Kako su f_1 i f_2 dobre funkcije sledi

$$f_1(\gamma) = G(f_1|\gamma) = G(f_2|\gamma) = f_2(\gamma)$$

što je kontradikcija.
Dakle, $f_1 = f_2$. ■

Ako za proizvoljan ordinal α postoji dobra funkcija onda tu funkciju, zato što ima tačno jedna, označimo sa f_α .

Stav 3.2.2 Ako je f_α dobra funkcija za α i $\beta < \alpha$ onda je i $f_\beta = f_\alpha|\beta$ dobra funkcija za β.

Dokaz. Treba proveriti da važi

$$\forall\gamma < \beta\ \ f_\beta(\gamma) = G(f_\beta\,|\gamma).$$

Kako je f_α dobra funkcija tj. $\forall\beta < \alpha\ \ f_\alpha(\beta) = G(f_\alpha|\beta)$ onda i za proizvoljan $\gamma < \beta < \alpha$ važi $f_\alpha(\gamma) = G(f_\alpha|\gamma)$ i što je isto $(f_\alpha|\beta)(\gamma) = G((f_\alpha|\beta)|\gamma)$ pa zbog jednoznačnosti f_β za β dobijamo da je $f_\beta = f_\alpha|\beta$ dobra funkcija za β. ■

Stav 3.2.3 Za svaki ordinal α postoji dobra funkcija f_α.

Dokaz. Ovaj stav dokazaćemo transfinitnom indukcijom. Pretpostavimo da za sve ordinale $\beta < \alpha$ postoji dobra funkcija f_β. Razlikujemo dva slučaja: *a)* α naredni ordinal *b)* α granični ordinal.

a) Neka je $\alpha = \beta + 1$. Definišemo f na sledeći način:

$$D(f) = \alpha,$$

$$f(\gamma) = \begin{cases} f_\beta(\gamma) & \text{ako } \gamma < \beta, \\ G(f_\beta) & \text{ako } \gamma = \beta. \end{cases}$$

Tada je

$$f\,|\gamma = \begin{cases} f_\beta|\gamma & \text{ako } \gamma < \beta, \\ f_\beta|\gamma & \text{ako } \gamma = \beta, \end{cases}$$

tj.

$$f\,|\gamma = f_\beta\,|\gamma$$

za proizvoljan $\gamma \leq \beta$.

Na osnovu induktivne pretpostavke možemo zaključiti:

$$\forall\gamma < \alpha\ \ f(\gamma) = G(f_\beta\,|\gamma) = G(f\,|\gamma),$$

što znači da je f dobra funkcija za ordinal α.

b) Neka je sada α granični ordinal. Tada za proizvoljan $\beta < \alpha$

$$\beta + 1 < \alpha.$$

Definišemo f na sledeći način:

$$D(f) = \alpha,$$

$$\forall \gamma < \alpha \;\; f(\gamma) = f_{\gamma+1}(\gamma).$$

Na osnovu stava 3.2.2 za proizvoljan $\gamma < \beta < \alpha$ važi

$$f(\gamma) = f_{\gamma+1}(\gamma) = (f_\beta|\gamma+1)(\gamma) = f_\beta(\gamma),$$

pa zato za proizvoljan $\gamma \leq \beta < \alpha$

$$f|\gamma = f_\beta|\gamma.$$

Tada koristeći induktivnu pretpostavku dobijamo

$$f(\gamma) = f_{\gamma+1}(\gamma) = G(f_{\gamma+1}|\gamma) = G(f|\gamma)$$

što znači da je f dobra funkcija za ordinal α.

Dakle, u oba slučaja f zadovoljava $\forall \beta < \alpha \;\; f(\beta) = G(f|\beta)$, tj. f je dobra funkcija za ordinal α.

Konačno, ako primenimo teoremu transfinitne indukcije možemo zaključiti da za svaki ordinal α postoji jedinstvena dobra funkcija f_α. Ako stavimo da

$$F(\alpha) = f_{\alpha+1}(\alpha)$$

onda činjenicu da F zadovoljava jednačinu

$$F(\alpha) = G(F|\alpha)$$

možemo dokazati slično kao egzistenciju f u slučaju *b)*.

■

4. Operacije sa kardinalima

4.1. Definicija

Prvo ćemo ponoviti neke skupovne operacije, koje ćemo koristiti u definiciji operacija sa kardinalima.

Definicija 4.1.1 *Neka je* $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *kolekcija skupova. Direktan proizvod kolekcije* $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$*, u oznaci* $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$*, je skup svih funkcija* $f\colon \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$*, takvih da za svako* $\gamma \in \Gamma$ *važi* $f(\gamma) \in A_\gamma$*.*

Obično, umesto $f(\gamma)$ pišemo f_γ , a umesto f pišemo $\langle f_\gamma : \gamma \in \Gamma\rangle$. Naravno, $\langle f_\gamma : \gamma \in \Gamma\rangle$ nije nikakva "Γ-torka" nego funkcija, tj. skup uređenih parova $\{\langle \gamma, f_\gamma\rangle : \gamma \in \Gamma\}$.

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{\langle f_\gamma : \gamma \in \Gamma\rangle : \forall\gamma \in \Gamma \ (f_\gamma \in A_\gamma)\}$$

Dakle, direktan proizvod $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ je skup svih izbornih funkcija kolekcije skupova $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Definicija 4.1.2 *Neka su A i B dva proizvoljna skupa. Tada skup "A na stepenu B", u oznaci* ${}^{B}A$*, je skup svih preslikavanja skupa B u skup A, tj.*

$${}^{B}A = \{f \mid f : B \to A\}.$$

Teorema 4.1.1 *Za svaki skup A važi*: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Dokaz. Traženu bijekciju $\varphi\colon P(A) \to {}^{A}2$ definišemo na sledeći način: za sve $B \subseteq A$

$$\varphi(B) = \chi_B,$$

gde je $\chi_B \in {}^{A}2$ karakteristična funkcija skupa B u A, tj.

$$\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B,$$
$$\chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin B.$$

Dokažimo da je φ injekcija.
Neka su B, $C \subseteq A$ i $B \neq C$. Tada za svaki $x \in B \triangle C$

$$\chi_B(x) \neq \chi_C(x)$$

i tako

$$\chi_B \neq \chi_C.$$

Dokažimo da je φ sirjkcija.
Ako je $f \in {}^A2$ onda $\chi_{\{x \in A\, :\, f(x) = 1\}} = f$.

■

Sada dajemo definiciju sabiranja, množenja i stepenovanja kardinalnih brojeva.

Definicija 4.1.3 *Neka je $\{\kappa_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ proizvoljna kolekcija kardinalnih brojeva, i κ i λ su kardinalni brojevi. Tada važi*

1) *Kardinalni broj skupa $\prod\!\!\!\prod_{\gamma\in\Gamma} \kappa_\gamma$ označimo sa $\prod_{\gamma\in\Gamma} \kappa_\gamma$, i zovemo* ***proizvod kardinalnih brojeva κ_γ***, *$\gamma \in \Gamma$.*
2) *Kardinalni broj skupa $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \kappa\times\{\gamma\}$ označimo sa $\sum_{\gamma\in\Gamma} \kappa_\gamma$, i zovemo* ***zbir kardinalnih brojeva κ_γ***, *$\gamma \in \Gamma$.*
3) *Kardinalni broj skupa ${}^\lambda\kappa$ označimo sa κ^λ, i zovemu* ***λ-ti stepen kardinalnog broja κ***.

Da razlikujemo sabiranje ordinala od sabiranja kardinala, zbir dva proizvoljna kardinala κ i λ označavamo sa $\kappa \oplus \lambda$ umesto $\kappa + \lambda$ (oznaku "+" koristimo za označavanje sabiranja ordinala). Slično, u slučaju množenja pišemo $\kappa \otimes \lambda$ umesto $\kappa \cdot \lambda$.
Nije teško videti da ni sabiranje ni množenje "ne izvodi" iz skupa prirodnih brojeva ω, tj. za sve $n, m \in \omega$ važi $n \oplus m \in \omega$ i $n \otimes m \in \omega$.

Teorema 4.1.2 *Sabiranje i množnje kardinalnih brojeva su komutativne i asocijativne, tj. za proizvoljne kardinale κ, λ i μ važi:*

a) $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$,
b) $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$,
c) $\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$,
d) $\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu$.

■

Teorema 4.1.3 *Ako su κ, λ i μ proizvoljni kardinali, tada važi:*

a) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa \oplus \mu \leq \lambda \oplus \mu$,
b) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa \otimes \mu \leq \lambda \otimes \mu$,
c) $\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \oplus (\kappa \otimes \mu)$.

■

Teorema 4.1.4 *Ako su κ, λ i μ proizvoljni kardinali, tada važi:*

a) $(\kappa \otimes \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \otimes \lambda^{\mu}$,
b) $\kappa^{\lambda \otimes \mu} = (\kappa^{\lambda})^{\mu}$,
c) $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^{\lambda} \otimes \kappa^{\mu}$,
d) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$,
e) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$.

■

4.2. Osobine kardinala $\aleph_0$

Tvrđenje 4.2.1

1) $\aleph_0 \oplus \aleph_0 = \aleph_0$,
2) $\aleph_0 \otimes \aleph_0 = \aleph_0$,
3) $\aleph_0^{\,n} = \aleph_0$.

Dokaz. 1) Tvrđenje sledi iz jednakosti $\omega = \{0, 2, 4, \ldots\} \cup \{1, 3, \ldots\}$.
2) Prvo dokazujemo da svaki $n \in \omega\backslash\{0\}$ može da se prikaže na jedinstven način u obliku

$$n = 2^a (2b + 1), \text{ gde } a, b \in \omega.$$

Dokaz dajemo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrđenje važi, jer je $1 = 2^0 \cdot (2 \cdot 0 + 1)$. Pretpostavimo da svaki broj $m < n$ može da se prikaže u datom obliku. Tada razlikujemo dva slučaja:

- $n = 2m$. Tada je za $m < n$ imamo $m = 2^a (2b + 1)$, za neke $a, b \in \omega$. Kako je $n = 2m$ dobijamo $n = 2^{a+1} (2b + 1)$.
- $n = 2m + 1$. Tada imamo $n = 2^0 (2m + 1)$.

Dakle, svaki $n \in \omega\backslash\{0\}$ može da se prikaže u datom obliku. Ako još pokažemo jedinstvenost prikaza, onda smo gotovi.
Neka je $2^a (2b + 1) = 2^c (2d + 1)$ za neke $a, b, c, d \in \omega$. Ako je $a > c$, onda je $2^{a-c} (2b + 1) = (2d + 1)$, što je nemoguće, jer je leva strana jednakosti paran a desna neparan broj. Slično, dobijamo kontradikciju ako je $a < c$, dakle imamo $a = c$. Tada dobijamo $(2b + 1) = (2d + 1)$, što daje $b = d$. Dokaz je završen.

Definišemo sada preslikavanje f: $\omega \times \omega \to \omega\backslash\{0\}$ sa

$$f(\langle a,b\rangle) = 2^a (2b + 1).$$

Injektivnost preslikavnja f sledi iz jedinstvenosti prikaza

$$n = 2^a (2b + 1),$$

a sirjektivnost preslikavanja f sledi iz egzistencije istog prikaza. Tada funkcija f je bijekcija, pa važi $\aleph_0 \otimes \aleph_0 = |\omega \times \omega| = |\omega\backslash\{0\}| = \aleph_0$.

3) Indukcijom po n. Očigledno, $\aleph_0^1 = \aleph_0$. Neka je $n > 1$. Tada iz induktivne pretpostavke i 2) sledi

$$\aleph_0^n = \aleph_0^{n-1} \otimes \aleph_0 = \aleph_0 \otimes \aleph_0 = \aleph_0.$$

■

Tvrđenje 4.2.2 Za svaki $n \geq 1$ važi:

1) $n \oplus \aleph_0 = \aleph_0$,
2) $n \otimes \aleph_0 = \aleph_0$.

Dokaz. 1) Kako je $0 \leq n \leq \aleph_0$, koristeći monotonost, dobijamo

$$\aleph_0 = 0 \oplus \aleph_0 \leq n \oplus \aleph_0 \leq \aleph_0 \oplus \aleph_0 = \aleph_0.$$

2) Kako je $0 \leq n \leq \aleph_0$, koristeći monotonost, dobijamo

$$\aleph_0 = 1 \otimes \aleph_0 \leq n \otimes \aleph_0 \leq \aleph_0 \otimes \aleph_0 = \aleph_0.$$

■

Tvrđenje 4.2.3 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Dokaz. Treba pokazati da $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.
($\leq$) Neka je $x \in [0,1)$ proizvoljan realan broj. Posmatrajmo binarni zapis $[0, a_1a_2\ldots a_i\ldots]_2$ ovog broja x, gde je $a_i \neq 1$ za beskonačno mnogo indeksa i.[11] Ako realnom broju $x \in [0,1)$ dodelimo beskonačan niz $a_1, a_2, \ldots, a_i,\ldots$ (gde je $a_i \neq 1$ za beskonačno mnogo indeksa i), onda smo time definisali jedno injektivno preslikavnje iz intervala $[0,1)$ u ${}^{\omega}\{0, 1\}$, pa $|[0,1)| \leq |{}^{\omega}\{0, 1\}| = 2^{\aleph_0}$. Nije teško pokazati da postoji bijekcija g takva da $\mathbb{R} \sim_g [0,1]$, pa dobijamo $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$.
($\geq$) S druge strane, ako proizvoljnom preslikavanju $f \in {}^{\omega}\{0,1\}$ dodelimo realan broj $x_f \in [0,1]$ oblika $x_f = 0, f(0)f(1)f(2)$, onda smo definisali jedno injektivno preslikavanje iz ${}^{\omega}\{0,1\}$ u $\mathbb{R}$, tj. $2^{\aleph_0} = |{}^{\omega}\{0, 1\}| \leq |\mathbb{R}|$.

■

Tvrđnje 4.2.4

a) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,
b) $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Dokaz. a) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \otimes \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.
b) Iz $2 < \aleph_0 < \mathfrak{c}$ sledi $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

■

[11] Postojanje ovog binarnog zapisa za proizvoljan $x \in [0,1)$ ovde nije dokazano.

4.3. Osnovna teorema kardinalne aritmetike

Slično ordinalima, i beskonačne kardinale možemo posmatrati kao uopštenje prirodnih brojeva. U nastavku ćemo prvo dokazati jedno tvrđenje o beskonačnim kardinalima, koja se zove osnovna teorema kardinalne aritmetike. Osnovna, jer ima jednu važnu posledicu, tj. da se zbir i proizvod dva beskonačna kardinala mogu dobiti trivijalno.

Teorema 4.3.1 *Za svaki beskonačan kardinal* κ, *tj.* $\kappa \geq \omega$ *važi*

$$\kappa \otimes \kappa = \kappa.$$

Dokaz. Kako na klasi svih ordinala On "relacija" < ima sve osobine striktnog dobrog uređenja i kardinali su specijalni ordinali sledi da "relacija" < ima sve osobine striktnog dobrog uređenja i na klasi svih kardinala. Zato možemo dokazati tvrđenje transfinitnom indukcijom. Ako je $\kappa = \omega$ onda tvrđenje važi. Pretpostavimo da $\kappa > \omega$ i tvrđenje važi za sve λ takve da $\omega \leq \lambda < \kappa$. Treba dokazati da $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.
Neka je $A = \kappa \times \kappa$. Tada je $|A| = |\kappa \times \kappa|$. Očigledno dovoljno je dokazati da $|A| \leq \kappa$.
Ako uvedemo jedno striktno dobro uređenje $\lhd$ skupa A tako da

$$(\text{»}) \qquad |pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle)| < \kappa$$

za proizvoljan $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in A$ onda važi $|A| \leq \kappa$.[12]

Naime, pretpostavimo da je $\lhd$ jedno striktno dobro uređenje skupa A koje zadovoljava $|pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle)| < \kappa$. Neka je $type(\langle A, \lhd \rangle) = \xi$. Tada je $\langle A, \lhd \rangle \cong \langle \xi, \in_A \rangle$, i kako je $A \sim \xi$ imamo $|A| = |\xi|$. Neka je $\varphi \colon A \to \xi$ izomorfizam. Neka je $\eta < \xi$ pa postoji $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in A$ tako da $\varphi(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle) = \eta$. Kako je φ izomorfizam onda je početni segment $pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle)$ od $\langle A, \lhd \rangle$ određen sa elementom $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle$ izomorfan sa η, i prema tome važi $|pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle)| = |\eta|$. Dakle, $|pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle)| = |\eta| < \kappa$ pa $\eta < \kappa$. (Ako bi bilo $\eta > \kappa$ onda bi važilo $|\eta| \geq \kappa$ jer κ kardinal.) Konačno, imamo: $\eta < \xi$ i $\eta < \kappa$ sledi $\xi \subseteq \kappa$ pa $\xi \leq \kappa$ pa $|A| = |\xi| \leq \xi \leq \kappa$.

Sada dajemo jedno dobro uređenje $\lhd$ koje zadovoljava $|pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle)| < \kappa$ za neko $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in A$.
Za proizvoljan $\alpha < \kappa$ definišemo $A_\alpha = \{\langle \xi, \eta \rangle \in \kappa \times \kappa : max\ \{\xi, \eta\} = \alpha\}$. Očigledno $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, ako $\alpha \neq \beta$. Tada važi:

$$A = \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha .$$

Na svakom A_α neka je $<_\alpha$ tzv. antileksikografski poredak tj.

$$\langle \xi, \eta \rangle <_\alpha \langle \mu, \nu \rangle \text{ akko ili } \eta < \nu \text{ ili } (\eta = \nu \text{ i } \xi < \mu).$$

[12] Ako je $\langle A, \lhd \rangle$ striktno dobro uređen skup, onda se $pred_A(a) = \{x \in A : x \lhd a\}$ naziva početni segment od $\langle A, \lhd \rangle$ određen elementom a.

Tada su sve relacije $<_\alpha$ striktna dobra uređenja na odgovarajućim skupovima A_α.
Pokažimo samo da je $<_\alpha$ dobro uređenje na A_α. Neka je $X \subseteq A_\alpha$, $X \neq \emptyset$.
Neka je $X_2 = \{\eta \in \kappa : \exists \xi\, (\langle \xi, \eta \rangle \in X)\}$. $X_2 \neq \emptyset$ jer $X \neq \emptyset$.
Tada je

$$\kappa_2 = \min_{<} \{\eta \in X_2 : max\, \{\xi, \eta\} = \alpha\}.$$

Neka je $X_1 = \{\eta \in \kappa : \langle \eta, \kappa_2 \rangle \in X_2\}$. $X_1 \neq \emptyset$ jer $X_2 \neq \emptyset$.
Tada je

$$\kappa_1 = \min_{<} X_1.$$

$\kappa_0 = \langle\, \kappa_1, \kappa_2 \rangle$ je očigledno najmanji element, tj.

$$\kappa_0 = \min_{<_\alpha} X.$$

Definišemo poredak $\lhd$ na $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$:
Ako su $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle, \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \in A$ proizvoljni, onda

$$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \lhd \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \text{ akko } \exists \alpha, \beta < \kappa \;\; \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \in A_\alpha, \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \in A_\beta \text{ i važi:}$$

$$\alpha < \beta \text{ ili } (\alpha = \beta \text{ i } \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle <_\alpha \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle).$$

Dokažimo da je $\lhd$ dobro uređenje na A. Neka je $S \subseteq \kappa \times \kappa = A$, $S \neq \emptyset$,

$$\varepsilon = \min_{<} \{\gamma : A_\gamma \cap S \neq \emptyset\}.$$

Kako je $S \neq \emptyset$, skup $\{\gamma : A_\gamma \cap S \neq \emptyset\}$ nije prazan. Neka su

$$\beta_0 = \min_{<} \{\beta : \exists \alpha\, \langle \alpha, \beta \rangle \in A_\varepsilon \cap S\}$$
$$\alpha_0 = \min_{<} \{\alpha : \langle \alpha, \beta_0 \rangle \in S\}.$$

Odavde se može videti da je $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle$ najmanji element skupa S u odnosu na $\lhd$.

Treba još pokazati da $\lhd$ zadovoljava (»). Neka je $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in A$. Tada je $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in A_\alpha$ za neko $\alpha < \kappa$. Dokažimo da je $pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle) \subseteq (\alpha + 1) \times (\alpha + 1)$. Kako je $\alpha = max\, \{\alpha_0, \beta_0\}$ važi $\alpha_0 < \alpha + 1$ i $\beta_0 < \alpha + 1$. Ako je $\langle \eta, \xi \rangle \lhd \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle$, onda je $max\, \{\eta, \xi\} \leq max\, \{\alpha_0, \beta_0\}$ pa $\eta < \alpha + 1$ i $\xi < \alpha + 1$, a to znači $pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle) \subseteq (\alpha + 1) \times (\alpha + 1)$. Dalje imamo $|pred_A(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle)| \leq |(\alpha + 1) \times (\alpha + 1)|$. Kako je κ granični ordinal (svaki beskonačni kardinal je granični ordinal, teorema 2.3), onda iz $\alpha < \kappa$ sledi $\alpha + 1 < \kappa$. Iz induktivne pretpostavke sledi $|\alpha + 1|^2 = |\alpha + 1| < \alpha + 1 < \kappa$, važi (»).

■

Napomenimo da su ova teorema i aksioma izbora (AC) ekvivalentne.

Sledeća teorema je jako važna posledica prethodne, jer na osnovu te teoreme za proizvoljna dva kardinala, od kojih je barem jedan beskonačan, možemo odrediti njihov zbir i proizvod trivijalno.

Teorema 4.3.2 *Za sve kardinale κ, $\lambda \geq \omega$ važi*

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Dokaz. Neka je $\kappa \leq \lambda$. Jasno, $f\colon \lambda \to \kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$ je injekcija pa

$$\lambda \leq \kappa \oplus \lambda. \tag{1}$$

Važi da je i $g\colon \kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \to \lambda \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$ injekcija pa

$$\kappa \oplus \lambda \leq \lambda \oplus \lambda. \tag{2}$$

Slično, kako su $2 \times \lambda \sim \lambda \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$ i $h\colon 2 \times \lambda \to \lambda \times \lambda$ injekcije

$$\lambda \oplus \lambda = 2 \otimes \lambda \leq \lambda \otimes \lambda. \tag{3}$$

Iz *(1)*, *(2)*, *(3)* i prethodne teoreme dobijamo

$$\lambda \leq \kappa \oplus \lambda \leq \lambda \otimes \lambda \leq \lambda$$

tj.

$$\kappa \oplus \lambda = \lambda.$$

Analogno možemo dobiti da $\kappa \otimes \lambda = \lambda$.

■

Teorema 4.3.3 *Ako su λ i κ takvi kardinali da $\lambda \geq \omega$ i $2 \leq \kappa \leq \lambda$, tada*

$$\kappa^\lambda = 2^\lambda = P(\lambda).$$

Dokaz. Traženu jednakost dobijamo ovako

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq |P(\lambda \times \lambda)| = |P(\lambda)| = 2^\lambda.$$

■

5. Osobine beskonačnih kardinala

5.1. Alefi

Definicija 5.1.1 *Neka je κ proizvoljan kardinal. Najmanji kardinal koji je veći od κ naziva se* ***naredni kardinal kardinala κ*** *(sukcesor kardinala κ) i označavamo sa $\kappa^{\oplus}$. Dakle,*

$$\kappa^{\oplus} = \min_{<} \{\lambda : \lambda < \kappa\}.$$

Naredni kardinal u prethodnoj definiciji je dobro definisan, jer za proizvoljan kardinal κ važi $2^{\kappa} > \kappa$. Naravno, definicija važi i za konačne kardinale: ako $\kappa < \omega$, onda $\kappa^{\oplus} = \kappa \oplus 1 = \kappa + 1$.

Teorema 5.1.1 *Za proizvoljan $\kappa \geq \omega$ važi da je $\kappa^{\oplus}$ kardinal skupa svih ordinala kardinalnosti κ, tj.*

$$\kappa^{\oplus} = |\{\xi : |\xi| = \kappa\}|.$$

Dokaz. Imamo sledeće:

$$\kappa \leq |\xi| \text{ akko } \kappa \leq \xi$$

i

$$|\xi| < \kappa^{\oplus} \text{ akko } \xi < \kappa^{\oplus}.$$

Zato

$$|\xi| = \kappa \text{ akko } \kappa \leq \xi < \kappa^{\oplus}.$$

Tada sledi

$$\{\xi : |\xi| = \kappa\} = \{\xi : \kappa \leq \xi < \kappa^{\oplus}\} = \kappa^{\oplus} \setminus \kappa.$$

S druge strane,

$$\kappa^{\oplus} = (\kappa^{\oplus} \setminus \kappa) \cup \kappa$$

pa zato

$$\kappa^{\oplus} = |\kappa^{\oplus} \setminus \kappa| \oplus \kappa = max\ \{|\kappa^{\oplus} \setminus \kappa|, \kappa\}.$$

Kako $\kappa < \kappa^{\oplus}$ sledi

$$\kappa^{\oplus} = |\kappa^{\oplus} \setminus \kappa| = |\{\xi : |\xi| = \kappa\}|.$$

■

Na osnovu ove teoreme, ako stavimo da $\kappa = \omega$, onda

$$\omega^{\oplus} = |\{\xi : |\xi| = \omega\}|,$$

tj. najmanji neprebrojiv kardinal je kardinal skupa svih prebrojivo beskonačnih ordinala.

Teorema 5.1.2 *Neka je A proizvoljan skup kardinala. Tada važi:*
- *a) sup A je kardinal,*
- *b) Ako je sup A beskonačan, onda* $\sum_{\lambda \in A} \lambda = sup\ A$.

Dokaz. Znamo, za neki skup ordinala X, najmanji ordinal koji je veći ili jednak od svih ordinala iz X je $sup\ X = \cup X$.
- a) Označimo $|sup\ A|$ sa κ. Ako $\kappa < sup\ A$ onda $\kappa \in \lambda$ za neki $\lambda \in A$. Kako je $\lambda \subseteq sup\ A$ onda $|\lambda| \leq \kappa < \lambda$. Kontradikcija, jer je λ kardinal. Zato je $|sup\ A| = sup\ A$, pa je $sup\ A$ kardinal.
- b) Označimo kardinal $sup\ A$ sa κ. Važi $\kappa = \cup A$ i zato $\kappa \leq \sum_{\lambda \in A} |\lambda|$. S druge strane, $\sum_{\lambda \in A} |\lambda| = \sum_{\lambda \in A} \lambda$, jer su elementi skupa A kardinali. Dalje, za $\lambda \in A$ je $\lambda \subseteq \kappa$ i zato $\lambda \leq \kappa$. Tada je $A \subseteq \kappa + 1$. Kako je $\kappa \geq \omega$ imamo $\sum_{\lambda \in A} \lambda \leq \kappa \otimes |\kappa + 1| = \kappa^2 = \kappa$.

■

Kantorova teorema garantuje da postoji beskonačno mnogo beskonačnih kardinala i pri tome, kako smo videli u definiciji 5.1.1, za svaki kardinal se može naći drugi kardinal veći od njega.
Dakle, možemo konstruisati beskonačan rastući niz beskonačnih kardinalnih brojeva. Naime, ako rekurzijom definišemo skupove:

$$P^0(\omega) = \omega \text{ i } P^{n+1}(\omega) = P(P^n(\omega)) \text{ ako } n \in \omega,$$

tada važi

$$\omega < |P^1(\omega)| < \ldots < |P^n(\omega)| < |P^{n+1}(\omega)| < \ldots$$

U nastavku uvodimo nove oznake za beskonačne kardinale. Naime, koristimo ordinale za indeksiranje beskonačnih kardinala u rastuće uređenje:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \ldots$$

Definicija 5.1.2 *Definišemo operator $\aleph_\alpha$ za proizvoljan ordinal α transfinitnom rekurzijom:*

- $\aleph_0 = \omega$.
- *Neka je $\alpha > 0$ i pretpostavimo da smo $\aleph_\beta$ definisali za svaki ordinal $\beta < \alpha$. Neka je $\aleph_\alpha$ najmanji kardinal κ takav da je $\kappa > \aleph_\beta$ za sve ordinale $\beta < \alpha$.*

Ova definicija ima smisla zato što takav kardinal uvek postoji na osnovu teorema 5.1.1 i 5.1.2.
Uobičajeno je da se taj niz kardinala, kada se posmatraju kao ordinali, obeležava sa

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \omega_{\omega+2}, \ldots$$

Teorema 5.1.3

1) *$\aleph_\alpha$ je beskonačan kardinal.*
2) *Za sve ordinale α i β važi: ako je $\alpha < \beta$ onda je $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.*
3) *Ako je α granični ordinal tada $\aleph_\alpha = sup\ \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$.*
4) *Za svaki ordinal α je $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^\oplus$, tj. $\aleph_{\alpha+1}$ je najmanji kardinal veći od $\aleph_\alpha$.*

Dokaz. Tvrđenja pod 1) i 2) su direktna posledica definicije 5.1.2.

3) Ako je α granični ordinal, onda iz $\beta < \alpha$ sledi $\beta + 1 < \alpha$ i naravno $\alpha > 0$. Tada za proizvoljan $\beta < \alpha$ važi

$$sup\ \{\aleph_\gamma : \gamma < \alpha\} \geq \aleph_{\beta+1} > \aleph_\beta.$$

Na osnovu prethodne teoreme $sup\ \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ je kardinal pa zato $sup\ \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ je najmanji kardinal veći od $\aleph_\beta$, ako $\beta < \alpha$.

4) Ovo tvrđenje opet sledi iz definicije 5.1.2.

■

Teorema 5.1.4 *Za proizvoljan beskonačan kardinal κ postoji ordinal $\alpha \leq \kappa$ takav da je $\kappa = \aleph_\alpha$.*

Dokaz. Transfinitnom indukcijom.
1° $\kappa = \omega$. Tada $\kappa = \aleph_0$ i $0 < \omega = \kappa$.
2° $\kappa = \lambda^\oplus$. Iz induktivne pretpostavke sledi da postoji $\alpha < \lambda$ takav da $\lambda = \aleph_\alpha$. Tada važi

$$\kappa = \lambda^\oplus = (\aleph_\alpha)^\oplus = \aleph_{\alpha+1}$$

prema prethodnoj teoremi, i

$$\alpha + 1 \leq \lambda + 1 < \lambda^{\oplus} = \kappa.$$

3° κ je granični kardinal. Neka je $\alpha = sup\ \{\beta : \aleph_\beta < \kappa\}$. Tada iz pretpostavke i induktivne pretpostavke važi

$$\alpha = sup\ \{\beta : \aleph_\beta < \kappa\} \leq sup\ \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ je kardinal}\} = \kappa,$$

i α je granični ordinal. Slično,

$$\begin{aligned} \kappa &= sup\ \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ je kardinal}\} \\ &= sup\ \{\aleph_\beta : \aleph_\beta < \kappa\} \\ &= sup\ \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\} \\ &= \aleph_\alpha. \end{aligned}$$

Poslednja jednakost je na osnovu teoreme 5.1.3.

■

Definicija 5.1.3 *Beskonačan kardinal κ se naziva **naredni kardinal** ako $\kappa = \lambda^{\oplus}$, za proizvoljan kardinal λ. U suprotnom, tj. ako κ nije naredni, i $\kappa \neq 0$, zove se **granični kardinal**.*
Za kardinal κ se kaže da je jako granični kardinal ako važi da

$$\forall \lambda < \kappa \ \ 2^{\lambda} < \kappa.$$

Možemo primetiti da svaki jako granični kardinal je jedan granični kardinal, jer za svaki kardinal λ važi

$$\lambda^{\oplus} \leq 2^{\lambda}.$$

Na osnovu prethodnih teorema možemo zaključiti da za svaki ordinal α

- $\aleph_\alpha$ je naredni kardinal akko je α naredni ordinal,
- $\aleph_\alpha$ je granični kardinal akko je α granični ordinal.

Tako, na primer $\aleph_0$ i $\aleph_\omega$ su granični, dok $\aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots$ su naredni kardinali.
Ovde još napomenimo da su naredni ordinali koji su i kardinali jedino prirodni brojevi.

5.2. Drugo hebrejsko slovo: ב

Videli smo da se prvo slovo hebrejskog alfabeta א koristi za označavanje beskonačnih kardinala. A drugo slovo hebrejskog alfabeta ב (čitamo: bet) je rezervisano za označavanje beskonačnih kardinala, koje ćemo dati u sledećoj definiciji.

Definicija 5.2.1 *Definišimo rekurzijom niz beskonačnih kardinala:*

- $\beth_0 = \aleph_0$;
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$.

Na ovaj način smo dobili niz beskonačnih kardinala

$$\beth_0, \beth_1, \beth_2, \ldots$$

koji su, respektivno, kardinali skupova

$$\omega, P(\omega), P(P(\omega)), \ldots$$

Ovaj beskonačan niz beskonačnih kardinala smo već pomenuli, kad smo uveli alefe.
Tada važi da $\beth_1 = \mathfrak{c}$. Kantorova teorema implicira da za sve $n \in \omega$ važi

$$\beth_n < \beth_{n+1}.$$

Ako je ξ granični ordinal, onda $\beth_\xi = sup\ \{\beth_\alpha : \alpha < \xi\}$.

Kako ne postoji kardinal između $\aleph_0$ i $\aleph_1$ važi: $\beth_1 \geq \aleph_1$. Koristeći transfinitnu indukciju dobijamo da za sve ordinale α

$$\beth_\alpha \geq \aleph_\alpha.$$

5.3. Kofinalnost

Definicija 5.3.1 *Neka je $\langle A, \lhd\rangle$ striktno uređen skup i $B \subseteq A$. Kažemo da je A* ***kofinalan*** *(eng. cofinality) sa B ako*

$$\forall x \in A\ \exists y \in B\ \ x \unlhd y.$$

Na primer, $\langle \mathbb{R}, <\rangle$ je kofinalan sa ω, ili $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ je kofinalan sa $\{\omega\}$.

Teorema 5.3.1 (Hauzdorfova[13] teorema) *Proizvoljan striktno uređen skup $\langle A, \lhd\rangle$ je kofinalan sa skupom $B \subset A$ za koji važi:*

- *$\langle B, \lhd\rangle$ je dobro uređen,*
- *$type(\langle B, \lhd\rangle) \leq |A|$.*

Dokaz. Neka je $\lhd^*$ striktno dobro uređenje skupa A tako da

$$type(\langle A, \lhd^*\rangle) = |A|.$$

[13] Felix Hausdorff (1868–1942), nemački matematičar

Neka je

$$B = \{y \in A : \forall z \in A \ \ y \lhd z \Rightarrow y \lhd^* z\}.$$

Sada ćemo pokazati da je skup A kofinalan sa B.
Neka je $x \in A$. Tada tvrdimo da je

$$y_0 = \min_{\lhd^*} \{z \in A : x \unlhd z\}$$

elemenat skupa B.
Ako je $z \in A$ i $y_0 \lhd z$ onda $x \lhd z$ i tada zbog izbora elementa y_0 važi i $y_0 \lhd^* z$. Tada $y_0 \in B$.
Sada ćemopokazati da su dva uređenja $\lhd$ i $\lhd^*$ ista na skupu B.
Neka su $y, z \in B$ i pretpostavimo da je $y \lhd z$. Iz definicije skupa B sledi da $y \lhd^* z$. Zato je $\lhd$ striktno dobro uređenje skupa B i

$$type(\langle B, \lhd\rangle) = type(\langle B, \lhd^*\rangle) \leq type(\langle A, \lhd^*\rangle) = |A|.$$

■

Definicija 5.3.2 *Neka je $\langle A, \lhd\rangle$ proizvoljan striktno uređen skup. Najmanji ordinal ξ za koji je $\langle A, \lhd\rangle$ kofinalan sa nekim striktno dobro uređenim podskupom B ordinalnog tipa ξ se naziva* ***kofinalnost skupa $\langle A, \lhd\rangle$*** *i označava sa $cf(\langle A, \lhd\rangle)$.*

Dakle, $cf(\langle A, \lhd\rangle) = \xi$ ako su sledeći uslovi zadovoljeni:

- $\langle A, \lhd\rangle$ kofinalan sa nekim $B \subset A$,
- B je striktno dobro uređen,
- $type(\langle B, \lhd\rangle) = \xi$,
- ξ je najmanji ordinal sa prethodnim osobinama.

Dobra definisanost $cf(\langle A, \lhd\rangle)$ za neki striktno uređen skup sledi iz prethodne teoreme i važi

$$cf(\langle A, \lhd\rangle) \leq |A|.$$

Ako su $\langle A, \lhd\rangle$ i $\langle A^*, \lhd^*\rangle$ izomorfni, tj. $\langle A, \lhd\rangle \cong \langle A^*, \lhd^*\rangle$ tada očigledno $cf(\langle A, \lhd\rangle) = cf(\langle A^*, \lhd^*\rangle)$. Zato ima smisla sledeća definicija.

Definicija 5.3.3 *Neka je ξ proizvoljan ordinal. Tada* ***kofinalnost ordinala ξ*** *označimo sa $cf(\xi)$, i to je ordinal $cf(\langle A, \lhd\rangle)$, gde je $\langle A, \lhd\rangle$ takav striktno dobro uređen skup da važi $type(\langle A, \lhd\rangle) = \xi$, tj. $\langle A, \lhd\rangle \cong \langle \xi, \in_\xi\rangle$.*

Nije teško primetiti da je $cf(\langle A, \lhd\rangle) = 1$ ako i samo ako $\langle A, \lhd\rangle$ ima poslednji element. Ako $\langle A, \lhd\rangle$ nema poslednji element i $A \neq \emptyset$, onda $cf(\langle A, \lhd\rangle) \geq \omega$.

Primeri:

a) $cf(n) = 1$ ako $n > 0$ i $n \in \omega$,
b) $cf(\omega) = \omega$,
c) $cf(\omega_\omega) = \omega$, jer je $\langle \omega_\omega, < \rangle$ kofinalan sa $\{\omega_n : n \in \omega\}$.

U nastavku ćemo često koristiti sledeću definiciju.

Definicija 5.3.4 *Neka je ξ proizvoljan ordinal. Tada kažemo da je ξ*

- *regularan, ako je $cf(\xi) = \xi > 1$,*
- *singularan, ako je $1 < cf(\xi) < \xi$.*

Primeri: ω je regularan, ω_ω i $\omega + \omega$ su singularni, ali $n \in \omega$ i $\omega + 1$ nisu ni regularni ni singularni.

Teorema 5.3.2

1) *Za proizvoljan ordinal $\xi \neq 0$, $cf(\xi)$ je ili 1 ili regularan ordinal.*
2) *Svaki regularan ordinal je beskonačan kardinal.*

Dokaz. 1) Ako je $\langle A, \lhd \rangle$ striktno dobro uređen skup, $C \subset B \subset A$, A kofinalan sa B i B kofinalan sa C, onda je i A kofinalan sa C. Tada sledi

$$cf(\langle B, \lhd \rangle) \geq cf(\langle A, \lhd \rangle).$$

Neka je sada A takav striktno dobro uređen skup da

$$type(\langle A, \lhd \rangle) = \xi.$$

Uzmimo da

$$\beta = cf(\xi) > 1.$$

Birajmo jedan striktno dobro uređen skup $B \subset A$ takav da je $type(\langle B, \lhd \rangle) = \beta$ i A je kofinalan sa B. Tada je

$$cf(\beta) = cf(\langle B, \lhd \rangle) \geq cf(\langle A, \lhd \rangle) = \beta.$$

Kako očigledno važi $cf(\beta) \leq \beta$, imamo

$$cf(\beta) = \beta > 1$$

pa zato je $cf(\xi) = \beta$ regularan ordinal.
2) Neka je α regularan ordinal, tj. $cf(\alpha) = \alpha > 1$. Tada na osnovu Hauzdorfove teoreme

$$cf(\alpha) \leq |\alpha| \text{ i } |\alpha| \leq \alpha.$$

Dakle, $|\alpha| = \alpha$ a to znači da je α kardinal. α ne može da bude konačan, jer bi onda važilo $cf(\alpha) \leq 1$.

■

Ova teorema implicira: ako je $\xi < \omega_1$ granični ordinal, onda je $cf(\xi) = \omega$, tj. svaki prebrojiv granični ordinal je kofinalan sa nekim podskupom ordinalnog tipa ω.
Videli smo da nije svaki beskonačan kardinal regularan, npr. $\aleph_\omega$ je singularan.

Posledica 5.3.1 *Svaki naredni kardinal je regularan.*

Dokaz. Znamo da je svaki beskonačni kardinal granični ordinal. Ako je ξ granični ordinal, onda je $\langle \xi, < \rangle$ kofinalan sa $A \subseteq \xi$ ako i samo ako je

$$\cup A = sup\ A = \xi.$$

Neka je sada $\kappa = \lambda^{\oplus}$ za proizvoljan $\lambda \geq \omega$. Tada je κ granični ordinal.

Pretpostavimo da je

$$A \subseteq \kappa \text{ i } type(\langle A, \lhd \rangle) < \kappa.$$

Tada je $|A| < \kappa$ i zato $|A| \leq \lambda$. Dalje, važi da $|\xi| \leq \lambda$ za proizvoljan $\xi \in A$. Zbog toga važi

$$|sup\ A| \leq |\cup A| \leq \lambda^2 = \lambda < \kappa,$$

pa zato je

$$sup\ A < \kappa.$$

Sledi da κ nije kofinalan sa A.

■

Nije svaki regularan kardinal naredni kardinal, npr. ω je regularan granični kardinal. Postavlja se pitanje da li postoje regularni granični kardinali veći od ω? Takvi kardinali se nazivaju slabo nedostižni kardinali. Ako za slabo nedostižan kardinal κ važi i sledeći uslov

$$\forall \lambda < \kappa\ (2^\lambda < \kappa)$$

onda se govori o jako nedostižnom kardinalu.

Dakle, imamo sledeću definiciju.

Definicija 5.3.5 ***Slabo nedostižni kardinali*** *su neprebrojivi regularni granični kardinali (Hausdorff, 1908.), a* ***jako nedostižni kardinali*** *su neprebrojivi regularni jako granični kardinali (Tarski, 1930.).*

Sledeća teorema daje jednu osobinu $cf(\kappa)$ za beskonačane kardinale κ.

Teorema 5.3.3 *Ako je κ proizvoljan beskonačan kardinal, onda je $cf(\kappa)$ najmanji ordinal α, za koji se može naći niz kardinala $\{\kappa_\xi < \kappa : \xi < \alpha\}$, takav da*

$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi = \kappa.$$

Dokaz. Neka je δ najmanji ordinal sa datom osobinom. Prvo dokazujemo da $\delta \leq cf(\kappa)$. Neka je $A \subseteq \kappa$ takav skup da je $type(\langle A, <\rangle) = cf(\kappa)$ i $\langle \kappa, <\rangle$ je kofinalan sa A. Kako smo videli u prethodnoj posledici, važi $\cup A = \kappa$. Zato

$$\kappa \leq \sum_{\xi\in A} |\xi| \leq \kappa^2 = \kappa,$$

tj. važi

$$\kappa = \sum_{\xi\in A} |\xi| .$$

Kako je $|\xi| < \kappa$, ako je $\xi < \kappa$, onda dobijamo

$$\delta \leq type(\langle A, <\rangle) = cf(\kappa).$$

Dokazujemo da važi i $cf(\kappa) \leq \delta$. Kako je $cf(\kappa) \leq \kappa$, u dokazu možemo pretpostaviti da je $\delta < \kappa$. Birajmo jedan takav niz kardinala $\{\kappa_\xi : \xi < \delta\}$ za koji je

$$\kappa_\xi < \kappa \text{ ako je } \xi < \delta,$$

i

$$\kappa = \sum_{\xi<\delta} \kappa_\xi .$$

Neka je

$$A = \{\kappa_\xi : \xi < \delta\}.$$

Tvrdimo da je $\langle \kappa, <\rangle$ kofinalan sa A. Ako ovo ne bi važilo, onda bi postojao ordinal $\eta < \kappa$ za koji je $A \subseteq \eta$. Ali tada bi bilo

$$\sum_{\xi<\delta} \kappa_\xi \leq |\eta| \otimes |\delta| < \kappa$$

zbog pretpostavke o ordinalu δ. Stigli smo do kontradikcije, i tako, stvarno, κ je kofinalan sa A. Na osnovu rečenog u dokazu teoreme 5.3.2 imamo

$$cf(\kappa) \leq cf(\langle A, <\rangle).$$

S druge strane, iz Hauzdorfove teoreme sledi

$$cf(\langle A, \lhd\rangle) \leq |A| \leq |type(\langle A, <\rangle)| = |\delta| \leq \delta.$$

Dakle, $cf(\kappa) \leq \delta$.

■

Teorema 5.3.4 *Ako je $\langle A, \lhd\rangle$ proizvoljan striktno uređen skup, $B, C \subseteq A$ i A je kofinalan i sa B i sa C, onda je*

$$cf(\langle B, \lhd\rangle) = cf(\langle C, \lhd\rangle).$$

Dokaz. Neka su $cf(\langle B, \lhd\rangle) = \beta$ i $cf(\langle C, \lhd\rangle) = \gamma$. Zbog simetričnosti dovoljno je pokazati da je $\gamma \leq \beta$.
Po definiciji, možemo birati takve skupove $B_1 \subset B$ i $C_1 \subset C$ da je

$$type(\langle B_1, \lhd\rangle) = \beta \text{ i } type(\langle C_1, \lhd\rangle) = \gamma.$$

B je kofinalan sa B_1 i C je kofinalan sa C_1. Tada je A kofinalan i sa B_1 i sa C_1. Neka je f jedna takva funkcija čiji je domen skup B_1 i

$$f(x) = \min_{\lhd} \{y \in C_1 : x \unlhd y\}.$$

Funkcija f je dobro definisana jer A je kofinalan sa C_1. Tada je C kofinalan i sa $f[B_1]$ jer za proizvoljan $z \in A$ postoji takav $x \in B_1$ da

$$z \unlhd x \unlhd f(x) \in f[B_1].$$

Zato na osnovu rečenog važi

$$type(\langle f[B_1], \lhd\rangle) \geq \gamma.$$

S druge strane, zbog $f[B_1] \subseteq C_1$ važi $type(\langle f[B_1], \lhd\rangle) \leq \gamma$, pa sledi

$$type(\langle f[B_1], \lhd\rangle) = \gamma.$$

Neka je sada g takva funkcija da $\mathrm{D}(g) = f[B_1]$ i

$$g(y) = \min_{\lhd} \{x : f(x) = y\}.$$

Tada funkcija g strogo monotono preslikava $f[B_1]$ u B_1 i zato je

$$\gamma = type(\langle f[B_1], \lhd\rangle) \leq type(\langle B_1, \lhd\rangle) = \beta.$$

■

Posledica 5.3.2 *Ako je κ granični kardinal, onda se može naći jedan strogo monotono rastući niz kardinala* $\{\kappa_\xi : \xi < cf(\kappa)\}$ *takav da*

$$\sum_{\xi<cf(\kappa)} \kappa_\xi = \kappa.$$

Dokaz. Ako je κ granični kardinal, onda je kofinalan sa skupom

$$A = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ je kardinal}\}$$

zato što za proizvoljan $\xi < \kappa$ važi

$$\xi < |\xi|^{\oplus} < \kappa.$$

Zbog toga, na osnovu prethodne teoreme

$$cf(\langle A, <\rangle) = cf(\kappa).$$

Neka je $B \subseteq A$ takav podskup da je A, dakle onda i κ kofinalan sa B, i $type(\langle B, <\rangle) = cf(\kappa)$. Neka je $B = \{\kappa_\xi : \xi < cf(\kappa)\}$ jedno strogo monotono nabrajanje skupa B ordinalnog tipa $cf(\kappa)$. Kako smo to videli ranije, tada važi

$$\kappa = \sum_{\xi<cf(\kappa)} \kappa_\xi .$$

■

Na osnovu prethodnih tvrđenja može se pokazati da je $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$, ako je α proizvoljan granični ordinal.

6. Stepenovanje kardinala

6.1. Problemi sa stepenovanjem

U trećom poglavlju videli smo u dokazu osnovne teoreme aritmetike da zbir i proizvod dva beskonačna kardinala uvek možemo odrediti. U ovoj glavi se bavimo stepenovanjem kardinala, tj. ispitujemo kako možemo dobiti vrednost izraza λ^{κ}. Videćemo da ovo dovodi do težih problema. Do sada samo znamo, na osnovu Kantorove teoreme, da $2^{\kappa} > \kappa$. Iz ovog rezultata samo znamo zaključiti da 2^{κ} ne može da bude jednak sa κ. Zato se odmah postavlja pitanje: da li je tačna jednakost $2^{\kappa} = \kappa^{\oplus}$?

Matematičari su posebno ispitivali osobine kardinala $2^{\aleph_0}$. Poznato je da je kardinalnost skupa realnih brojeva baš $2^{\aleph_0}$, tj. $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Problem koji pita: Sa kojim kardinalom je jednak $2^{\aleph_0}$? zove se *Problem kontinuuma*. Tvrđenje da je $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ zove se *Kontinuum hipoteza* (CH) [14]. Slično, za svaki ordinal α, dakle, imamo da je

$$2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha.$$

Uopšteni problem kontinuuma pita: Sa kojim kardinalom je jednak $2^{\aleph_\alpha}$? Tvrđenje da je $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ se zove *Uopštena kontinuum hipoteza* (GCH)[15].

Ove probleme je postavio već Kantor na kraju XIX. veka. Kako dugo vremena niko nije uspeo da nađe rešenje ovih problema, stekli su ubeđenje da se ta pitanja ne mogu odlučiti iz poznatih pretpostavki (naivne) teorije skupova. Nerešivost ovih osnovnih problema je imala najveći uticaj na razvijanje aksiomatske teorije skupova.

[14] eng. Continuum hypothesis
[15] eng. Generalized continuum hypothesis

K. Gedel je 1939 g. pokazao da se GCH ne može opovrgnuti iz aksiome teorije skupova ZF (odnosno ZFC). Preciznije, to znači da ako iz ostalih aksioma ne stižemo do kontradikcije, onda ne dobijamo kontradikciju ni ako GCH dodamo ostalim aksiomama.
Dakle, važi sledeća teorema.

Teorema 6.1.1 (Gedel[16]) GCH *je saglasna sa teorijom* ZF*, tj. ako je* ZF *neprotivrečna, onda je i* ZF+GCH *neprotivrečna.*

■

Tek je 1963. g. P. Koen pokazao da se tvrđenje $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ne može ni dokazati iz aksiome teorije skupova, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 6.1.2 (Koen[17]) *Ako je* ZF *neprotivrečna onda je i* ZF + $\neg$CH *neprotivrečna. Prema tome,* CH *je nezavisna od* ZF *teorije skupova.*

■

Kasnije su njegovim metodom dokazali da ni to ne vodi do kontradikcije, ako pretpostavimo da je kontinuum $\mathfrak{c}$ "proizvoljno veliki". Šta više, jedino zaključivanje za $2^{\aleph_0}$ je to da $2^{\aleph_0} \neq \kappa$ ako je $cf(\kappa) = \omega$, što ćemo i mi dokazati.
Dakle, na osnovu rečenog može se primetiti da jako malo ima teorema, koja nešto bitno tvrde o ponašanju izraza λ^κ. U nastavku ćemo dokazati dva najvažnija od tih tvrđenja. Konačno, pokazaćemo i to da pomoću te dve teoreme, ako pretpostavimo GCH, onda vrednost izraza λ^κ uvek možemo odrediti.

6.2. Kenigova teorema

Teorema 6.2.1 (Kenig[18]) *Neka su* $\{\lambda_\xi : \xi < \alpha\}$ *i* $\{\kappa_\xi : \xi < \alpha\}$ *dve kolekcije kardinala tako da* $\lambda_\xi < \kappa_\xi$ *za svaki* $\xi < \alpha$*. Tada važi*

$$\sum_{\xi<\alpha} \lambda_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi .$$

Dokaz. Označimo sumu sa λ a proizvod sa κ. Birajmo u parovima disjunktne skupove L_ξ tako da

$$\bigcup_{\xi<\alpha} L_\xi = \lambda$$

i

$$|L_\xi| = \lambda_\xi.$$

[16] Kurt Gödel (1906–1978), američki matematičar austrijskog porekla
[17] Paul Cohen (1934–2007), američki matematičar
[18] Kőnig Gyula (1849–1913), mađarski matematičar

Uvedimo i sledeću oznaku

$$K = \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi.$$

Tada važi $|K| = \kappa$. Treba dokazati da $\kappa \not\leq \lambda$.
Pretpostavimo suprotno, tj. da $\kappa \leq \lambda$. To znači da postoji takav skup $L \subseteq \lambda$ i takva funkcija f da važi $L \sim_f K$. Tada bijekcija f svakom elementu $x \in L$ dodeljuje jednu funkciju $f(x)$ iz K. Sliku funkcije $f(x)$ u tački ξ označimo sa $f(x)(\xi)$.
Neka sada definišemo skup K_ξ za proizvoljan $\xi < \alpha$ na sledeći način:

$$K_\xi = \{f(x)(\xi) : x \in L_\xi \cap L\}.$$

Kako je

$$|L_\xi \cap L| \leq |L_\xi| = \lambda_\xi < \kappa_\xi,$$

tada sledi

$$|K_\xi| < \kappa_\xi,$$

pa možemo zaključiti

$$\kappa_\xi \setminus K_\xi \neq \emptyset,$$

za svaki $\xi < \alpha$.
Posmatrajmo jednu funkciju izbora φ takvu da važi $\varphi(\xi) \in \kappa_\xi \setminus K_\xi$, ako je $\xi < \alpha$. Tada ova funkcija φ pripada skupu K.
Tvrdimo da

$$\varphi \neq f(x)$$

za proizvoljan $x \in L$. Stvarno, ako $x \in L$ onda, s jedne strane, $x \in L_\xi \cap L$ za neki $\xi < \alpha$ i zato je

$$f(x)(\xi) \in K_\xi,$$

a s druge strane, $\varphi(\xi) \notin K_\xi$ i zato je

$$f(x)(\xi) \neq \varphi(\xi).$$

Tada sledi $f(x) \neq \varphi$. Dobili smo kontradikciju, jer funkcija f preslikava L na K.
Dakle, pretpostavka je netačna, i tada $\lambda < \kappa$.

■

Napomena. Nije teško proveriti da je Kantorova teorema specijalan slučaj Kenigove teoreme, odnosno da je prethodna teorema jedna generalizacija Kantorove. Naime, ako stavimo da $\lambda_\xi = 1$ i $\kappa_\xi = 2$ onda dobijamo $\sum_{\xi<\alpha} 1 = |\alpha|$ i $\prod_{\xi<\alpha} 2 = |\{f \mid f\colon \alpha \to \bigcup_{\xi<\alpha}\{0,1\},\ \forall\xi < \alpha\ f(\xi) \in \{0,1\}\}| = |^{\alpha}\{0,1\}| = 2^{|\alpha|}$, pa dobijamo poznatu Kantorovu nejednačinu $|\alpha| < 2^{|\alpha|}$.

Posledica 6.2.1. *Ako je* $\{\kappa_\xi : \xi < \alpha\}$ *strogo rastući niz kardinala, gde je* α *granični ordinal i* $\kappa_0 > 0$, *tada važi*

$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi .$$

Dokaz.

$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_{\xi+1} \leq \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi .$$

Prva nejednakost sledi iz Kenigove teoreme i činjenice da $\kappa_\xi < \kappa_{\xi+1}$, gde je $\xi < \alpha$. Druga nejednačina sledi iz ovoga:

ako su $\xi, \eta < \alpha$ i $\xi \neq \eta$ onda je $\xi + 1 \neq \eta + 1$ i $\xi + 1 < \alpha$.

■

Posledica 6.2.2. *Ako je* κ *proizvoljan beskonačan kardinal, onda važi*

$$\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa.$$

Dokaz. Ako je κ regularan, onda

$$\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^\kappa \geq 2^\kappa > \kappa.$$

Neka je sada κ singularan. Tada je κ granični ordinal, i zato na osnovu posledice 5.3.2 postoji strogo rastući niz kardinala $\{\kappa_\xi : \xi < cf(\kappa)\}$ da

$$\kappa = \sum_{\xi<cf(\kappa)} \kappa_\xi .$$

Možemo pretpostaviti da $\kappa_0 > 0$. Tada po posledici 6.2.1 sledi

$$\kappa < \prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa_\xi \leq \kappa^{cf(\kappa)}.$$

■

Posledica 6.2.3 *Neka su* κ *i* λ *kardinali, za koje važi da* $\kappa \geq \omega$ *i* $\lambda \geq 2$. *Tada je*

$$cf(\lambda^\kappa) > \kappa.$$

Dokaz. Po pretpostavci, λ^κ je beskonačan kardinal. Tada iz prethodne posledice sledi

$$(\lambda^\kappa)^{cf(\lambda^\kappa)} > \lambda^\kappa$$

Znamo, ako je $\mu \leq \kappa$, onda

$$(\lambda^{\kappa})^{\mu} = \lambda^{\kappa \otimes \mu} = \lambda^{\kappa}.$$

Tada je

$$\lambda^{\kappa \otimes cf(\lambda^{\kappa})} = (\lambda^{\kappa})^{cf(\lambda^{\kappa})} > \lambda^{\kappa},$$

što implicira

$$cf(\lambda^{\kappa}) \nleq \kappa.$$

■

Specijalan slučaj ovog rezultata je da

$$cf(2^{\aleph_0}) \neq \aleph_0,$$

što implicira npr. sledeći važan zaključak:

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega},$$

jer je $cf(\aleph_{\omega}) = \aleph_0$ (primer pod c) posle definicije 5.3.3).

Dakle, ako za proizvoljan kardinal κ važi da $cf(\kappa) = \aleph_0$, onda možemo zaključiti da

$$\kappa \neq 2^{\aleph_0} (= \mathfrak{c}),$$

kako smo to već pomenuli na početku poglavlja.

Na osnovu AC odnosno njenog ekvivalenta, tj. da se svaki skup može dobro urediti, vrednost kardinala $\mathfrak{c}$ je $\aleph_{\alpha}$ za neki ordinal α, ali se ne zna za koji α. Iz Kantorove teoreme sledi da nije $\alpha = 0$. Kako smo videli, pitanje da li je $\alpha = 1$ (tj. CH) je nerešiv (teoreme Gedela i Koena). U našem sistemu aksioma to tvrđenje se ne može ni dokazati ni opovrgnuti.

Najvažnija posledica teoreme Keniga, što se tiče Problema kontinuuma, je da sigurno znamo o nekim kardinalima da nisu jednaki sa $\mathfrak{c}$. Naravno, s tim rezultatom taj problem nije rešen, samo neke mogućnosti su isključene. Teorema ne daje nikakvu instrukciju za određivanje vrednosti kontinuuma $\mathfrak{c}$. Sistem aksioma ZFC to ne zna da odluči.

Posle Koenovog rada Solovay[19] je pokazao da $\mathfrak{c}$ može da bude bilo koji kardinal čija je kofinalnost veća od $\aleph_0$.

[19] Robert Martin Solovay (1938–), američki matematičar

6.3. Bernštajn – Hauzdorf – Tarski - teorema

Sledeća teorema tvrdi da vrednost izraza κ^λ ponekad možemo da izračunamo pomoću vrednosti τ^λ ($\tau < \kappa$).

Teorema 6.3.1 (Bernštajn – Hauzdorf – Tarski[20]) *Neka su κ i λ kardinali za koje važi $\kappa \geq \omega$ i $0 < \lambda < cf(\kappa)$. Tada je*

$$\kappa^\lambda = \Big(\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\Big) \otimes \kappa$$

gde τ "trči" po kardinalima.

Dokaz. $\lambda \geq 1$, zato zbog monotonosti stepenovanja, važi

$$\kappa^\lambda \nless \Big(\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\Big) \otimes \kappa.$$

Po definiciji κ^λ je kardinalnost skupa ${}^\lambda\kappa$ svih funkcija f: $\lambda \to \kappa$. Dokazaćemo da važi jednakost

$${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} {}^\lambda\xi.$$

Jasno, skup na desnoj strani je podskup skupa na levoj strani. Neka je $f \in {}^\lambda\kappa$. Kodomen funkcije f, koji označimo sa Kod(f), je jedan podskup od κ, koji ima kardinalnosti najviše λ. Kako je $\lambda < cf(\kappa)$, tada po definiciji $cf(\kappa)$ važi da $\langle \kappa, < \rangle$ nije kofinalan sa Kod(f). To znači da postoji $\xi < \kappa$ takav da ne postoji nijedan α iz Kod(f) da $\xi < \alpha$, tj. za svaki $\alpha \in$ Kod(f) važi $\alpha \leq \xi$, pa $f \in {}^\lambda\xi$. Dakle, možemo zaključiti da je i skup na levoj strani podskup skupa na desnoj strani, pa važi jednakost između ta dva skupa.
Konačno, prelazeći na kardinale, završimo dokaz na sledeći način:

$$\kappa^\lambda = \sum_{\xi<\kappa} \left|{}^\lambda\xi\right| = \sum_{\xi<\kappa} |\xi|^\lambda$$

$$= \sum_{\substack{\tau<\kappa,\\ \tau \text{ kardinal}}} \tau^\lambda \otimes |\{\xi : |\xi| = \tau\}| \leq \Big(\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda\Big) \otimes \kappa$$

■

Sada dajemo jedan primer za primenu ove teoreme, koji je bio originalna formulacija Bernštajnove teoreme.

[20] Alfred Tarski(1901–1983), američki matematičar poljskog porekla

Tvrđenje: Za proizvoljan $n \in \omega$ važi

$$\aleph_n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \otimes \aleph_n.$$

Dokaz. Indukcijom po n. Ako je $n = 0$, onda imamo

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \otimes \aleph_0 = 2^{\aleph_0} \otimes \aleph_0.$$

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za neko $n \in \omega$. Tada primenujući teoremu 6.3.1 dobijamo

$$\aleph_{n+1}{}^{\aleph_0} = (\sum_{i=0}^{n} \aleph_i{}^{\aleph_0} \oplus \sum_{k<\omega} k^{\aleph_0}) \otimes \aleph_{n+1} .$$

U prvoj sumi ima konačno mnogo sabiraka pa je zbir najveći kardinal, tj. imamo

$$\sum_{i=0}^{n} \aleph_i{}^{\aleph_0} = \aleph_n{}^{\aleph_0}.$$

Drugu sumu izračunamo na sledeći način. Kako je $k^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, za sve $k < \omega$, $k \neq 0,1$, (teorema 4.3.3) imamo

$$\sum_{k<\omega} k^{\aleph_0} = \sum_{k<\omega} 2^{\aleph_0} = \aleph_0 \otimes 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Koristeći dobijene rezultate imamo

$$\aleph_{n+1}{}^{\aleph_0} = (\aleph_n{}^{\aleph_0} \oplus 2^{\aleph_0}) \otimes \aleph_{n+1} = \aleph_n{}^{\aleph_0} \otimes \aleph_{n+1}$$

i konačno, primenujući induktivnu pretpostavku dobijamo

$$\aleph_{n+1}{}^{\aleph_0} = \aleph_n{}^{\aleph_0} \otimes \aleph_{n+1} = 2^{\aleph_0} \otimes \aleph_n \otimes \aleph_{n+1} = 2^{\aleph_0} \otimes \aleph_{n+1}.$$

■

Još napomenimo, ako pretpostavljamo da važi CH, tj. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, onda dobijamo jednostavniji rezultat:

$$\aleph_n{}^{\aleph_0} = \aleph_n$$

gde je $1 \leq n < \omega$.

Kako je $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$, ne možemo koristiti teoremu 6.3.1 za izračunavanje $\aleph_\omega{}^{\aleph_0}$, ali na osnovu posledice 6.2.2 znamo da

$$\aleph_\omega{}^{\aleph_0} > \aleph_\omega.$$

6.4. Šta je ako prihvatimo CH ili GCH?

Ako jedan problem u teoriji skupova ne može da se reši, onda vredi ispitivati taj problem tako da se pretpostavlja CH ili GCH. Naime, na osnovu Gedelove teoreme, takav rezultat, koji se na ovaj način dobija, ne može se opovrgnuti.

Sada dokažimo dve teoreme. U prvoj pretpostavljamo da važi CH, u drugoj da važi GCH.

Teorema 6.4.1 (Sirpinski[21]) *Ako važi* CH, *onda se ravan može rastaviti na dva dela, tako da je presek jednog dela sa svakom vertikalnom a drugog dela sa svakom horizontalnom pravom prebrojiv.*

Dokaz. Po pretpostavci teoreme postoji bijekcija između skupova prebrojivih ordinala ω_1 i realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, gde koristimo indeksiranje umesto oznake za funkciju. Ravan $\mathbb{R}^2$ rastavimo na sledeći način, tj. definišemo $\mathbb{R}^2 = A \cup B$. Ako je $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ pišimo x u obliku $x = r_\alpha$ a y u obliku r_β, i ako je $\alpha < \beta$ stavimo $\langle x, y\rangle$ u A, inače u B.
Sada uzmimo jednu horizontalnu pravu, koju možemo napisati u obliku $L = \{\langle x, c\rangle : x \in \mathbb{R}\}$. Tada, ako je $c = r_\beta$ za neki prebrojiv ordinal $\beta < \omega_1$, onda su elementi preseka $A \cap L$ samo takvi uređeni parovi $\langle x, c\rangle$, gde je $x = r_\alpha$ za neki ordinal $\alpha < \beta$. Ali takvih ordinala ima samo prebrojivo mnogo, zato je $A \cap L$ prebrojiv. Slično se dobija da je $B \cap L$ prebrojiv, ako je L vertikalna prava.

■

Interesantno je da teorema važi i obrnuto.

Teorema 6.4.2 *Ako se ravan može rastaviti na dva dela, tako da je presek jednog dela sa svakom vertikalnom a drugog dela sa svakom horizontalnom pravom prebrojiv, tada važi* CH.

Dokaz. Neka je $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, gde A ima prebrojiv presek sa svakom horizontalnom pravom a B ima prebrojiv presek sa svakom vertikalnom pravom. Pretpostavimo suprotno, da ne važi CH. Tada je vrednost kontinuuma $\mathfrak{c}$ barem $\aleph_2$, jer je $\mathfrak{c} \neq \aleph_0$. Neka je $\{L_i : i \in I\}$ kolekcija $\aleph_2$ horizontalnih prava, a $\{M_j : j \in J\}$ kolekcija $\aleph_1$ vertikalnih prava. Tada se za svaki $i \in I$ i svaki $j \in J$ prave L_i i M_j seku u jednoj tački. Označimo tu tačku sa p_{ij}.
Posmatramo samo jednu pravu L_i. Prava L_i ima $\aleph_1$ presečnih tačaka p_{ij} sa $\aleph_1$ različitom vertikalnom pravom. Zbog pretpostavke teoreme nije svaki p_{ij} u A. Tada postoji takav $j \in J$ da $p_{ij} \in B$. Dodelimo elementu $i \in I$ jedan takav element $j \in J$. Tako smo definisali jednu funkciju f: $I \to J$. Znamo: $|I| = \aleph_2$ i $|J| = \aleph_1$.

[21] Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969), poljski matematičar

Ako bi inverzna slika $f^{-1}(j) = \{i \in I : f(i) = j\}$, za svaku vrednost $j \in J$, bila prebrojiva, onda bi I, odnosno inverzna slika svih vrednosti $j \in J$ imala kardinalnosti najviše $\aleph_0 \otimes \aleph_1 = \aleph_1$, a to je nemoguće. Dakle, postoji takav $j_0 \in J$, koji ima više originala od $\aleph_0$, tj. važi $|f^{-1}(j_0)| = |\{i \in I : f(i) = j_0\}| > \aleph_0$. Tada postoji $\aleph_1$ takav element $i \in I$ da $p_{ij} \in B$, a to znači da vertikalna prava M_{j_0} sadrži više od $\aleph_0$ tačaka skupa B, što je kontradikcija. Dakle, važi CH.

∎

Teorema 6.4.3 *Neka važi* GCH. *Tada je za proizvoljan beskonačan kardinal* κ

$$\kappa^{\lambda} = \begin{cases} 1, & ako\ je\ \lambda = 0; \\ \kappa, & ako\ je\ 1 \le \lambda < cf(\kappa); \\ \kappa^{\oplus}, & ako\ je\ cf(\kappa) \le \lambda \le \kappa; \\ \lambda^{\oplus}, & ako\ je\ \kappa < \lambda. \end{cases}$$

Dokaz. Po pretpostavci teoreme, za proizvoljan kardinal $\tau \ge \omega$

$$2^{\tau} = \tau^{\oplus}.$$

Ako je $\lambda = 0$, onda imamo $\kappa^0 = |{}^0\kappa| = |\{\emptyset\}| = 1$.

Ako je $1 \le \lambda < cf(\kappa)$, onda na osnovu teoreme 6.3.1 imamo

$$\kappa \le \kappa^{\lambda} = (\sum_{\tau<\kappa} \tau^{\lambda}) \otimes \kappa \le \kappa \otimes (\sum_{\tau<\kappa} (2^{\tau})^{\lambda}) \le \kappa \otimes (\sum_{\tau<\kappa} 2^{max\{\tau,\lambda\}})$$

$$\le \kappa \otimes (\sum_{\tau<\kappa} (max\{\tau,\lambda\})^{\oplus}) \le \kappa \otimes \kappa = \kappa.$$

Ako je $cf(\kappa) \le \lambda \le \kappa$, na osnovu posledice 6.2.2 imamo

$$\kappa < \kappa^{cf(\kappa)} \le \kappa^{\lambda} \le (2^{\kappa})^{\lambda} = 2^{max\{\kappa,\lambda\}} = 2^{\kappa} = \kappa^{\oplus}.$$

Dakle, $\kappa < \kappa^{\lambda} \le \kappa^{\oplus}$, tj. $\kappa^{\lambda} = \kappa^{\oplus}$.

Konačno, ako je $\kappa < \lambda$, onda imamo

$$2^{\lambda} \le \kappa^{\lambda} \le 2^{\kappa \otimes \lambda} = 2^{max\{\kappa,\lambda\}} = 2^{\lambda} = \lambda^{\oplus}.$$

∎

Na kraju ovog dokaza samo napomenimo da je Sirpinski dokazao i to da iz ZF+GCH sledi AC.

6.5. Zaključak

Matematičari su mislili skoro 50 godina da osim Kenigove i Bernštajnove teoreme ne postoji nikakva "veza" za κ^{λ}. Tek 1974. g. su otkrili sledeći rezultat.

Teorema 6.5.1 (Silver[22]) *Neka je κ singularni kardinal takav da $cf(\kappa) > \omega$. Pretpostavimo da za sve kardinale manje od κ važi* GCH*, tj. za sve $\omega \leq \lambda < \kappa$ važi $2^{\lambda} = \lambda^{\oplus}$. Tada* GCH *važi i za κ, tj. $2^{\kappa} = \kappa^{\oplus}$.*

■

Za dokazivanje ove teoreme potrebno je uvođenje daljih sredstava, odnosno definisanje novih pojmova, koji izlaze iz okvira ovog rada. Zbog toga nećemo tu dokazati teoremu. Slična je situacija i sa ostalim teoremama, koje ćemo formulisati u nastavku. Da ovaj rad bude malo kompletniji, treba malo reći o tome, dokle su stigli današnji matematičari u rešavanju problema, koji su se pojavili u okviru stepenovanja kardinala. U nastavaku navodimo najvažnije rezultate.

Napomenuli smo posle Kenigove teoreme da je na osnovu Koenovog rada Solovay je dokazao da $\mathfrak{c}$ može da bude bilo koji kardinal čija je kofinalnost veća od $\aleph_0$. Malo kasnije je W. Easton proširio ovaj rezultat na sledeći način.
Neka je f jedno preslikavnje, koje je definisano na kardinalima, i čije su vrednosti takođe kardinali. Neka f ima sledeće osobine:

1) $\omega \leq \kappa < \lambda \Rightarrow f(\kappa) \leq f(\lambda)$;
2) $\omega \leq \kappa \Rightarrow \kappa < cf\,(f(\kappa))$.

Tada je konzistentno (neprotivrečno) pretpostaviti da je $2^{\kappa} = f(\kappa)$, za svaki regularan kardinal κ.
U dokazu ove teoreme Easton je koristio metode teorije modela. Ova teorema zapravo kaže da se ne može jače tvrđenje od posledice 6.2.3 dokazati o ponašanju 2^{τ}, gde je τ regularan kardinal. Posle ovog rezultata Solovay je postavio sledeće pitanje (problemi o singularnim kardinalima):

a) Da li je moguće da za neki singularan kardinal κ

$$\forall \omega \leq \lambda < \kappa\ (2^{\lambda} = \lambda^{\oplus}),\ \text{ali}\ 2^{\kappa} > \kappa^{\oplus}?$$

b) Ako je κ singularni, jako granični kardinal, onda da li je moguće u ZFC zadati neko ograničenje za 2^{κ}?

Magidor[23] je, slično, pomoću teorije modela pokazao da ako pretpostavljamo egzistenciju nekih "jako velikih kardinala", onda za

[22] Jack Silver, američki matematičar
[23] Menachem Magidor (1946–), izraelski matematičar

svaki $n \in \omega$ važi $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$, ali $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$, tj. GCH nije zadovoljena u slučaju $\aleph_\omega$. Matematičari su probali da dokažu neka uopštenja ovog tvrđenja, ali nisu uspeli.
U to vreme se činilo da ni stepenovanje kardinala nije "interesantno", ali to zbog nečeg drugog. Dok su sabiranje i množenje kardinala trivijalne, stepenovanje može da uzima proizvoljnu vrednost, koje nisu isključene uslovima 1) i 2).
Međutim, 1974. g. Silver je dokazao: ako je $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ za sve prebrojive ordinale α, onda je $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$, i sa tom činjenicom pokazao da ne postoji nikakva generalizacija Magidorove teoreme. Tada je dao i odgovor na pitanje pod a), tj. ako je κ singularni kardinal i $cf(\kappa) > \omega$, onda ne važi

$$\forall \omega \leq \lambda < \kappa \ (2^\lambda = \lambda^\oplus), \text{ ali } 2^\kappa > \kappa^\oplus.$$

Kasnije, Hajnal[24] i Galvin[25] su dokazali teoremu, koja implicira da u nekim slučajevima odgovor na pitanje pod b) jeste "da".
Ta teorema glasi ovako:

Teorema 6.5.2 (Galvin – Hajnal) *Ako je* $\aleph_\alpha > cf(\aleph_\alpha) > \omega$ *jako granični kardinal, onda je*

$$2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{(|\alpha|^{cf(\aleph_\alpha)})^\oplus}.$$

■

Tada, npr. ako je $\aleph_{\omega_1}$ jako granični kardinal, onda $2^{\aleph_{\omega_1}} < \aleph_{(2^{\aleph_1})^\oplus}$. Na žalost, ova teorema ne tvrdi ništa o najmenjem singularnom kardinalu $\aleph_\omega$.
Shelah[26], jedan od najvećih današnjih matematičara, je 1980. g. uspeo da dokaže sledeći važan rezultat.

Teorema 6.5.3 (Shelah) *Ako je* $\aleph_\omega$ *jako granični kardinal, onda je*

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^\oplus}.$$

■

Problem stepenovanja singularnih kardinala nije razrešen sa ovim rezultatima, jer je nekoliko godina kasnije Shelah dokazao jedno zajedničko uopštenje prethodne dve teoreme.

Teorema 6.5.4 (Shelah) *Ako je* α *granični ordinal, onda je*

$$\aleph_\alpha^{cf(\alpha)} < \aleph_{(|\alpha|^{cf(\alpha)})^\oplus}.$$

■

[24] Hajnal András (1931–), mađarski matematičar
[25] Frederick Galvin, američki matematičar
[26] Saharon Shelah (1945–), izraelski matematičar

Literatura

[1] A. Hajnal & P. Hamburger, *Halmazelmélet*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[2] R. Sz. Madarász, *Ordinali i kardinali (teorija i zadaci)*, 2004, beleške.

[3] P. Komjáth, *Halmazelmélet*, Budapest, 2007, beleške.

[4] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, 1998.

[5] E. Schimmerling, *Undergraduate set theory*, 2008, beleške.

[6] J.L. Krivine, *Aksiomatička teorija skupova*, Zagreb, 1978.

[7] http://en.wikipedia.org

Kratka biografija

Anđal Andor je rođen u Subotici 9. 7. 1986. godine, živi u Čantaviru. Osnovnu školu "Hunjadi Janoš" završio je u Čantaviru sa odličnim rezultatom i Vukovom diplomom. Godine 2001. se upisao u odeljenje prirodno-matematičkog smera Gimnazije "Svetozar Marković" u Subotici. Gimnaziju je završio sa odličnim rezultatom 2005. godine. Iste godine se upisao na Departman za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer profesor matematike. Sve ispite predviđene planom i programom je položio, i tako stekao uslov za odbranu diplomskog rada.

Novi Sad, *jun 2010.* Anđal Andor

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Diplomski rad

VR

Autor: Anđal Andor

AU

Mentor: dr Rozalija Madaras-Silađi

MN

Naslov rada: O beskonačnim kardinalima

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2010

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (6/51/1/0/0/0/0)

(broj poglavlja/ strana/ lit. citata/ tabela/ slika/ grafika/ priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Teorija skupova

ND

Ključne reči: Kardinal, transfinitna rekurzija, alefi, kofinalnost, kontinuum hipoteza, Kenigova teorema, Bernštajnova teorema.

PO

UDK:

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: jun 2010.

DP

Datum odbrane: jun 2010.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Miloš Kurilić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Boris Šobot, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Rozalija Madaras-Silađi, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Graduation thesis

CC

Author: Angyal Andor

AU

Mentor: dr Rozália Sz. Madarász

MN

Title: On infinite cardinals

XI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2010

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (6/51/1/0/0/0/0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Set theory

Key words: Cardinal, transfinite recursion, aleph numbers, cofinality, continuum hypothesis, König’s theorem, Bernstein’s theorem

UC:

Holding data:

HD

Note:

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board on: Jun 2010

Defended: Jun 2010

Thesis defend board:

President: Dr Miloš Kurilić, full profesor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Dr Boris Šobot, docent, Faculty of Science, Novi Sad

Mentor: Dr Rozália Sz. Madarász, full profesor, Faculty of Science, Novi Sad