3. Tetivni i tangentni četvorouglovi 1

Teorema 1 *Ekvivalentni su sledeći uslovi:*

(1) Četvorougao je tetivan (oko njega se može opisati kružnica);

(2) Tri simetrale njegovih stranica seku se u jednoj tački;

(3) Zbir svaka dva naspramna unutrašnja ugla jednak je $180°$*;*

(4) Svaka stranica se iz preostala dva temena vidi pod podudarnim uglovima.

Teorema 2 *Ekvivalentni su sledeći uslovi:*

(1) Četvorougao $ABCD$ *je tangentan (u njega se može upisati kružnica);*

(2) Tri simetrale njegovih unutrašnjih uglova seku se u jednoj tački;

(3) $AB + CD = AD + BC$.

1. Ako su AA_1, BB_1, CC_1 visine oštrouglog trougla ABC i H njegov ortocentar. Dokazati da je u $\triangle A_1B_1C_1$ H centar upisane kružnice, a A, B, C centri spolja pripisanih kružnica.

2. U konveksnom petouglu $ABCDE$ je $\angle ABC = \angle ADE$ i $\angle AEC = \angle ADB$. Dokazati da je $\angle BAC = \angle DAE$.

3. ^{D}Dokažite: ako se centar kružnice upisane u četvorougao poklapa sa presekom dijagonala, taj četvorougao je romb.

4. ^{D}U unutrašnjosti oštrouglog trougla ABC data je tačka M. Neka su A_1, B_1, C_1 podnožja normala iz M na stranice trougla ABC, A_2, B_2, C_2 podnožja normala iz M na stranice trougla $A_1B_1C_1$ i A_3, B_3, C_3 podnožja normala iz M na stranice trougla $A_2B_2C_2$. Dokazati da je $\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$.

5. ^{D}Neka je O centar opisane kružnice, a E presek dijagonala tetivnog četvorougla $ABCD$. Ako su središta duži AD, BC i OE kolinearna i $\angle AEB \neq 90°$, dokazati da je $AB = CD$.

6. ^{D}Nad stranicama AB, BC, CD, DA tetivnog četvorougla $ABCD$ čije su dužine redom a, b, c, d konstruisani su spolja pravougaonici površina ac, bd, ca, db redom. Dokažite da su njihovi centri temena pravougaonika.

7. Četvorougao $ABCD$ je tetivan. Dokažite da su centri upisanih kružnica trouglova ABC, BCD, CDA i DAB temena pravougaonika.

8. Krug ima središte na stranici AB konveksnog tetivnog četvorougla $ABCD$. Preostale tri stranice dodiruju taj krug. Dokazati da je $AD + BC = AB$.

9. Neka je četvorougao $ABCD$ tetivni i T_1, T_2, T_3, T_4 težišta trouglova ABC, BCD, CDA, DAB. Dokazati da je i četvorougao $T_1T_2T_3T_4$ tetivni.

10. Na najdužoj stranici AC trougla ABC izabrane su tačke A_1 i C_1 takve da je $AC_1 \cong AB$ i $CA_1 \cong CB$, a na stranicama AB i BC redom tačke A_2 i C_2 takve da je $AA_1 \cong AA_2$ i $CC_1 \cong CC_2$. Dokazati da je četvorougao $A_1A_2C_2C_1$ tetivni.

11. ^{D}Date su četiri kružnice k_1, k_2, k_3, k_4, pri čemu se k_1 i k_2, k_2 i k_3, k_3 i k_4, k_4 i k_1 dodiruju spolja. Dokažite da tačke dodira određuju tetivni četvorougao.

12. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ tangentan akko se kružnice upisane u trouglove ABC i ADC dodiruju.

13. ^{D}Dat je tangentan četvorougao $ABCD$. Dokažite da su tačke u kojima kružnice upisane u trouglove ACB i ACD dodiruju stranice četvorougla temena tetivnog četvorougla.

14. Kružnica iseca na svim stranicama četvorougla jednake duži. Dokazati da je on tangentan.

15. Upisana kružnica sa centrom O dodiruje stranice AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$ u tačkama G, M, H, N redom. Ako su AA_1 i BB_1 visine trougla ABO, a CC_1, DD_1 visine trougla CDO, dokazati da su tačke M, N, A_1, B_1, C_1 i D_1 kolinearne.

16. Neka su $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ i $k_4(O_4, r_4)$ disjunktne kružnice takve da je $O_1O_2O_3O_4$ pravougaonik i $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$. Zajedničke spoljašnje tangente kružnica k_1 i k_3 seku zajedničke spoljašnje tangente kružnica k_2 i k_4 u temenima četvorougla $PQRS$. Dokazati da je on tangentan.